

# 柱面共形阵列 DOA 与极化参数高效联合估计算法

齐子森<sup>1</sup>, 彭大林<sup>1,2</sup>, 许 华<sup>1</sup>, 宋佰霖<sup>1</sup>

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 西安, 710077; 2. 95865 部队, 北京, 102200)

**摘要** 针对共形阵列天线信源方位与极化状态联合估计算法计算量大的问题,给出了一种基于多级维纳滤波器前向递推的柱面共形阵列天线信源方位与极化参数高效联合估计算法。新算法推导了柱面共形阵列天线多级维纳滤波器的前向递推。算法以某一期望信号的训练信号为已知条件,通过多级维纳滤波器的前向递推,来实现信号子空间和噪声子空间的快速估计,避免了协方差矩阵估计与特征值分解,大大减少了已有联合估计算法的运算量,使计算量由原来的  $O(N^3 + N^2L)$  降低到  $O(N^2L)$ 。仿真实验表明:算法在降低算法复杂度的同时,可保证算法的估计精度,在信噪比大于 10 dB 时,与已有算法具有近似相同的估计精度,证明了算法的有效性。

**关键词** 柱面共形阵列天线; 联合估计; DOA; 快速子空间估计

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2021.03.009

**中图分类号** TN911.7 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2021)03-0055-07

## A DOA and Polarization Parameters Efficient Estimation Algorithm of Cylindrical Conformal Array Antenna

QI Zisen<sup>1</sup>, PENG Dalin<sup>1,2</sup>, XU Hua<sup>1</sup>, SONG Bailin<sup>1</sup>

(1. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;  
2. Unit 95865, Beijing 102200, China)

**Abstract** Aimed at the problem that computation measure is comparatively heavy by the joint estimation algorithm of information source azimuth and polarization state of conformal array antenna, a forward recursion method of multi-stage wiener filter for cylindrical conformal array antenna is derived, and an efficient joint estimation algorithm of information source azimuth and polarization parameters based on fast subspace estimation is presented. Taking the signal of a desired signal as known conditions, this algorithm realizes the signal subspace and noise subspace quick estimate through multistage wiener filter forward recursive, avoiding the covariance matrix estimation and eigenvalue decomposition, greatly reducing the computational cost for joint estimation algorithm, and reducing amount of calculation from the original  $O(N^3 + N^2L)$  to  $O(N^2L)$ . The computer Monte Carlo simulation experiment shows that the algorithm can guarantee the estimation accuracy and simultaneously reduce the complexity of the algorithm. When the SNR is greater than 10 dB, the algorithm has approximately the same estimation accuracy compared with the existing algorithm. And the algorithm is valid.

**收稿日期:** 2020-10-21

**基金项目:** 国家自然科学基金(61601500)。

**作者简介:** 齐子森(1982—),男,河北保定人,讲师,博士,研究方向:通信信号处理、阵列信号处理、多维信号处理。E-mail:qizisen@163.com

**引用格式:** 齐子森,彭大林,许华,等.柱面共形阵列 DOA 与极化参数高效联合估计算法[J].空军工程大学学报(自然科学版),2021,22(3):55-61. QI Zisen, PENG Dalin, XU Hua, et al. A DOA and Polarization Parameters Efficient Estimation Algorithm of Cylindrical Conformal Array Antenna[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2021, 22(3): 55-61.

**Key words** cylindrical conformal array antenna; joint estimate; direction-of-arrival; fast subspace estimation

信源方位与极化参数的耦合使得绝大多数高效DOA算法无法应用到共形阵列测向领域,成为了制约共形阵列天线测向算法发展的一个难题。传统的基于协方差矩阵估计和特征值分解实现噪声子空间估计的共形阵列测向算法普遍具有计算量大、适用性差的问题<sup>[1-4]</sup>。已有的共形阵列信源方位与极化参数的联合估计算法对噪声子空间的分析处理不够系统深入<sup>[5-7]</sup>。文献[8]通过对阵元局部坐标系进行3次欧拉旋转变换,实现了共形阵列天线的单元方向图指向的统一,给出了共形阵列天线阵列流形建模的方法。在此基础上,文献[9]通过信源方位与极化参数的去耦合降低了算法的复杂度,实现了信源方位与极化参数的联合估计,具有普适性好,计算量较小的特点。但是,由于噪声子空间依然是由传统特征值分解的方法获得,所以计算量依然很大。

文中借鉴经典线阵、面阵的高效子空间估计思想<sup>[10-14]</sup>,给出了一种基于快速子空间估计的柱面共形阵列天线信源方位与极化参数高效联合估计算法。

## 1 柱面共形阵列天线的数据模型

对于安装有  $N$  个阵元的柱面共形阵列天线(见图1),在远场中有  $M$  个窄带独立的点源以平面波入射,加上噪声扰动后,阵列接收到的快拍数据可表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\theta, \varphi) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{X}$  为  $N \times 1$  快拍数据矢量;  $\mathbf{S}$  为  $M \times 1$  入射信号复幅度矢量;  $\mathbf{N}$  为阵列噪声矢量;  $\mathbf{A}(\theta, \varphi)$  为  $N \times M$  阵列的流形矩阵:

$$\mathbf{A}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_M, \varphi_M)] \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i)$  为第  $i$  个信源的导向矢量,表示为:

$$\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i) = [r_1(\theta_1, \varphi_1) \exp(-jk_0 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_i), r_2(\theta_2, \varphi_2) \exp(-jk_0 \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{v}_i), \dots, r_N(\theta_N, \varphi_N) \exp(-jk_0 \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v}_i)]^T \quad (3)$$

$$r_i = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{p}_i = g_{\theta} \cdot k_{\theta} + g_{\varphi} \cdot k_{\varphi} \quad (4)$$

$$\mathbf{g}_i = g_{\theta}(\theta, \varphi) \mathbf{u}_{\theta} + g_{\varphi}(\theta, \varphi) \mathbf{u}_{\varphi} \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_i = k_{\theta} \mathbf{u}_{\theta} + k_{\varphi} \mathbf{u}_{\varphi} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \sin \theta \mathbf{u}_z \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_{\varphi} = \sin \varphi \mathbf{u}_x + \cos \varphi \mathbf{u}_y \quad (8)$$

式中:  $r_i$  为第  $i$  个阵元对单位强度入射信号的响应;  $\mathbf{g}_i$  为阵元的单元方向图;  $\mathbf{p}_i$  为来波信号的极化方

式;  $\mathbf{p}_i$  表示第  $i$  个阵元在全局坐标系下的位置矢量,  $\mathbf{v}_i$  表示第  $i$  个信源在全局坐标系下的方位矢量,  $k_0$  表示  $2\pi/\lambda_0$ 。

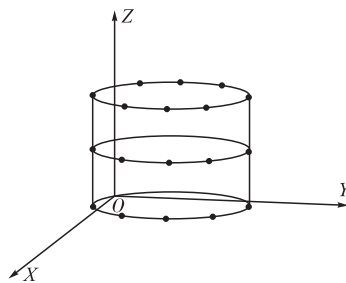


图1 柱面共形阵列天线

但是,通常阵元方向图的定义和设计都是以本地局部坐标系为参考的,在传统的一维或二维阵列导向矢量建模中,由于没有载体曲率的影响,通常认为组成阵列天线的各阵元的局部坐标系相互平行一致,具有相同的方向图,并且认为交叉极化效应是可以忽略的。但对于柱面共形阵列天线而言,圆柱载体的曲率会导致分布在圆柱柱面的阵元的局部坐标系出现差异,进而造成关于各阵元单位方向图法线指向混乱不一。因此,在柱面共形阵列天线导向矢量建模中就需要将各个以局部坐标系为参考的阵元单位方向图转化为各个以全局坐标系为参考的阵元单位方向图,即  $\mathbf{g}_i(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}) \Rightarrow \mathbf{g}_i(\theta, \varphi)$ 。

定义如下坐标系:阵列全局直角坐标系  $[X, Y, Z]$ , 阵列全局极坐标系  $[r, \theta, \varphi]$ , 阵元局部直角坐标系  $[\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}]$ , 阵元局部极坐标系  $[\tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}]$ 。以阵元所在的载体切平面为  $\tilde{X}-\tilde{Y}$  平面,切平面的法线为  $\tilde{Z}$  轴建立阵元的局部坐标系,见图2。

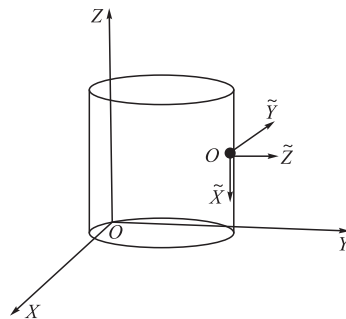


图2 全局直角坐标系与局部直角坐标系

为了实现阵元单元方向图的坐标系旋转变换,我们需要完成以下2个部分:

1) 极坐标系变换:  $(\theta, \varphi) \Rightarrow (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$

2) 方向图正交极化分量变换阵列:

$$[\tilde{\mathbf{u}}_{\theta}, \tilde{\mathbf{u}}_{\varphi}] [\mathbf{u}_{\theta}, \mathbf{u}_{\varphi}]$$

全局直角坐标系与阵元局部直角坐标系的旋转关系可以通过3次欧拉旋转变换得到,相应的欧拉旋转矩阵可以表示为<sup>[8]</sup>:

$$\mathbf{R}(D, E, F) = \mathbf{E}(X'', F) \mathbf{E}(Y', E) \mathbf{E}(Z, D) = \begin{bmatrix} \cos F & \sin F & 0 \\ -\sin F & \cos F & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos E & 0 & \sin E \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin E & 0 & \cos E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos D & \sin D \\ 0 & -\sin D & \cos D \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{E}(Z, D)$ 表示第1次旋转以Z轴为旋转轴,逆时针旋转角度D的欧拉旋转矩阵; $\mathbf{E}(Y', E)$ 表示第2次旋转以Y'轴为旋转轴,逆时针旋转角度E的欧拉旋转矩阵; $\mathbf{E}(X'', F)$ 表示第3次旋转以X''轴为旋转轴,逆时针旋转角度F的欧拉旋转矩阵。通过合理选择3次欧拉旋转的旋转角度(D, E, F), $\mathbf{E}(Z, D)$ , $\mathbf{E}(Y', E)$ 和 $\mathbf{E}(X'', F)$ 可以将阵元的全局直角坐标系旋转变换为阵元的局部直角坐标系。这种旋转变换适用于任何几何结构的共形阵列的阵元的坐标系变换,不同的几何结构的共形阵列在进行欧拉旋转变换时对应的欧拉旋转角度不同。

对于图3的柱面共形阵列天线,阵元对应的欧拉旋转角度为:

$$\begin{cases} D_{mm} = \pi/2 - \theta_0 + 2\theta_0(m-1)/(M-1) \\ E_{mm} = -\pi/2 \\ F_{mm} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

式中: $n$ 为由下至上的圆阵的序号; $m$ 为每层圆环阵中逆时针方向阵元序号; $N$ 为圆阵的总层数; $M$ 为每层圆阵中阵元的总数。

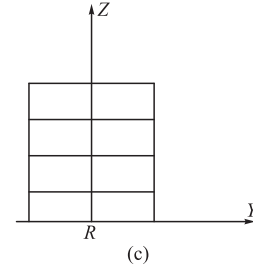
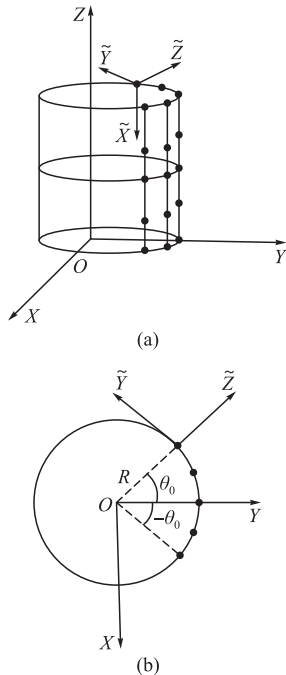


图3 柱面共形阵列阵元分布

利用式(10)得到的各阵元的欧拉旋转角度,可以实现柱面共形阵列阵元全局直角坐标系与局部直角坐标系的变换:

$$[\tilde{x}_{mm}, \tilde{y}_{mm}, \tilde{z}_{mm}]^T = \mathbf{R}(D_{mm}, E_{mm}, F_{mm}) [x_{mm}, y_{mm}, z_{mm}]^T \quad (11)$$

在全局极坐标系内 $(\theta, \varphi)$ 处的阵元的直角坐标可以表示为:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (12)$$

将式(10)、(12)代入式(11)可以实现阵元全局极坐标系到局部直角坐标系的变换:

$$[\tilde{x}_{mm}, \tilde{y}_{mm}, \tilde{z}_{mm}]^T = \mathbf{R}(D_{mm}, E_{mm}, F_{mm}) [\sin \theta_{mm} \cos \varphi_{mm}, \sin \theta_{mm} \sin \varphi_{mm}, \cos \theta_{mm}]^T \quad (13)$$

利用直角坐标系与极坐标系的变换关系,由旋转所得到的阵元的局部直角坐标得到文中所需要的局部极坐标系中的方位:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{mm} = \arccos(\tilde{z}_{mm}) \\ \tilde{\varphi}_{mm} = \arctan(\tilde{y}_{mm}/\tilde{x}_{mm}) \end{cases} \quad (14)$$

下面可以利用欧拉旋转变换的逆变换和正交单位矢量组 $[\tilde{\mathbf{u}}_{\theta} \tilde{\mathbf{u}}_{\varphi}]$ 与 $[\tilde{\mathbf{u}}_x \tilde{\mathbf{u}}_y \tilde{\mathbf{u}}_z]$ 之间的变换关系式(10)~(11)来实现局部极坐标系下的极化分量到全局极坐标系下极化分量的变换。相应的坐标系变换顺序为:

$$[\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}] \Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}] \Rightarrow [X, Y, Z] \Rightarrow [\theta, \varphi] \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{mm}(\tilde{\theta}_{mm}, \tilde{\varphi}_{mm}) &= \mathbf{g}_{mm\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_{mm}, \tilde{\varphi}_{mm}) \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_{mm}, \tilde{\varphi}_{mm}) + \\ &\mathbf{g}_{mm\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_{mm}, \tilde{\varphi}_{mm}) \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_{mm}, \tilde{\varphi}_{mm}) = \mathbf{g}_{mm\tilde{X}} \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{X}} + \mathbf{g}_{mm\tilde{Y}} \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{Y}} + \\ &\mathbf{g}_{mm\tilde{Z}} \tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{Z}} = \mathbf{g}_{mmX} \mathbf{u}_X + \mathbf{g}_{mmY} \mathbf{u}_Y + \mathbf{g}_{mmZ} \mathbf{u}_Z = \\ &\mathbf{g}_{mm\theta}(\theta, \varphi) \mathbf{u}_{\theta}(\theta, \varphi) + \mathbf{g}_{mm\varphi}(\theta, \varphi) \mathbf{u}_{\varphi}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (16)$$

通过式(15)和式(16)的变换,实现了阵元极化方向图由局部极坐标系到全局极坐标系的变换,通过这种变换,便可以建立起具有统一单元方向图指向柱面共形阵列的数学模型,为实现柱面共形阵列对信源方位与极化参数的联合估计奠定基础。

其中:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{m\tilde{X}} &= \mathbf{g}_{m\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_m, \tilde{\varphi}_m) \cos \tilde{\theta}_m \cos \tilde{\varphi}_m - \\
\mathbf{g}_{m\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_m, \tilde{\varphi}_m) \sin \tilde{\varphi}_m \mathbf{g}_{m\tilde{Y}} &= \\
\mathbf{g}_{m\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_m, \tilde{\varphi}_m) \cos \tilde{\theta}_m \sin \tilde{\varphi}_m + \\
\mathbf{g}_{m\tilde{\varphi}}(\tilde{\theta}_m, \tilde{\varphi}_m) \cos \tilde{\varphi}_m \mathbf{g}_{m\tilde{Z}} &= \\
-\mathbf{g}_{m\tilde{\theta}}(\tilde{\theta}_m, \tilde{\varphi}_m) \sin \tilde{\theta}_m [\mathbf{g}_{mX}, \mathbf{g}_{mY}, \mathbf{g}_{mZ}]^T &= \\
\mathbf{R}^{-1}(D_m, E_m, F_m) \cdot [\mathbf{g}_{m\tilde{X}}, \mathbf{g}_{m\tilde{Y}}, \mathbf{g}_{m\tilde{Z}}]^T &= \\
\mathbf{g}_{m\theta}(\theta, \varphi) = (\mathbf{g}_{mX} \cos \varphi + \mathbf{g}_{mY} \sin \varphi) / & \\
\cos \theta \mathbf{g}_{m\varphi}(\theta, \varphi) = -\mathbf{g}_{mX} \sin \varphi + \mathbf{g}_{mY} \cos \varphi & \quad (17)
\end{aligned}$$

将式(4)代入式(3)得:

$$a(\theta, \varphi) = [a_\theta(\theta, \varphi), a_\varphi(\theta, \varphi)] \begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\varphi \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$a_\theta(\theta, \varphi) = [\mathbf{g}_{1\theta} \exp(-jk_0 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}), \dots, \mathbf{g}_{n\theta} \exp(-jk_0 \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v})]^T \quad (19)$$

$$a_\varphi(\theta, \varphi) = [\mathbf{g}_{1\varphi} \exp(-jk_0 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}), \dots, \mathbf{g}_{m\varphi} \exp(-jk_0 \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{v})]^T \quad (20)$$

忽略绝对相位信息,极化参数可表示为:

$$\begin{bmatrix} k_\theta \\ k_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k e^{-j\delta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中: $k$ 为任意实数; $e^{-j\delta}$  ( $0 < \delta \leq 2\pi$ )为相位差。因此噪声扰动后的快拍数据也可以表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} = (\mathbf{A}_\theta \mathbf{K}_\theta + \mathbf{A}_\varphi \mathbf{K}_\varphi) \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (22)$$

$$\mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_m]^T \quad (23)$$

$$\mathbf{N} = [n_1, n_2, \dots, n_m]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_\theta = [a_\theta(\theta_1, \varphi_1), a_\theta(\theta_2, \varphi_2), \dots, a_\theta(\theta_m, \varphi_m)] \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_\varphi = [a_\varphi(\theta_1, \varphi_1), a_\varphi(\theta_2, \varphi_2), \dots, a_\varphi(\theta_m, \varphi_m)] \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_\theta = \mathbf{I}_{m \times m} \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_\varphi = \text{diag}(k_1 e^{-j\delta_1}, k_2 e^{-j\delta_2}, \dots, k_m e^{-j\delta_m}) \quad (28)$$

式(22)~(28)中: $\mathbf{A}$ 表示流形矩阵; $\mathbf{S}$ 是信号矢量; $\mathbf{N}$ 为加性高斯白噪声; $\theta_i, \varphi_i$ 分别表示第*i*个人射信号的俯仰角与方位角。

## 2 柱面共形阵列天线信源方位与极化状态的高效联合估计算法

### 2.1 基于特征值分解的联合估计算法

柱面共形阵列输出数据的协方差矩阵:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (29)$$

对协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 进行特征值分解:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Sigma}_N \mathbf{U}_N^H \quad (30)$$

式中: $\mathbf{U}_S$ 和 $\mathbf{U}_N$ 分别由*M*个大特征值和*N-M*个小特征值对应的特征矢量构成; $\mathbf{\Sigma}_S$ 和 $\mathbf{\Sigma}_N$ 分别为*M*个大特征值和*N-M*个小特征值构成的对角阵。

当快拍数*L*有限时, $\mathbf{R}$ 的统计一致估计为:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H / L = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Sigma}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H + \hat{\mathbf{U}}_N^H \quad (31)$$

根据子空间原理有:

$$\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i, k_i, \boldsymbol{\delta}_i^H) \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H \mathbf{a}(\theta_i, \phi_i, k_i, \boldsymbol{\delta}_i^H) = 0 \quad (32)$$

将式(18)和(21)代入式(32)得<sup>[9]</sup>:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ k_i e^{j\delta} \end{bmatrix}^H \mathbf{Q}(\theta_i, \phi_i) \begin{bmatrix} 1 \\ k_i e^{j\delta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}(\theta_i, \phi_i) = [a_\theta(\theta_i, \varphi_i), a_\varphi(\theta_i, \varphi_i)]^H \hat{\mathbf{U}}_N$$

$$\mathbf{N}_N^H [a_\theta(\theta_i, \varphi_i), a_\varphi(\theta_i, \varphi_i)] \quad (34)$$

由秩损理论,当且仅当 $\theta, \phi$ 取信源的真实方位时矩阵 $\mathbf{Q}$ 秩损,因此

$$[\hat{\theta}, \hat{\phi}] = \arg \max \frac{1}{\text{dot}[\mathbf{Q}]} \quad (35)$$

$$u_{\min} = u_{\min}[\mathbf{Q}] \quad (36)$$

进一步解得:

$$\hat{k} = \text{abs}[u_{\min}(2, 2) / u_{\min}(2, 1)] \quad (37)$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \delta[u_{\min}(1, 2) / u_{\min}(1, 1)] \quad (38)$$

式中: $u_{\min}[\cdot]$ 为求矩阵最小特征值对应特征向量的算子。

### 2.2 柱面共形阵列天线的快速子空间估计

对柱面共形阵列接收数据的协方差矩阵进行特征值分解:

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{V}_S \mathbf{\Lambda}_S \mathbf{V}_S^H + \sigma_n^2 \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \quad (39)$$

其中特征值 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_N = \sigma_n^2$ ,

$$\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_M], \mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{v}_{M+2}, \dots, \mathbf{v}_N]$$

$\mathbf{V}_S$ 的列数等于信源协方差 $\mathbf{R}_S$ 的秩*M*,从而张成 $\mathbf{A}(\theta, \phi)$ 的*M*维子空间,这里*M*表示信源数,由式(29)和式(39)得:

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{A}\mathbf{Q} \quad (40)$$

式中: $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_S \mathbf{A}^H \mathbf{V}_S (\mathbf{\Lambda}_S - \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \in \mathbf{C}^{M \times M}$ 是满秩矩阵。

多级维纳滤波器的每一级匹配滤波器均是前一级期望信号与观测信号的互相关函数的归一化变量,即:

$$\mathbf{h}_i = \frac{E[X_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^T]}{\|E[E_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^T]\|_2} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (41)$$

且相互正交,所以级数为*N*的MSWF相当于维纳-霍夫方程在Krylov子空间即:

$$K^{(M)}(R_{x_0}, r_{x_0 d_0}) = \text{span}\{r_{x_0 d_0}, R_{x_0} r_{x_0 d_0}, \dots, R_{x_0}^{M-1} r_{x_0 d_0}\} \text{的解,并有如下结论:}$$

$$\text{span}\{h_1, h_2, \dots, h_M\} =$$

$$\text{span}\{r_{x_0 d_0}, R_{x_0} r_{x_0 d_0}, \dots, R_{x_0}^{M-1} r_{x_0 d_0}\} \quad (42)$$

所以存在一个满秩矩阵 $\mathbf{K} \in \mathbf{C}^{M \times M}$ ,使得:

$$[h_1, h_2, \dots, h_M] =$$

$$[r_{x_0 d_0}, R_{x_0} r_{x_0 d_0}, \dots, R_{x_0}^{M-1} r_{x_0 d_0}] \quad (43)$$

$$\mathbf{R}_{x_0}^i = \mathbf{V}_S \mathbf{A}_S^i \mathbf{V}_S^H + \boldsymbol{\sigma}_n^{2i} \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \quad (44)$$

$$i=0, 1, \dots, M-1$$

由多级维纳滤波器可知,  $r_{x_0 d_0}$  落在信号子空间中, 所以  $\mathbf{V}_n^H r_{x_0 d_0} = 0$ , 且  $\mathbf{V}_S \mathbf{V}_S^H + \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H = \mathbf{I}_N$ , 将式(44)、式(40)代入式(43)得:

$$\mathbf{T}_S = [\mathbf{V}_S \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \mathbf{V}_S \mathbf{A}_S \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{V}_S \mathbf{A}_S^{M-1} \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}] \mathbf{K} =$$

$$\mathbf{V}_S [\mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \mathbf{A}_S \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{A}_S^{M-1} \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}] \mathbf{K} =$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} [\mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \mathbf{A}_S \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{A}_S^{M-1} \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}] \mathbf{K} =$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{H} \quad (45)$$

其中:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \mathbf{A}_S \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}, \dots, \mathbf{A}_S^{M-1} \mathbf{V}_S^H r_{x_0 d_0}] \in \mathbf{C}^{M \times M} \quad (46)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{K} \in \mathbf{C}^{M \times M} \quad (47)$$

因为  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{K}$  均是非奇异矩阵, 所以  $\mathbf{H}$  也是非奇异矩阵。由式(45)可得:

$$\text{span}\{h_1, h_2, \dots, h_M\} \triangleq \Phi_S^1 \quad (48)$$

$$\text{span}\{h_{M+1}, h_{M+2}, \dots, h_N\} \triangleq \Phi_N^{N-M} \quad (49)$$

即  $\mathbf{T}_S$  与信号子空间等价,  $\mathbf{T}_n$  与噪声子空间等价。

### 2.3 基于多级维纳滤波器的联合估计算法

为了降低常规子空间估计的计算复杂度, 最有效的方法就是避开协方差估计和特征值分解。事实上, 当给定某一信号的波形, 由多级维纳滤波器的前向分解就可以实现信号子空间和噪声子空间的快速估计<sup>[15]</sup>。

基于多级维纳滤波器构建噪声子空间的算法如下:

**步骤 1** 初始化:  $d_0 = \sum_{i=1}^M S_i, x_0 = X$ 。

**步骤 2** 前向递推:

For  $i=1, 2, \dots, N$

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{E}[x_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^T / \|\mathbf{E}[x_{i-1} \mathbf{d}_{i-1}^T]\|_2]$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{h}_i^H x_{i-1}$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{h}_i \mathbf{d}_i \quad (50)$$

式中:  $\mathbf{d}_i$  是各级期望信号;  $\mathbf{x}_i$  是各级观测信号。

信号子空间和噪声子空间由各级滤波器组成:

$$\mathbf{U}_S = \text{span}\{h_1, h_2, \dots, h_M\},$$

$$\mathbf{U}_N = \text{span}\{h_{M+1}, h_{M+2}, \dots, h_N\} \quad (51)$$

后续步骤与 2.1 节算法相同。

综上所述, 本文提出的基于多级维纳滤波器的柱面共形阵列天线信号方位和极化参数高效联合估计算法步骤总结如下:

**步骤 1** 获得目标点源的信号波形和柱面共形阵列天线接收到的快拍数据。

**步骤 2** 根据式(50)进行维纳滤波器的前向递

推获得各级滤波器函数。

**步骤 3** 根据式(51)获得噪声子空间。

**步骤 4** 根据式(34)和(35)进行空间谱搜索获得目标方位。

**步骤 5** 根据式(36)、(37)和(38)进行目标信号的极化参数配对。

## 3 算法性能分析

### 3.1 算法复杂度分析与比较

文献[9]通过将信号方位与极化参数去耦合降低了谱峰搜索的维数, 减小了运算量, 但因为依然利用协方差估计和特征值分解的方法获得噪声子空间, 所以利用柱面共形阵列实现参数联合估计所需的运算量为  $O(N^3 + N^2 L)$ , 其中  $L$  为快拍数。本文在柱面共形阵列快拍数据构建噪声子空间的过程中因为只利用到了目标信号的波形和多级维纳滤波器的前向分解, 并不涉及多级维纳滤波器的后向合成, 更不涉及协方差的估计和特征值的分解, 因此运算量为  $O(N^2 L)$ <sup>[15]</sup>。因此本文柱面共形阵列信号方位与极化参数联合估计算法更为高效。2种算法运算量对比见表1。

表1 算法运算量对比分析

算法	运算量
文献[9]	$O(N^3 + N^2 L)$
本文	$O(N^2 L)$

进行仿真实验以验证本文提出的高效联合估计算法的性能。仿真实验中, 假设在远场有2个独立、窄带、方位分别为  $\theta_1 = 30^\circ, \varphi_1 = 90^\circ, \theta_2 = 60^\circ, \varphi_2 = 120^\circ$ , 极化参数完全相同, 垂直水平极化模值和相位差分别为  $k_1 = 1, k_2 = 2, \delta_1 = \pi/4, \delta_2 = \pi/3$  的信源以平面波入射到如图3的柱面共形阵列, 图中每层阵元间隔半波长, 柱面横截面半径为2倍波长。在小样本支撑的信号环境中, 本文算法具有对文献[9]联合估计算法计算量上的明显优势, 因此实验中2种算法采用不同的快拍数进行仿真对比。

#### 1) 实验1 角度估计的速度仿真

联合估计算法的高效性通过角度估计速度可以比较直观地反映出来。在本实验中, 角度估计速度利用在不同信源数条件下的角度估计时间来衡量, 实验中取蒙特卡罗实验运行时间的平均值作为单次估计时间。

仿真条件: 信噪比设为 15 dB, 蒙特卡罗实验次数为 2 000, 文献[9]快拍数为 3 000, 本文算法快拍数设为 3 000, 阵元数由 20 变化到 100, 估计时间和

阵元数关系的仿真如表 2 所示。

由表 2 可以看出,在整个阵元数的变化范围内,本文高效联合估计算法的单个估计时间始终低于文献[9]算法的单个估计时间,并逐渐拉开时间上的差距,验证了本文算法在计算量上的优势,证明了本文算法相对于以往联合估计算法的高效性和巨大的实用价值。

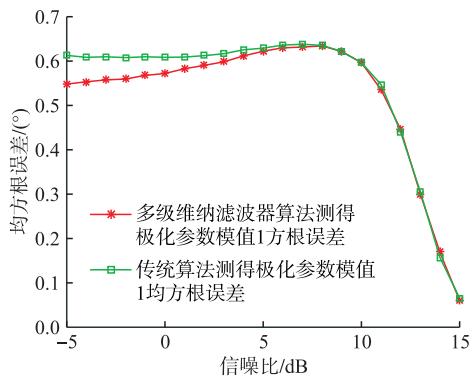
表 2 算法运算量对比分析

阵元个数	维纳滤波器时间/s	传统时间/s
20	0.000 229 147	0.000 241 520
30	0.000 311 739	0.000 285 977
40	0.000 395 911	0.000 495 626
50	0.000 529 946	0.000 627 565
60	0.000 679 580	0.000 764 113
70	0.000 894 192	0.001 089 371
80	0.001 018 158	0.001 204 655
90	0.001 181 321	0.001 465 314
100	0.001 436 546	0.001 755 199

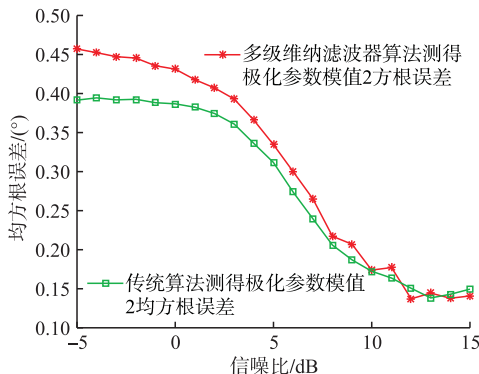
2) 实验 2 均方根误差的仿真

算法的均方根误差随信噪比的变化情况可以反映算法的估计精度。

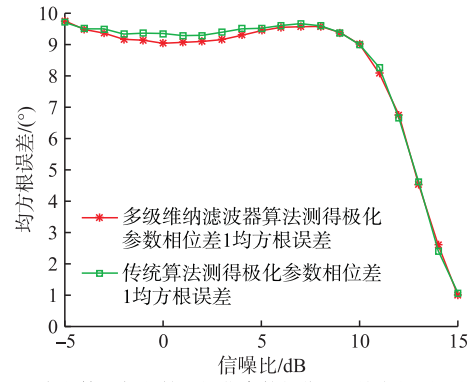
仿真条件:文献[9]快拍数设为 500,本文高效算法快拍数设为 500,蒙特卡罗实验次数设为 500,信噪比由 -5 dB 变化到 15 dB,仿真结果如图 4 所示。



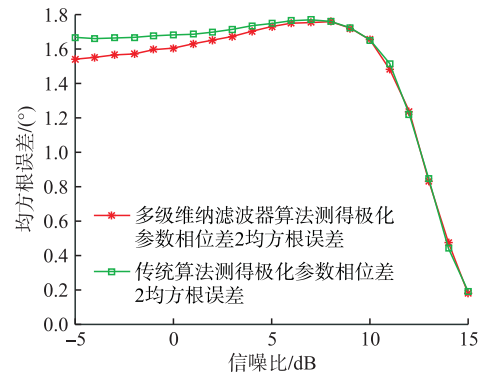
(a) 本文算法与文献[9]极化参数模值 1 均方根误差的比较



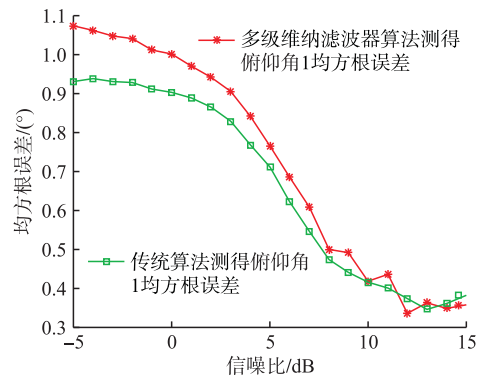
(b) 本文算法与文献[9]极化参数模值 2 均方根误差的比较



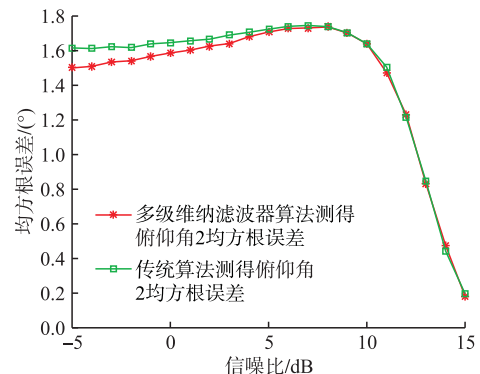
(c) 本文算法与文献[9]极化参数相位差 1 均方根误差的比较



(d) 本文算法与文献[9]极化参数相位差 2 均方根误差的比较

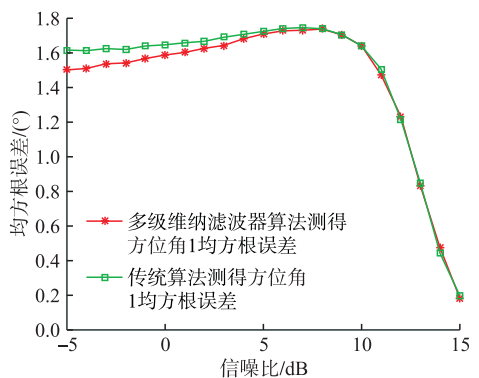


(e) 本文算法与文献[9]俯仰角 1 均方根误差的比较

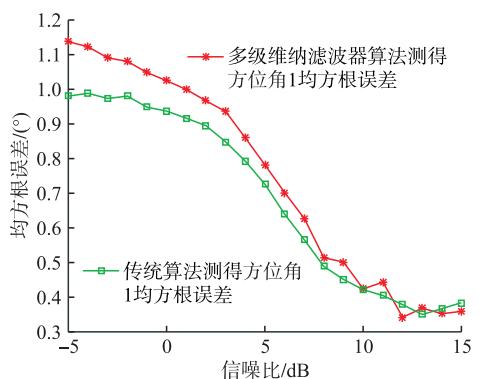


(f) 本文算法与文献[9]俯仰角 2 均方根误差的比较





(g) 本文算法与文献[9]方位角1均方根误差的比较



(h) 本文算法与文献[9]方位角2均方根误差的比较

图4 均方根误差与信噪比的关系

由图4可以看出,在整个信噪比的变化范围内,本文的高效联合估计算法对极化参数和来波方位的估计值均方根误差与文献[9]算法估计值均方根误差大致相当,说明在一定的信噪比变化范围内,本文的高效联合估计算法的估计精度与文献[9]算法的估计精度大致相当。此外,在信噪比大于10 dB的条件下,本文算法对各项参数(极化参数相位差除外)的估计均方根误差均小于1,这样的估计精度在大多数工程应用中是可以被接受的。

综上所述,在一定的估计精度要求下,本文的联合估计算法在小样本支撑的信号环境中对严重依赖信号样本数保证估计精度的文献[9]具有计算量上的一定优势,但也依然存在一些不足:计算优势严重依赖快拍数,计算精度受制于快拍数和阵元数过多也会减小本文高效算法的计算优势。

## 4 结语

本文提出的算法在文献[9]的基础上,利用多级维纳滤波器的前向递推代替以往的协方差估计和特征值分解以进行谱峰搜索和极化参数配对,在一定程度上减小了联合估计算法的运算量的同时,保证了算

法的估计精度,对于算法的工程实现具有重要意义。

## 参考文献

- [1] 杨鹏,杨峰,聂在平,等. MUSIC算法在柱面共形天线阵列DOA估计中的应用研究[J]. 电波科学学报,2008,23(2):288-291.
- [2] 陈鹏年,温宗周,李丽敏,等. DOA估计经典MUSIC算法性能分析[J]. 微处理机,2019,40(6):40-43.
- [3] 梅锦洲. 基于共形阵列天线的DOA估计[J]. 通信电源技术,2019,36(3):282-284.
- [4] 张玲,郭英,齐子森,等. 柱面共形阵列天线盲极化2D DOA估计[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2016,17(3):78-84.
- [5] 彭文灿,魏江,瞿颜,等. 柱面共形阵列天线的极化DOA估计[J]. 计算机仿真,2013,30(9):173-176,207.
- [6] 李杰然,许稼. 共形阵列信号DOA和极化状态联合估计研究[J]. 雷达科学与技术,2015,13(2):159-163.
- [7] 孙翠珍,毛昕蓉. 多重信号分类算法在共形阵列天线中的应用[J]. 计算机仿真,2014,31(11):171-174.
- [8] 王布宏,郭英,王永良,等. 共形天线阵列流形的建模方法[J]. 电子学报,2009,37(3):481-484.
- [9] 齐子森,郭英,王布宏,等. 共形阵列天线信源方位与极化状态的联合估计算法[J]. 电子学报,2012,40(12):2562-2566.
- [10] 包志强,吴顺君,张林让. 一种信源个数与波达方向联合估计的新算法[J]. 电子学报,2006,34(12):2170-2174.
- [11] 宋佳,张恒. 多级维纳滤波器的快速实现方法研究[J]. 舰船电子对抗,2019,42(4):91-96.
- [12] REED I S, GOLDSTEIN J S. A Multistage Representation of the Wiener Filter Based on Orthogonal Projections[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1998,44(7):2943-2959.
- [13] WEIPPERT M E, HIEMSTRA J D, ZOLTOWSKI M D, et al. Insights from the Relationship Between the Multistage Wiener Filter and the Method of Conjugate Gradients[C]//2002 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM 2002). Rosslyn,VA, USA: IEEE,2002:388-392.
- [14] ZHUANG X B, CUI X W, LU M Q, et al. Numerically Stable Method of Signal Subspace Estimation Based on Multistage Wiener Filter[J]. Science China (Information Science),2010(12):2620-2630.
- [15] 黄磊,吴顺君,张林让,等. 快速子空间分解方法及其维数的快速估计[J]. 电子学报,2005,33(6):977-981.

(编辑:徐楠楠)