

# 非线性能量阱系统吸引子迁移控制

柴凯, 楼京俊, 李爽, 丰少伟

(海军工程大学舰船与海洋学院, 武汉, 430033)

**摘要** 针对非线性能量阱系统多值性导致系统存在多个不同拓扑特性的吸引子, 提出了一种基于吸引子迁移控制方法的非线性减振策略。首先, 分析了大参数范围内激励力幅值对系统全局性态的影响; 其次, 提出了一种改进型的并行多自由度胞映射法, 对典型参数下的共存吸引子及其吸引域进行研究; 最后, 通过迁移控制方法实现了不同振幅吸引子之间的跃迁。仿真结果表明: 非线性能量阱系统在多个典型参数区间内呈现了多稳定吸引子共存现象, 并行多自由度胞映射算法具有较高效率和精度, 通过开环加线性闭环算法可使非线性能量阱系统由大振幅吸引子迁移至小振幅吸引子, 从而实现减振降噪。

**关键词** 非线性能量阱; 吸引子共存; 并行多自由度胞映射法; 开环加非线性闭环; 迁移控制

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2022.02.004

**中图分类号** TB535; O328 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2022)02-0019-07

## A Study of Attractor Migration Control for Nonlinear Energy Sink System

CHAI Kai, LOU Jingjun, LI Shuang, FENG Shaowei

(College of Naval Architecture and Ocean, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

**Abstract** Aimed at the problem that the coexistent attractors with different topological properties remain in the nonlinear energy sink (NES) system caused by the multi-value character, a nonlinear vibration reduction strategy based on the attractor migration control method is proposed. Firstly, the influence of excitation force amplitude on the global behavior of the NES system in the large parameter range is analyzed. Secondly, an improved parallelized multi-degrees-of-freedom cell mapping (PMDCM) method is proposed to study the coexistent attractors and their basins under typical parameters. Finally, the attractor transitions with different amplitudes are realized by means of migration control. The simulation results show that the NES system in several typical parameter range presents multi-stable coexistent attractors phenomenon, the PMDCM method has higher efficiency and precision, and the NES system can be migrated from large amplitude attractors to small amplitude attractors by using open-plus-nonlinear-closed-loop (OPNCL), reducing vibration and noise.

**Key words** nonlinear energy sink (NES); attractor coexistence; parallelized multi-degrees-of-freedom cell mapping (PMDCM); open-plus-nonlinear-closed-loop (OPNCL); migration control

收稿日期: 2021-09-07

基金项目: 国家自然科学基金(51509253, 51679245, 51579242); 湖北省自然科学基金(2020CFB148)

作者简介: 柴凯(1989—), 男, 湖南益阳人, 讲师, 研究方向为舰船动力装置振动噪声控制。E-mail: chaikai0805@163.com

**引用格式:** 柴凯, 楼京俊, 李爽, 等. 非线性能量阱系统吸引子迁移控制[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2022, 23(2): 19-25. CHAI Kai, LOU Jingjun, LI Shuang, et al. A Study of Attractor Migration Control for Nonlinear Energy Sink System[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2022, 23(2): 19-25.

潜艇机械设备周期性运转导致其水下辐射噪声中存在较强低频线谱成分,其所携带的频率信息是潜艇水声隐身性能和战技术性能的主要危害<sup>[1]</sup>。线性动力吸振器由于吸振频率固定且工作带宽极窄,当激励特性或工况变化时难以发挥理想的吸振效果。非线性能量阱是一种本质非线性刚度吸振器,具有吸振效率高、工作频带宽和附加质量小等优点,若将非线性能量阱应用于潜艇机械设备低频线谱控制,对于提升其声隐身性能具有重要意义<sup>[2]</sup>。

然而,非线性能量阱系统在某些频率区间具有多个吸引子,而吸引子共存是非线性能量阱系统产生大幅值孤枝响应的内在原因。Gendelman等<sup>[3]</sup>首次揭示了该现象,指出在偏离中心频率的区域,非线性能量阱系统易出现孤枝响应与主共振响应共存,且这些共存吸引子拓扑性质可以是周期、准周期甚至是混沌的。对于干扰源众多的潜艇机械设备振动系统而言,初始条件具有很大的不确定性,意味着系统极有可能从小振幅运动状态跃迁至大振幅运动状态,从而放大机械设备振动幅值,导致非线性能量阱吸振效率降低。因此孤枝响应或多吸引子共存不利于吸振系统设计,为了消除或抑制孤枝响应,Paker等<sup>[4]</sup>设计了一种半主动控制型可变长度单摆结构调谐质量阻尼器,Liu等<sup>[5]</sup>通过调整三弹簧型非线性能量阱初始安装角调节系统参数,Zang等<sup>[6]</sup>通过改变杠杆型非线性能量阱结构支点位置调整系统参数。但上述方法均是在原系统基础上引入附加子系统或调节机构,导致系统结构较为复杂,难以在潜艇狭小空间内使用。

与上述学者思路不同,本文依据不同吸引子及其所属吸引域之间的确定性关系,通过引入一定的迁移控制算法<sup>[7]</sup>,当机械设备响应处于大幅值吸引子时快速准确迁移至小幅值吸引子,而原本处于小幅值吸引子时则尽量保持,从而提升非线性能量阱工作稳定性与工程应用价值。

## 1 全局性态研究

### 1.1 动力学建模

如图1所示,建立垂向振动机械设备耦合非线性能量阱的一般吸振系统动力学模型。

图中,主系统由 $m_1$ 、 $k_1$ 、 $\lambda_1$ 组成,其中 $m_1$ 为待减振设备,通过线性弹簧 $k_1$ 、阻尼 $\lambda_1$ 与刚性基座连接;未接地非线性能量阱安装于机械设备上层并与机械设备耦合连接,其组成元素包括质量 $m_2$ 、刚度 $k_2$ 和阻尼 $\lambda_2$ 。 $f_b = F \cos(\Omega T)$ 为外界激励力,机械设备与非线性能量阱产生的垂向位移分别为 $x_1$ 、 $x_2$ 。非

线性能量阱满足立方刚度特性,故其恢复力为 $f_{NES} = k_2(x_2 - x_1)^3$ 。对应的系统运动学方程为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \lambda_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + \lambda_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \\ k_2 (x_1 - x_2)^3 = F \cos \Omega T \\ m_2 \ddot{x}_2 + \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

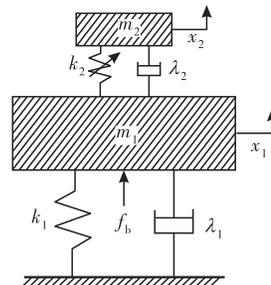


图1 非线性能量阱系统的动力学模型

引入长度量纲 $l_0 = m_1 g / k_1$ , $l_0$ 对应线性弹簧 $k_1$ 在质量 $m_1$ 作用下的静态形变量,并作无量纲变换:

$$t = \Omega_1 T, \Omega_1 = \sqrt{k_1 / m_1}, z_1 = x_1 / l_0, z_2 = x_2 / l_0$$

可得系统无量纲运动学方程:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -z_1 - \beta (z_1 - z_2)^3 - \xi_1 y_1 - \\ \xi_2 (y_1 - y_2) + f \cos \omega t \\ \dot{z}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\beta (z_2 - z_1)^3 / \epsilon - \xi_2 (y_2 - y_1) / \epsilon \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\epsilon = \frac{m_2}{m_1}$ , $\xi_1 = \frac{\lambda_1}{m_1 \Omega_1}$ , $\xi_2 = \frac{\lambda_2}{m_1 \Omega_1}$ , $\omega = \frac{\Omega}{\Omega_1}$ , $f = \frac{F}{l_0 k_1}$ , $\beta = \frac{k_2 l_0^2}{k_1}$ 。

### 1.2 全局性态分析

固定系统参数 $\xi_1 = 0.1$ , $\xi_2 = 0.01$ , $\beta = 0.3$ , $\epsilon = 0.6$ , $\omega = 1.6$ ,选取控制参数 $0 \leq f \leq 30$ ,步长 $\Delta f = 0.01$ ,设置数值积分时长为1000个周期,步长为0.01个周期,一个周期时长为 $2\pi/\omega$ ,并以每组参数下系统稳定后500个周期内的数据点构造Poincaré映射点集。采用简单分岔跟踪延拓算法分析初始条件对数值积分的影响,即固定首次积分初始条件为 $(0,0,0,0)$ ,将每个 $f_k$ 下系统状态向量积分终值作为下一个参数点 $f_{k+1} = f_k + \Delta f$ 的积分初值,分别进行向前延拓与向后延拓逐点计算<sup>[8]</sup>。

图2为机械设备响应随激励力幅值变化的全局性态图,图3为对应的最大Lyapunov指数图谱。

由图可知,无论是向前延拓或向后延拓,激励力幅值在大参数范围内变化时系统均呈现非常丰富的动力学特性,周期运动(周期1、周期2、周期3等)、准周期以及混沌运动均存在于系统解枝中。在多个控制参数区域内出现了多稳定吸引子共存现象,具体包括:2个周期1吸引子共存,2个周期2吸引子

共存,2 个周期 3 吸引子共存,1 个周期 3 吸引子与混沌吸引子共存,1 个周期 2 吸引子与混沌吸引子共存。

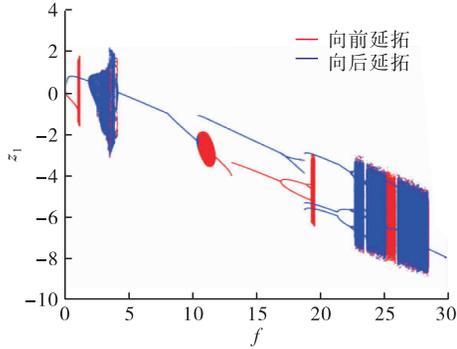


图 2 机械设备响应随激励力幅值变化的全局性态图

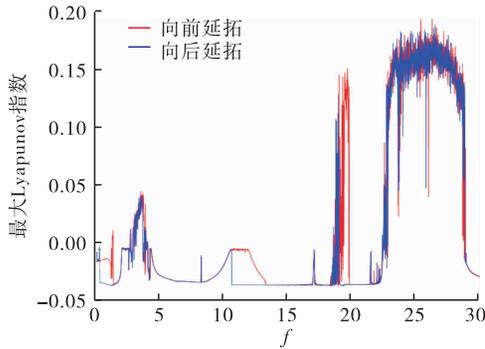


图 3 最大 Lyapunov 指数图谱

多稳定吸引子共存是由于非线性系统多值性本质决定的,每个吸引子有其对应吸引域,吸引域代表汇聚到同一吸引子的所有初始条件集合,而初始条件决定了系统响应的发展过程和最终性态。因此,进一步确定吸引子数目、大小以及对应的吸引域对于刻画系统振动响应完整样貌异常重要。

## 2 共存吸引子

### 2.1 并行多自由度胞映射法

多自由度胞映射法是在简单胞映射基础上引入了分析平面的概念,通过选取相空间中所关心的二维平面来近似展现系统的全局性态,在高维非线性系统中得到了广泛应用<sup>[9]</sup>。本文通过引入并行计算扩展控制方程对多自由度胞映射法进行改进,提出一种并行多自由度胞映射法(parallelized multi-degrees-of-freedom cell mapping, PMDCM)。

考察如下任意  $n$  维非自治动力学系统:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

胞映射法的基本思想是通过引入胞的概念将连续相空间离散化,从而将胞状态用胞化空间内一系列有间隔整数唯一标识。记元胞  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ 。元胞的数值称为胞中心点,在每个维度上引入常数尺度参数  $h_i$ ,则胞中心点坐标为  $c_i = h_i z_i$ ,每一

个元胞边界所包含的原相空间状态向量为:

$$(z_i - 1/2)h_i \leq x_i \leq (z_i + 1/2)h_i \quad (4)$$

若  $h_i$  满足精度,则胞中心点的最终性态代表了落于此胞范围所有状态向量的最终性态。引入二维分析平面概念,对于相空间中所感兴趣的区域  $\Omega'$ ,有:

$$\Omega' = \{x \in R^n \mid x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)},$$

$$i = 1, 2 \wedge x_i = 0, i = 3, 4, \dots, n\} \quad (5)$$

可用二维胞化空间重构,元胞子集  $S$  满足:

$$S = \{z \in Z^n \mid z_i^{(l)} \leq z_i \leq z_i^{(u)},$$

$$i = 1, 2 \wedge z_i = 0, i = 3, 4, \dots, n\} \quad (6)$$

式中:  $z_i^{(l)}$ 、 $z_i^{(u)}$  表示分析平面中胞化空间的上下限。那么子集  $S$  的元胞总数为:

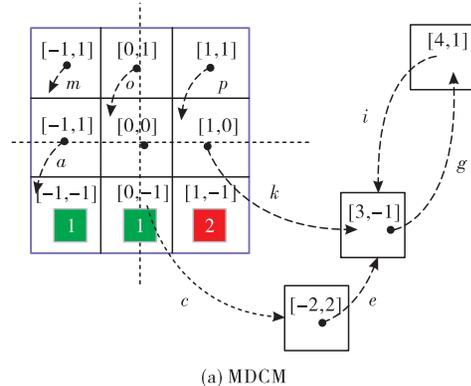
$$M = (1 + z_1^{(u)} - z_1^{(l)}) (1 + z_2^{(u)} - z_2^{(l)}) \quad (7)$$

经过上述过程,从原相空间任意一点出发,沿相轨迹数值积分一段时长后的终点坐标  $x_i^*$  可用胞化空间中离散状态变量  $z_i^*$  替代,从而将欧几里德空间  $R^n$  的点映射关系  $x(k+1) = g(x(k))$  转化为胞化空间  $Z^n$  的胞映射关系  $z(k+1) = \zeta(z(k))$ <sup>[10]</sup>。前者  $x(k)$  为时刻  $t = k\tau$  ( $\tau$  为离散时间)  $n$  维状态向量,  $g$  为 Poincaré 映射函数,  $g: R^n \rightarrow R^n$ ; 而后者  $z(k)$  为  $n$  元整数,  $\zeta$  为胞映射函数,  $\zeta: S \rightarrow S$ ,  $z(n)$  又称为原胞,  $z(n+1)$  称为像胞。

MDCM 法在具体实施过程中,将子集  $S$  中的原胞分为原始胞、正在处理胞、已处理胞和再次被处理的已处理胞 4 类,其实质是从所选分析平面中某一胞中心点出发,在胞化空间中不断向前映射直至映射轨迹再次经过已处理胞时映射过程终止,并依次从新的胞中心点重新开始映射,直至所有元胞计算完毕。每条完整映射序列可记为:

$$z \rightarrow \zeta(z) \rightarrow \zeta^2(z) \rightarrow \dots \rightarrow \zeta^m(z) \quad (8)$$

式中:  $m$  为映射步数。通过逐一分析每条映射序列的演化过程,获取每个元胞的周期信息,最终可得到整个胞化空间的全部吸引子和对应吸引域。PMDCM 法则是将 MDCM 法的胞映射过程和胞处理过程进行改进,现以二维分析平面中  $3 \times 3$  大小的子集  $S$  为例,通过示意图来直观描述两种计算方法的区别,如图 4 所示。



(a) MDCM

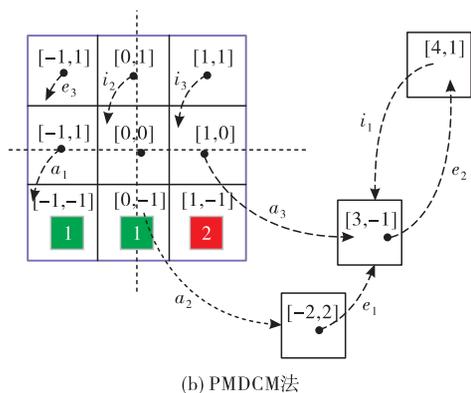


图4 MDCM法与PMDCM法计算过程示意图

在图4中,PMDCM法并行计算数 $N_s=3$ ,元胞 $[-1,-1]$ 、 $[0,-1]$ 、 $[1,-1]$ 为已处理胞,分别对应周期数组 $g_1$ 、 $g_2$ 和 $g_3$ ,虚线表示剩余未处理胞映射过程并用相应字母标识,相同字母不同下标代表同时进行的映射步骤,如 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 等,而图中省略的字母如 $b$ 、 $d$ 等则代表元胞扫描判定过程。由图可知,两种方法计算过程存在两点明显区别:

一是在MDCM法中,每次只能处理一个元胞并向前持续映射,直至映射轨迹收敛于吸引子时终止,且映射过程与扫描处理过程是交替进行的;而在PMDCM法中,多条映射序列可并行向前映射,一旦当前映射轨迹经过已处理胞时映射过程随即终止,不再向前映射,且映射过程与扫描过程是同时进行的。

二是PMDCM法可能存在两条或两条以上映射轨迹相互交叉的情形,因此需要增加新的胞扫描判定过程,其功能在于将交叉映射序列合并,避免元胞被重复计算。

PMDCM法包括6个关键步骤。

**步骤1** 选定分析平面,建立元胞矩阵。将动力学系统连续相空间离散化为胞化空间,并在选定分析平面内得到元胞矩阵 $Z$ 。

**步骤2** 参数初始化。建立向量矩阵用于标识矩阵 $Z_s$ 中的空行,并将映射序列轨迹长度初始化为 $L_s=0$ ,为后续填充矩阵 $Z_s$ 做准备。

**步骤3** 元胞前处理及填充矩阵 $Z_s$ 。根据行标索引递增顺序依次从元胞矩阵 $Z$ 中筛选尚未处理元胞用于填充 $Z_s$ 矩阵的空行。

**步骤4** 并行数值积分计算。将填充完毕的矩阵 $Z_s$ 并行数值计算得到胞映射的像胞,并重新赋值给矩阵 $Z_s$ 。

**步骤5** 像胞扫描及处理过程。对像胞矩阵 $Z_s$ 进行扫描判定。若像胞为新的未处理胞,将其添加到矩阵 $p$ 中,并形成新的周期序列。

**步骤6** 映射序列后处理。检查映射序列轨迹

长度并识别运动状态,当所有元胞被遍历计算时,则可依据每个元胞的周期号组以及步数号组标识数,得到完整的吸引子以及吸引域信息。

## 2.2 共存吸引子及其吸引域

首先选取 $f=0.68$ ,此时系统响应存在2个稳定周期1吸引子,不同吸引子相轨迹如图5(a)所示,其中 $A_1$ 吸引子振幅大于 $A_2$ 吸引子振幅。若选取分析平面 $-2 \leq z_1 \leq 2$ , $-2 \leq y_1 \leq 2$ ,固定变量 $z_2$ 、 $y_2$ 初始条件均为0,将分析平面划分为 $100 \times 100$ 的离散胞,设置并行计算数 $N_s=100$ ,计算结果如图5(b)所示。图中蓝色“★”为 $A_1$ 吸引子位置,红色区域为对应吸引域,红色“★”为 $A_2$ 吸引子位置,蓝色区域为对应吸引域。由图可知, $A_1$ 吸引子吸引域所占面积为整个分析平面的86.39%,而 $A_2$ 吸引子吸引域只占13.61%。

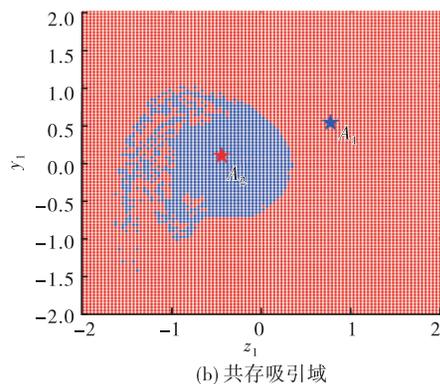
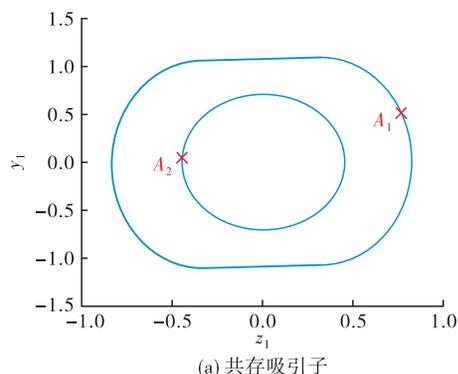
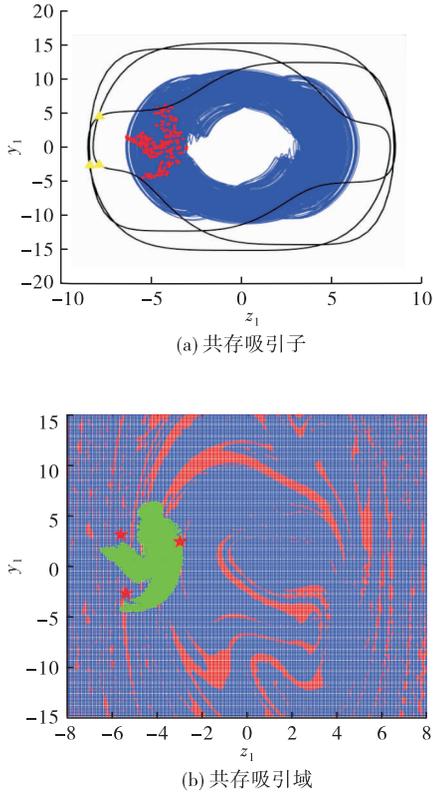


图5  $f=0.68$ 时机械设备响应共存吸引子及吸引域

其次选取 $f=19.5$ ,此时系统响应存在一个稳定的周期3吸引子与一个稳定的混沌吸引子。为增加计算精度,此时将分析平面划分为 $200 \times 200$ 的离散胞,仍设置并行计算数 $N_s=100$ ,若选择分析平面 $-8 \leq z_1 \leq 8$ , $-15 \leq y_1 \leq 15$ ,固定变量 $z_2$ 、 $y_2$ 初始条件均为0。计算结果如图6所示,图6(b)中红色“★”为周期3吸引子位置,绿色区域为混沌吸引子位置,红色与蓝色区域分别对应周期3吸引子与混沌吸引子吸引域。由图可知,系统响应以混沌运动为主,混沌吸引子吸引域所占面积为72.98%,而周期3吸引子吸引域只占27.02%,且2个吸引域交织在一起,全局性态较为复杂。

图 6  $f=19.5$  时机械设备响应共存吸引子及吸引域

### 3 吸引子迁移控制

由前文分析可知,在大参数范围内非线性能量阱系统存在多值性,不同吸引子振幅有所差异,且每个吸引子有其唯一吸引域。若将机械设备振幅最小的运动响应称为“有益的”吸引子,随之而来的问题是当系统受到外界扰动时,如何克服初始条件对系统响应影响,使机械设备持续稳定的工作在有益吸引子上?下面通过迁移控制理论来解决此问题,从而提升非线性能量阱的工作稳定性。

#### 3.1 开环加非线性闭环的迁移控制算法

本节采用开环加非线性闭环(open-plus-non-linear-closed-loop, OPNCL)策略<sup>[11]</sup>来实现不同吸引子之间的迁移控制,将式(2)重写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = F_1(\mathbf{x}, t) = y_1 \\ \dot{y}_1 = F_2(\mathbf{x}, t) = -z_1 - \beta(z_1 - z_2)^3 - \xi_1 y_1 - \xi_2(y_1 - y_2) + f \cos \omega t \\ \dot{z}_2 = F_3(\mathbf{x}, t) = y_2 \\ \dot{y}_2 = F_4(\mathbf{x}, t) = -\beta(z_2 - z_1)^3 / \epsilon - \xi_2(y_2 - y_1) / \epsilon \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ F_2(\mathbf{x}, t) \\ y_2 \\ F_4(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} + S(t) \begin{Bmatrix} \dot{g}_1 - g_2 \\ \dot{g}_2 - F_2(\mathbf{g}, t) \\ \dot{g}_3 - g_4 \\ \dot{g}_4 - F_4(\mathbf{g}, t) \end{Bmatrix} +$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{g}, t)}{\partial \mathbf{g}} - \mathbf{A} \right] \begin{Bmatrix} z_1 - g_1 \\ y_1 - g_2 \\ z_2 - g_3 \\ y_2 - g_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, t) \quad (10)$$

式中:状态向量  $\mathbf{x} = (z_1, y_1, z_2, y_2)^\top$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  为多项式矩阵,目标轨道函数  $\mathbf{g}(t) = (g_1, g_2, g_3, g_4)^\top$ ,误差向量  $\mathbf{e}(t) = (e_1, e_2, e_3, e_4)^\top = (z_1 - g_1, y_1 - g_2, z_2 - g_3, y_2 - g_4)^\top$ ,  $\Delta_1 = g_1 - g_3$ ,  $\Delta_2 = e_1 - e_3$ 。对式(9)施加 OPNCL 控制,可得控制方程(10),其中  $S(t)$  为开关函数,主要用于缓冲控制项所引起的剧烈反应,满足  $S(t) = 0 (t < t_0)$ ,  $S(t) = 1 (t \geq t_0)$ ,  $t_0$  为控制开启时间。

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{g}, t)}{\partial \mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - 3\beta\Delta_1^2 & -\xi_1 - \xi_2 & 3\beta\Delta_1^2 & \xi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\beta\Delta_1^2/\epsilon & \xi_2/\epsilon & -3\beta\Delta_1^2/\epsilon & -\xi_2/\epsilon \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{g}, \mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\beta\Delta_1\Delta_2^2 - \beta\Delta_2^3 \\ 0 \\ 3\beta\Delta_1\Delta_2^2/\epsilon + \beta\Delta_2^3/\epsilon \end{bmatrix} \quad (12)$$

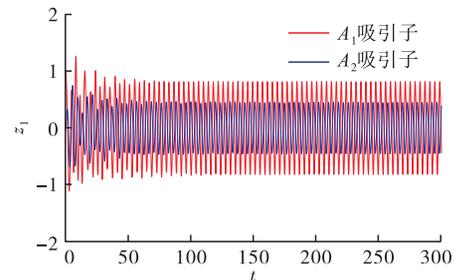
取常数矩阵  $\mathbf{A}$  为具有负实部特征值的对角矩阵:  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44})$ ,  $a_{ii} < 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (13) 可得误差方程  $de_i/dt = a_{ii}e_i$ 。

因此,在非线性能量阱系统中施加 OPNCL 控制后,误差  $\|\mathbf{e}\|$  能很快收敛于 0,且其传输域  $\text{BE}(\mathbf{g})$  是全局的<sup>[12]</sup>。对于任意光滑目标轨道函数,只需要  $\mathbf{g}(t)$  连接不同吸引子的吸引域,迁移控制均能使机械设备响应从大振幅吸引子迁移至小振幅吸引子。

#### 3.2 数值讨论与分析

由 2.2 节分析可知,当  $f=0.68$  时,系统响应存在一个周期 1 运动的大振幅吸引子和一个周期 1 运动的小振幅吸引子。

图 7 为不同吸引子的时间历程图,对应初始条件分别为  $(1, 0, 0, 0)$  (红色曲线)和  $(0, 0, 0, 0)$  (蓝色曲线),其中  $A_1$  吸引子振幅高于  $A_2$  吸引子振幅。

图 7 不同初始条件下机械设备响应时间历程图( $f=0.68$ )

对系统(9)施加 OPNCL 控制,选取矩阵  $\mathbf{A} = \text{diag}(-5, -5, -5, -5)$ ,目标轨道函数  $g_1 = g_3 = 0.25 + 0.5 \sin 0.5t, g_2 = g_4 = 0.5 \cos 0.5t$ 。目标轨道在相空间位置如图 8 所示,图中红色区域为  $A_1$  吸引子吸引域,蓝色区域为  $A_2$  吸引子吸引域,绿色实线代表目标轨道。由图可知,在分析平面内,所选取目标轨道均是连接两个吸引域的一条通道。设置控制开启时间大于 300 s(系统已稳定),当系统响应位于  $A_1$  吸引子吸引域内时,开启控制,对应  $S(t) = 1$ ;当系统响应迁移至目标轨道并运行至  $A_2$  吸引子吸引域内时,则关闭控制,对应  $S(t) = 0$ 。

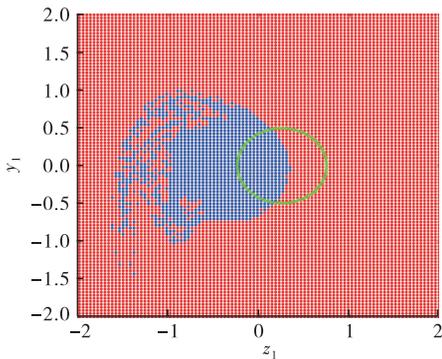


图 8 目标轨道在相空间中的位置( $f=0.68$ )

在迁移控制下,系统响应相轨迹如图 9 所示。图中红色实线代表施加控制前系统运行轨迹,黑色实线代表控制施加过程中的暂态运行轨迹,绿色实线代表系统沿目标轨道的运行轨迹,蓝色实线代表关闭控制后系统运行轨迹,黑色箭头代表控制前后系统运行轨迹随时间变化的方向。

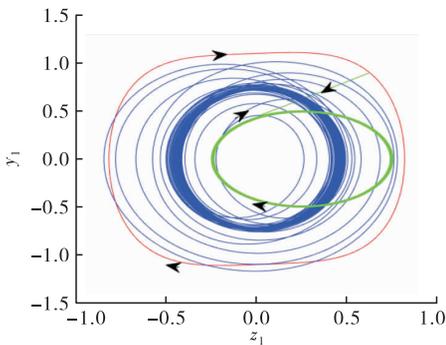


图 9 迁移控制下机械设备响应相轨迹( $f=0.68$ )

图 10 为控制过程中系统响应幅值随时间变化曲线,其中  $t \leq 400$  s 为大幅值振动,  $400 \text{ s} < t \leq 540$  s 为沿目标轨道运行的暂态过程,  $t > 540$  s 为小幅值振动。由图可知,机械设备振动响应经短暂瞬态过程后,能从大幅值运动状态快速迁移至小幅值运动状态,从而降低了机械设备振动幅值。

当  $f = 19.5$  时,可知系统周期 3 吸引子( $A_1$ )与混沌吸引子( $A_2$ )共存。图 11 为不同吸引子的时间历程图,对应初始条件分别为  $(-1.25, 1, 0, 0)$ (红色

曲线)和  $(-1, 1, 0, 0)$ (蓝色曲线),其中  $A_1$  吸引子平均振幅高于  $A_2$  吸引子平均振幅。

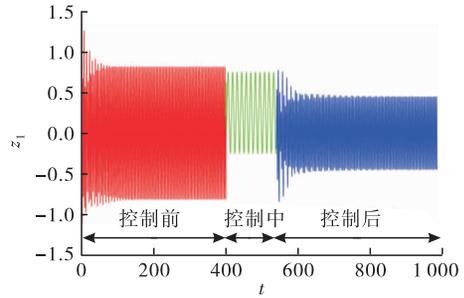


图 10 迁移控制下机械设备响应时间历程图( $f=0.68$ )

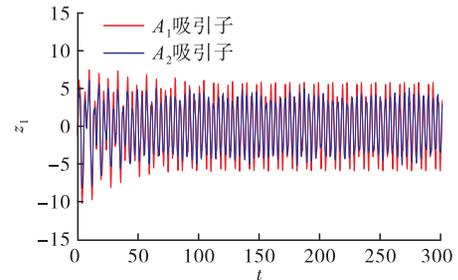


图 11 不同初始条件下机械设备响应时间历程图( $f=19.5$ )

选取矩阵  $\mathbf{A} = \text{diag}(-10, -10, -10, -10)$ ,目标轨道  $g_1 = g_3 = 1.25 \sin 0.5t, g_2 = g_4 = 1.25 \cos 0.5t$ 。图 12 为目标轨道在相空间的位置,红色区域为周期 3 吸引子吸引域,蓝色区域为混沌吸引子吸引域,绿色曲线为目标轨道,在分析平面内目标轨道同样连接了两个不同吸引域。

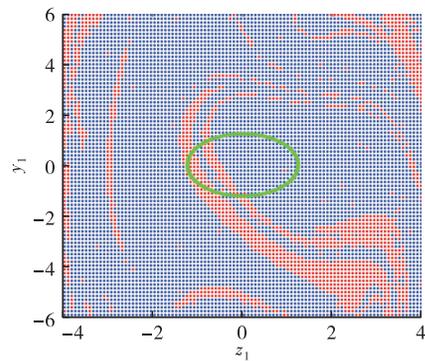


图 12 目标轨道在相空间中的位置( $f=19.5$ )

图 13 和图 14 分别为控制过程中系统响应相轨迹和时间历程图。由图可知,迁移控制方法实现了大幅值周期 3 吸引子至小幅值混沌吸引子的转迁。

图 15 为控制前后机械设备响应的功率谱图。从图中可知,机械设备处于混沌运动状态时,线谱成分明显减少,除特征线谱外,其余频率段呈现连续谱特征,同时控制前后特征线谱强度从 38.44 dB 降低到 30.61 dB。因此,在此参数下 OPNCL 方法不仅能降低线谱强度,还可重构线谱结构,从而实现了降低线谱强度与隐匿线谱特征的双重目的。

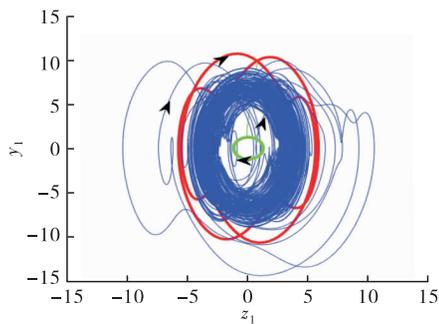
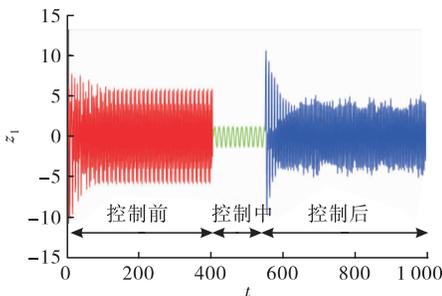
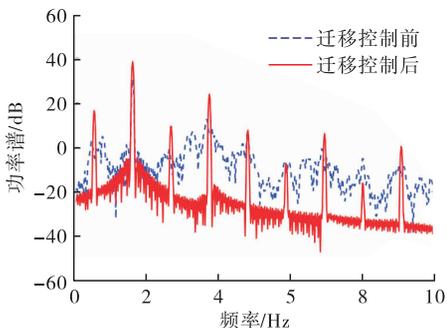
图 13 迁移控制下机械设备响应相轨迹( $f=19.5$ )图 14 迁移控制下机械设备响应时间历程图( $f=19.5$ )

图 15 迁移控制前后机械设备响应功率谱图

## 4 结语

本文分析了大参数范围内激励力幅值对系统全局态的影响;提出了一种改进型的并行多自由度胞映射法,对典型参数下的共存吸引子及吸引域进行了研究;利用迁移控制方法实现了不同振幅吸引子之间的跃迁。主要工作和结论总结如下:

1)非线性能量阱系统在大参数范围内具有丰富的动力学特性,多个典型参数区间内呈现了多稳定吸引子共存现象,不同吸引子振幅有所差异,为吸引子迁移控制提供了先验信息;

2)并行多自由度胞映射法具有同时计算和扫描处理多个元胞的能力,能较好地刻画高维非线性系统中吸引子与吸引域之间的确定性关系,具有更高的计算效率与精度;

3)通过迁移控制方法实现了 2 种不同类型共存吸引子的跃迁,从而能够使系统持续稳定运行在小振幅吸引子上,特别是当系统响应从大振幅周期吸引子迁移至小振幅混沌吸引子时,控制前后机械设备响应特征线谱强度从 38.44 dB 降低到 30.61 dB,线谱数目也显著减少。

## 参考文献:

- [1] 苏强,王桂波,朱鹏飞,等. 国外潜艇声隐身前沿技术发展概述[J]. 舰船科学与技术,2014,36(1):1-9.
- [2] XIONG H, KONG X R. Response Regimes of Narrow-Band Stochastic Excited Linear Oscillator Coupled to Nonlinear Energy Sink[J]. Chinese Journal of Aeronautics,2015,28(2):457-468.
- [3] GENDELMAN O V. Analytic Treatment of a System with a Vibro-Impact Nonlinear Energy Sink[J]. Journal of Sound and Vibration,2012,331(21):4599-4608.
- [4] PAKER E R. High Amplitude Response Behavior of a Linear Oscillator-Nonlinear Absorber System: Identification, Analysis, and Attenuation by Using a Semi-Active Absorber in Series[D]. Houston, Texas; Rice University,2013.
- [5] LIU Y, MOJAHED A, BERGMAN A L, et al. A New Way to Introduce Geometrically Nonlinear Stiffness and Damping with an Application to Vibration Suppression[J]. Nonlinear Dynamics,2019,96:1819-1845.
- [6] ZANG J, YUAN T C, LU Z Q, et al. A Lever-Type Nonlinear Energy Sink[J]. Journal of Sound and Vibration,2018,437:119-134.
- [7] 王杰,田沛,陈陈. 连续多项式混沌系统的全局控制[J]. 控制与决策,2000,15(3):309-313.
- [8] 俞翔,赵建学,柴凯,等. 柔性基础准零刚度隔振系统吸引子迁移控制研究[J]. 船舶力学,2019,23(7):866-872.
- [9] OUEINI S S, CHIN C M, NAYFEH A H. Dynamics of a Cubic Nonlinear Vibration Absorber[J]. Nonlinear Dynamics,1999,20(3):283-295.
- [10] 俞翔,朱石坚,刘树勇. 广义混沌同步中多稳定流形[J]. 物理学报,2008,57(5):2761-2769.
- [11] 柴凯,楼京俊,朱石坚,等. 两自由度非线性隔振系统的吸引子迁移控制[J]. 振动与冲击,2018,37(22):10-16.
- [12] 赵建学,俞翔,柴凯,等. 准零刚度隔振系统吸引子迁移控制研究[J]. 振动与冲击,2018,37(22):220-224.

(编辑:徐敏)