

# 三体对抗策略的预警机主动防御最优协同制导算法

王小平, 周 问, 刘 博

(空军工程大学航空工程学院, 西安, 710038)

**摘要** 针对预警机机动能力有限, 在空战中易受到敌方先进导弹的“瞄准斩首”威胁的作战情况, 研究由预警机或者护航机发射防御导弹以对抗来袭导弹, 并在战场感知、信息共享、战术协同的条件下, 预警机进行规避动作的主动防御方法设计。充分利用最优控制理论, 在研究推导二维平面下目标飞机、防御导弹、目标导弹组成的三体攻防对抗问题中最优协同制导算法的基础上, 通过三维空间主动防御过程的二维投影的方法, 将三维主动防御制导律设计问题转化为两个相互约束的二维平面制导律(水平面和垂直面)设计问题, 实现了协同制导律从二维向三维的扩展。仿真结果表明, 相对于传统的拦截制导算法, 所提出的制导算法不仅满足所需的拦截精度, 而且具有较小的拦截过载, 具有一定的优越性。

**关键词** 预警机; 主动防御; 最优协同制导; 三体攻防; 三维空间

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2020.02.002

**中图分类号** TJ765.3 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2020)02-0016-08

## A Design of Active Defense Optimal Collaborative Guidance Algorithm for Active Defense of Early Warning Aircraft Based on Three-Body Confrontation Strategy

WANG Xiaoping, ZHOU Wen, LIU Bo

(Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract** Aimed at the problems that an early warning aircraft is limited in maneuverability and is also subject to the “targeting dagger” threat of enemy advanced missiles in air combat, an active defense method is designed. First, an early warning aircraft or escort aircraft is to launch one or more defense missiles to combat incoming missiles. Second, the early warning aircraft is to evade them under condition of battle-field perception, information sharing and tactical coordination. Based on the research of the optimal cooperative guidance algorithm with the optimal control theory in the three-body attack and defense confrontation problem composed of target aircraft, defensive missiles and target missiles under the two-dimensional plane, the cooperative guidance law is extended from two-dimensional to three-dimensional through two-dimensional projection method for active defense process in three-dimensional space which transforms the design problem of the three-dimensional active defense guidance law into two mutually constrained two-dimensional plane guidance law (horizontal and vertical plane) design problems. The simulation results show that the proposed guidance algorithm can effectively intercept the incoming missiles under different attack

**收稿日期:** 2019-11-02

**作者简介:** 王小平(1972—), 男, 江苏武进人, 教授, 主要从事控制算法和理论研究。E-mail: 2934486731@qq.com

**引用格式:** 王小平, 周问, 刘博. 三体对抗策略的预警机主动防御最优协同制导算法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2020, 21(2): 16-23. WANG Xiaoping, ZHOU Wen, LIU Bo. A Design of Active Defense Optimal Collaborative Guidance Algorithm for Active Defense of Early Warning Aircraft Based on Three-Body Confrontation Strategy[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2020, 21(2): 16-23.

modes in space and meet the needs of interception accuracy. The simulation results show that compared with the traditional interception guidance algorithm, the proposed guidance algorithm not only meets the required interception accuracy, but also has a smaller interception overload and has certain advantages.

**Key words** early warning aircraft; active defense; optimal cooperative guidance; three-body confrontation; three-dimensional space

主动防御<sup>[1]</sup>本质上属于飞机规避导弹技术中的一类,但是与传统飞机规避导弹技术不同,主动防御采用直接、主动型的进攻防御方式代替了传统被动、防守型的逃逸方式,直接发射防御空空导弹对来袭攻击导弹实施拦截,将传统上的近身逃逸变成了远程防御,从而使飞机不必放弃原有的攻击态势以及飞行任务,大大提高了飞机的安全距离,牢牢把握了战场的主动权。

相比其他规避策略,主动防御策略的产生相对较晚。从2010年以来,对主动防御技术的研究才正式步入正轨。Ilan Rusnak<sup>[2]</sup>引入飞机、防御导弹、攻击导弹的加速度限制,将主动防御问题转化为动态博弈问题,采用脉冲函数法得到了防御导弹的次优主动防御导引律。文献[3~5]建立了主动防御飞机、防御导弹、攻击导弹的对抗模型,将主动防御问题转化追踪逃逸问题,采用终端投影的方法实现了模型的降阶。文献[6]分析了防御导弹与攻击导弹采用不同导引律时的对抗结果,推导出了不同条件下防御导弹的发射包线和指令加速度。

当前复杂空战中,以比例导引律为代表的传统制导律对于高速机动飞行器的精准拦截要求已经无法满足<sup>[7]</sup>。为了满足的作战条件日益复杂的要求,学者们应用现代控制、非线性控制等方法提出了自适应控制制导律、微分对策制导律、滑模控制制导律,最优控制等多种制导律。花文华等人采用自适应滑模控制的方法,对主动防御导引律进行了设计<sup>[8]</sup>;Song Junhong等人针对多枚导弹协同拦截机动目标的三维末制导问题,利用自适应和非奇异快速终端滑模理论,提出了一种新的具有冲击角约束的有限时间协同制导律<sup>[9]</sup>;Chen Jian等人针对追踪问题中的高超声速目标,提出了一种基于非线性比例和微分制导律(NPDG)的分数演算制导算法,有效地减小了针对目标机动的误击距离,提高了抗干扰能力和鲁棒性<sup>[10]</sup>。

在研究能量消耗时,Yamasaki<sup>[11]</sup>基于最优控制理论,通过在性能指标函数中加入防御导弹的控制能量,提出了改进视线角指令制导律;当防御导弹和目标飞机的转弯率存在约束时,Garcia<sup>[12]</sup>在最优控制理论下目标机的最优航向角进行了研究,使得防御导弹拦截攻击导弹时,目标机能够将其引诱至防

御导弹附近。Martin Weiss<sup>[13-14]</sup>等人针对主动防御对抗系统,以拦截导弹与攻击导弹的脱靶量最小,并且总控制能量最小为优化目标,设计了最优制导律。Rusnk<sup>[15]</sup>将3种飞行器的控制能量、目标机的脱靶量和防御导弹的脱靶量加权求和得到了性能指标,其结果显示如果后者的权重系数趋于零时,将能够简化目标机和防御导弹的最优对策制导律。Rubinsky<sup>[16]</sup>在考虑到过载受限的情况下,提出了攻击导弹远离防御导弹并持续靠近目标机的最优微分对策。

以上这些研究都是在二维平面进行的验证性研究,但是在实际的主动防御过程中,整个作战过程是在三维空间中完成的,因此二维平面内进行的简化研究难以直接应用于实战中,如何在现有主动防御制导律的基础上实现在三维空间下防御导弹对攻击导弹的成功捕获,是目前面临的一个亟待解决的问题。

## 1 攻击导弹-目标机相对运动方程

假设攻击导弹攻击目标机发生在末制导段,且防御导弹、攻击导弹滚转角为 $0^\circ$ 。图1为二维下攻击导弹、目标机的相对运动学关系,将攻击导弹、目标机均视为质点,忽略地球引力,并假设速度均不变。

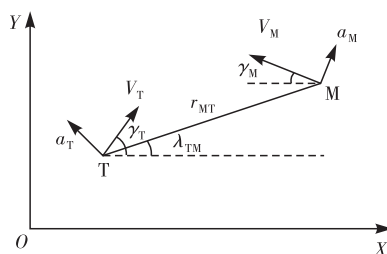


图1 二维攻击导弹-目标机相对运动关系

根据几何关系,可得在视线上的相对速度为:

$$V_{r_{MT}} = -V_M \cos(\gamma_M + \lambda_{MT}) - V_T \cos(\gamma_T - \lambda_{MT}) \quad (1)$$

在垂直于视线上的相对速度为:

$$V_{\lambda_{MT}} = -V_M \sin(\gamma_M + \lambda_{MT}) - V_T \sin(\gamma_T - \lambda_{MT}) \quad (2)$$

由式(1)、式(2)得到相对运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{r}_{MT} = V_{r_{MT}} \\ \dot{\lambda}_{MT} = \frac{V_{\lambda_{MT}}}{r_{MT}} \end{cases} \quad (3)$$

当存在惯性环节时,定义加速度分量与控制量分量关系如下:

$$\dot{a}_{MN} = \frac{u_{MN} - a_{MN}}{\tau_M} \quad (4)$$

式中: $\tau_M$ 表示攻击弹M的时间常数。

PN制导与APN制导的基本结构相同,可统一表达为<sup>[10]</sup>:

$$u_{MN} = \frac{N_i Z_i}{t_{go}^2}, i \in \{PN, APN, OGL\} \quad (5)$$

式中: $N_i$ 表示导弹的导航系数; $Z_i$ 表示零控脱靶量; $t_{go}$ 表示导弹的剩余飞行时间。

当采用PN制导时, $N_{PN}$ 在3~5之间,零控脱靶量为:

$$Z_{PN} = y_{MT} + \dot{y}_{MT} t_{go} \quad (6)$$

当采用APN制导时, $N_{APN}$ 在3~5之间,零控脱靶量为:

$$Z_{APN} = y_{MT} + \dot{y}_{MT} t_{go} + \frac{1}{2} a_{TN} t_{go}^2 \quad (7)$$

## 2 二维平面下的三体对抗策略

通常在研究物体运动的过程中,可以将空间的运动分解为互相垂直的两平面的运动并分别进行分析。因此,为研究方便,首先对二维平面主动防御策略展开研究。

攻击导弹(Attacking Missile, M):攻击目标飞行器;防御导弹(Defender Missile, D):拦截攻击导弹;预警机(Evading Aircraft, T):促进拦截导弹成功摧毁攻击导弹,同时规避攻击导弹的攻击。三体对抗问题可分为2组追逃问题,即M→T追逃问题和D→M追逃问题。攻击导弹M,防御导弹D,目标机T组成的三体攻防对抗模型如图2所示。

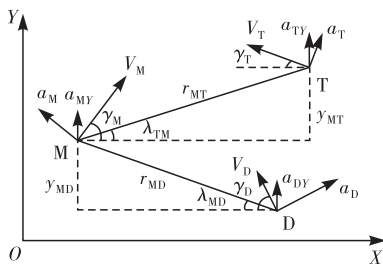


图2 T-M-D平面几何关系

图中, $X$ 轴是M→T的初始视线, $x_i$ ( $i=M, D, T$ )、 $y_i$ ( $i=M, D, T$ )分别为 $X$ 轴、 $Y$ 轴方向的坐标; $(V_i, a_i, \gamma_i)$ 为各飞行器的速度、加速度和航向角,且 $a_i \perp V_i, i \in \{M, D, T\}$ ;  $\lambda_{MT}, \lambda_{MD}$ 为M→T, D→M的视线角; $r_{MT}, r_{MD}$ 为M→T, D→M的相对距离; $y_{MT}, y_{MD}$ 为 $r_{MT}, r_{MD}$ 沿 $Y$ 轴的分量。

目标机、攻击导弹、防御导弹均采用如下的模型

统一描述<sup>[17]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_{iY} & i = \{M, T, D\} \\ a_{iY} = C_i x_i + d_i u_{iY} & i = \{M, T, D\} \end{cases} \quad (8)$$

式中: $x_i \in R^{n_i}$ 为状态变量; $u_i = u_{iY} / \cos \gamma_i$ 为控制器,  $|u_i| < u_i^{\max}$ 。设 $a_{iS} = C_i x_i$ ,假设存在理想动态( $a_{iS} = 0$ ),则 $a_{iY} = d_i u_{iY}, A_i = B_i = C_i = 0$ ;假设存在一阶动态(时间常量),则 $A_i = -1/\tau_i, B_i = -1/\tau_i, C_i = 1, d_i = 0$ ,即 $x_i = a_{iY}$ 。

令状态向量为:

$$x = [y_{MT} \quad \dot{y}_{MT} \quad x_M^T \quad x_T^T \quad y_{MD} \quad \dot{y}_{MD} \quad x_D^T]^T, \text{即 } x = [x_{MT} \quad x_{MD}] \in R^{n_M + n_D + n_T + 4}.$$

其中: $x_{MT} = [y_{MT} \quad \dot{y}_{MT} \quad x_M^T \quad x_T^T]^T$ ;  $x_{MD} = [y_{MD} \quad \dot{y}_{MD} \quad x_D^T]^T$ 。

则三体攻防对抗的状态方程为:

$$\dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{TY} - a_{MY} \\ \dot{x}_M = A_M x_M + B_M u_{MY} \\ \dot{x}_T = A_T x_T + B_T u_{TY} \\ \dot{x}_{n_M + n_T + 3} = x_{n_M + n_T + 4} \\ \dot{x}_{n_M + n_T + 4} = a_{MY} - a_{DY} \\ \dot{x}_D = A_D x_D + B_D u_{DY} \end{cases} \quad (9)$$

式中: $x_1$ 和 $x_{n_M + n_T + 3}$ 为垂直于 $LOS_0$ 的相对位置; $x_2$ 和 $x_{n_M + n_T + 4}$ 为侧向速度,其导数为侧向加速度。上式改写为:

$$\dot{x} = Ax + B[u_{TY} \quad u_{DY}]^T + Cu_{MY} \quad (10)$$

设 $r_{MT}(0)$ 和 $r_{MD}(0)$ 为初始距离,假设攻击导弹速度 $V_{MT}$ 和拦截导弹速度 $V_{MD}$ 为常值。攻击/拦截时间近似为 $t_{MT} = r_{MT}(0)/V_{MT}$ 和 $t_{MD} = r_{MD}(0)/V_{MD}$ ,拦截时间间隔为 $\Delta t = t_{MT} - t_{MD}$ 。若拦截任务成功则 $\Delta t > 0$ ,拦截任务剩余时间和为 $t_{go, MD} = t_{MD} - t$ ,拦截任务实际剩余时间为 $t_{go, 1} = t_{go, MD}$ ,攻击任务实际剩余时间为 $t_{go, MT} = t_{go} + \Delta t$ 。

将攻击导弹制导律式(5)代入上述主动防御对抗系统,设计最优协同制导律。优化目标是使拦截导弹与攻击导弹的脱靶量最小并且总控制能量最小,因此构造如下目标函数:

Minimize

$$J = \frac{1}{2} \alpha y_{MD}^2(t_{MD}) + \int_0^{t_{MD}} (u_{DY}^2 + \beta u_{TY}^2) dt \quad (11)$$

Subject to

$$\dot{x} = A_{PE} x + B_{TPE} u_{TY} + B_{DPE} u_{DY}$$

引入零控脱靶量:

$$Z_{MD}(t) = D\Phi(t_{MD}, t)x(t) \quad (12)$$

式中: $\Phi(t_{MD}, t)$ 为转移矩阵。由于其仅与拦截导弹

控制率  $u_D$  和飞机控制率  $u_T$  有关,由此可将问题转化为:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \\ & J = \frac{1}{2} a Z_{MD}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{DY}^2 + \beta u_{TY}^2) dt \end{aligned} \quad (13)$$

Subject to

$$\dot{Z}_{MD}(t) = \tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{TY} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{DY}$$

式中:  $\tilde{B}_T(t_{MD}, t)$  和  $\tilde{B}_D(t_{MD}, t)$  分别为目标机  $B_T$  和防御导弹  $B_D$  随拦截时间的变化量。

### 3 三维平面下的三体对抗策略

#### 3.1 模型描述

在实际主动防御对抗中,整个作战过程均是在三维空间中完成的。因此,对于“战斗机-攻击导弹-防御导弹”三者的对抗问题,必须在三维空间中进行研究。从理论上讲,一个三维空间运动,可以通过 2 个或多个二维运动分别加以描述<sup>[17]</sup>,因此本文考虑将三维空间的三体对抗过程,将其对抗轨迹分别投影到空间坐标系下两平面平面中分别研究,以图 3 为例,投影至和平面。

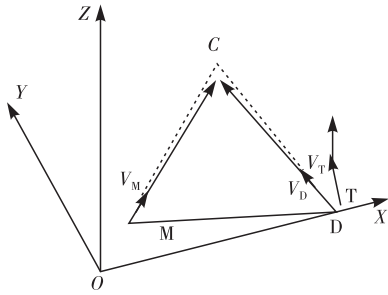


图 3 T-M-D 空间几何关系

式中:  $M(x_M, y_M, z_M), D(x_D, y_D, z_D), T(x_T, y_T, z_T)$ ,

$$\mathbf{V}_M = (\cos \phi_M \cos \theta_M, \cos \phi_M \sin \theta_M, \sin \phi_M),$$

$$\mathbf{V}_D = (\cos \phi_D \cos \theta_D, \cos \phi_D \sin \theta_D, \sin \phi_D),$$

$$\mathbf{V}_T = (\cos \phi_T \cos \theta_T, \cos \phi_T \sin \theta_T, \sin \phi_T),$$

$\phi_i$  为各飞行器的倾斜角,  $\theta_i$  为各飞行器的方位角。仍然假设 2 个追逐过程均发生在初始三角碰撞区域附近,即 M-D-C 共面(见图 4),由此可得到  $\mathbf{V}_D$ 。

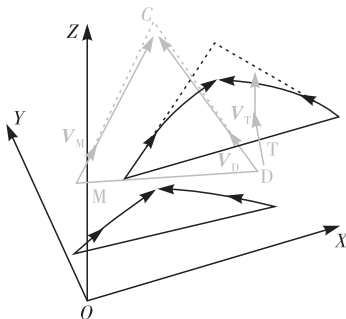


图 4 T-M-D 空间投影几何关系

将 T-M-D 由三维空间投影至  $XOZ$  平面(见图 5)。

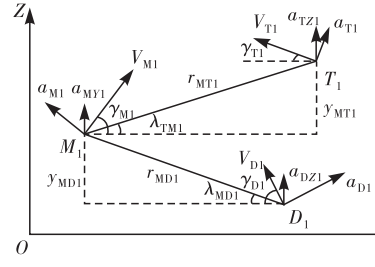


图 5  $XOZ$  平面上 T-M-D 平面几何关系

$M_1(x_M, z_M), D_1(x_D, z_D), T_1(x_T, z_T)$ ,

$$\mathbf{V}_{M1} = (\cos \phi_M \cos \theta_M, \sin \phi_M)$$

$$\mathbf{V}_{D1} = (\cos \phi_D \cos \theta_D, \sin \phi_D)$$

$$\mathbf{V}_{T1} = (\cos \phi_T \cos \theta_T, \sin \phi_T)$$

$$\mathbf{V}_{i1} = V_i \cos \theta_i, \gamma_{i1} = \phi_i, i = \{M, T, D\}$$

另外,  $\mathbf{V}_{i1}$  沿  $X$  轴的分量  $V_{i1X} = V_i \cos \theta_i \cos \gamma_{i1} = V_i \cos \theta_i \cos \phi_i$ ;  $\mathbf{V}_{i1}$  沿  $Z$  轴的分量  $V_{i1Z} = V_i \cos \theta_i \sin \gamma_{i1} = V_i \cos \theta_i \sin \phi_i$ 。

将 T-M-D 由三维空间投影至平面(见图 6)。

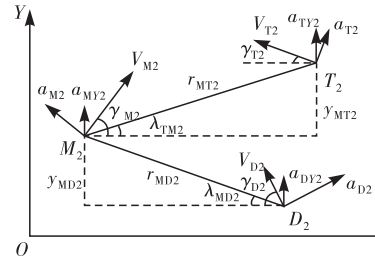


图 6  $XOY$  平面上 T-M-D 平面几何关系

$M(x_M, y_M), D(x_D, y_D), T(x_T, y_T)$

$$\mathbf{V}_M = (\cos \phi_M \cos \theta_M, \cos \phi_M \sin \theta_M)$$

$$\mathbf{V}_D = (\cos \phi_D \cos \theta_D, \cos \phi_D \sin \theta_D)$$

$$\mathbf{V}_T = (\cos \phi_T \cos \theta_T, \cos \phi_T \sin \theta_T)$$

$$\mathbf{V}_{i2} = V_i \cos \phi_i, \gamma_{i2} = \theta_i, i = \{M, T, D\}$$

另外,  $v_{i2x} = V_i \cos \phi_i \cos \gamma_{i2} = V_i \cos \phi_i \cos \theta_i = V_{i1x}$ ;  $\mathbf{V}_{i2}$  沿  $Y$  轴的分量  $V_{i2Y} = V_i \cos \phi_i \sin \gamma_{i2} = V_i \cos \phi_i \sin \theta_i$ 。

由此可见,两平面上速度关于公共轴的分量相等。

#### 3.2 时间轴

在三维空间中,由  $XOY$  平面 T-M-D 平面几何关系可知 T、M、D 之间距离向量为:

$$\mathbf{r}_{MD} = [X_D - X_M \quad Y_D - Y_M \quad Z_D - Z_M] \quad (17)$$

$$\mathbf{r}_{MT} = [X_T - X_M \quad Y_T - Y_M \quad Z_T - Z_M] \quad (18)$$

速度向量与距离向量的夹角余弦值为:

$$\cos \langle \mathbf{V}_M, \mathbf{r}_{MD} \rangle = \frac{\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{r}_{MD}}{|\mathbf{V}_M| |\mathbf{r}_{MD}|}$$

$$\cos \langle \mathbf{V}_D, \mathbf{r}_{DM} \rangle = \frac{-\mathbf{V}_D \cdot \mathbf{r}_{MD}}{|\mathbf{V}_D| |\mathbf{r}_{MD}|}$$

$$\cos\langle \mathbf{V}_M, \mathbf{r}_{MT} \rangle = \frac{\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{r}_{MT}}{|\mathbf{V}_M| |\mathbf{r}_{MT}|}$$

$$\cos\langle \mathbf{V}_T, \mathbf{r}_{TM} \rangle = \frac{-\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{r}_{TM}}{|\mathbf{V}_T| |\mathbf{r}_{TM}|}$$

因此由运动关系得到三维下 T、M、D 之间接近速度为:

$$\mathbf{V}_{\text{close\_MD}} = \mathbf{V}_M \cos\langle \mathbf{V}_M, \mathbf{r}_{MD} \rangle + \mathbf{V}_D \cos\langle \mathbf{V}_D, \mathbf{r}_{DM} \rangle \quad (19)$$

$$\mathbf{V}_{\text{close\_MT}} = \mathbf{V}_M \cos\langle \mathbf{V}_M, \mathbf{r}_{MT} \rangle + \mathbf{V}_T \cos\langle \mathbf{V}_T, \mathbf{r}_{TM} \rangle \quad (20)$$

设三维下的碰撞时间为:

$$t_{\text{go}} = \frac{r_{MD}}{V_{\text{close\_MD}}} \quad (21)$$

$$t_{\text{go MT}} = \frac{r_{MT}}{V_{\text{close\_MT}}} \quad (22)$$

在 XOY 平面上, 攻击导弹、防御导弹、目标机的速度大小及速度航迹角为:

$$V_{M1} = |V_M \cos \phi_M|, V_{D1} = |V_D \cos \phi_D|, V_{T1} = |V_T \cos \phi_T|$$

$$\gamma_{M1} = \theta_M, \gamma_{D1} = \theta_D, \gamma_{T1} = \theta_T$$

攻击导弹、防御导弹、目标机位置分量分别为:

$$X_{M1} = X_M, Y_{M1} = Y_M, X_{T1} = X_T, Y_{T1} = Y_T, X_{D1} = X_D, Y_{D1} = Y_D$$

得到攻击导弹与防御导弹、目标机的距离为:

$$r_{MD1} = \sqrt{(X_{M1} - X_{D1})^2 + (Y_{M1} - Y_{D1})^2} \quad (23)$$

$$r_{MT1} = \sqrt{(X_{M1} - X_{T1})^2 + (Y_{M1} - Y_{T1})^2} \quad (24)$$

以及 M→T 和 M→D 的视线角为:

$$\lambda_{MD1} = \arctan\left(\frac{Y_{D1} - Y_{M1}}{X_{D1} - X_{M1}}\right) \quad (25)$$

$$\lambda_{MT1} = \arctan\left(\frac{Y_{T1} - Y_{M1}}{X_{T1} - X_{M1}}\right) \quad (26)$$

得到二维下 T、M、D 之间接近速度为:

$$V_{\text{close\_MT1}} = -V_{M1} \cos(\gamma_{M1} - \lambda_{MT1}) - V_{T1} \cos(\gamma_{T1} + \lambda_{MT1}) \quad (27)$$

$$V_{\text{close\_MD1}} = -V_{M1} \cos(\gamma_{M1} - \lambda_{MD1}) - V_{D1} \cos(\gamma_{D1} + \lambda_{MD1}) \quad (28)$$

及二维下的碰撞时间为:

$$t_{\text{go 1}} = -\frac{r_{MD1}}{V_{\text{close\_MD1}}} \quad (29)$$

$$t_{\text{go MT1}} = -\frac{r_{MT1}}{V_{\text{close\_MT1}}} \quad (30)$$

在 XOZ 平面上可知攻击导弹、防御导弹、目标机的速度大小及速度航迹角为:

$$V_{M2} = \sqrt{(V_M \cos \phi_M \cos \theta_M)^2 + (V_M \sin \phi_M)^2} \quad (31)$$

$$V_{D2} = \sqrt{(V_D \cos \phi_D \cos \theta_D)^2 + (V_D \sin \phi_D)^2} \quad (32)$$

$$V_{T2} = \sqrt{(V_T \cos \phi_T \cos \theta_T)^2 + (V_T \sin \phi_T)^2} \quad (33)$$

$$\gamma_{M2} = \arctan\left(\frac{V_M \sin \phi_M}{V_M \cos \phi_M \cos \theta_M}\right) \quad (34)$$

$$\gamma_{D2} = \arctan\left(\frac{V_D \sin \phi_D}{V_D \cos \phi_D \cos \theta_D}\right) \quad (35)$$

$$\gamma_{T2} = \arctan\left(\frac{V_T \sin \phi_T}{V_T \cos \phi_T \cos \theta_T}\right) \quad (36)$$

攻击导弹、防御导弹、目标机在坐标轴上的位置分别为:

$$X_{M2} = X_M, Y_{M2} = Z_M, X_{D2} = X_D, Y_{D2} = Z_D, X_{T2} = X_T, Y_{T2} = Z_T$$

得到攻击导弹与防御导弹、目标机的距离为:

$$r_{MD2} = \sqrt{(X_{M2} - X_{D2})^2 + (Y_{M2} - Y_{D2})^2}$$

$$r_{MT2} = \sqrt{(X_{M2} - X_{T2})^2 + (Y_{M2} - Y_{T2})^2}$$

M→T 和 M→D 的视线角为:

$$\lambda_{MD2} = \arctan\left(\frac{Y_{D2} - Y_{M2}}{X_{D2} - X_{M2}}\right)$$

$$\lambda_{MT2} = \arctan\left(\frac{Y_{T2} - Y_{M2}}{X_{T2} - X_{M2}}\right)$$

得到二维下 T、D、M 之间接近速度为:

$$V_{\text{close\_MD2}} = -V_{M2} \cos(\gamma_{M2} + \lambda_{MD2}) - V_{D2} \cos(\gamma_{D2} - \lambda_{MD2}) \quad (37)$$

$$V_{\text{close\_MT2}} = -V_{M2} \cos(\gamma_{M2} + \lambda_{MT2}) - V_{T2} \cos(\gamma_{T2} - \lambda_{MT2}) \quad (38)$$

及二维下的碰撞时间为:

$$t_{\text{go 2}} = -\frac{r_{MD2}}{V_{\text{close\_MD2}}} \quad (39)$$

$$t_{\text{go MT2}} = -\frac{r_{MT2}}{V_{\text{close\_MT2}}} \quad (40)$$

由投影关系可知, 存在  $t_{\text{go}} = t_{\text{go 1}} = t_{\text{go 2}}, t_{\text{go MT}} =$

$t_{\text{go MT1}} = t_{\text{go MT2}}$ 。

### 3.3 协同制导策略

将 T-M-D 由三维空间投影至平面(见图 7)。

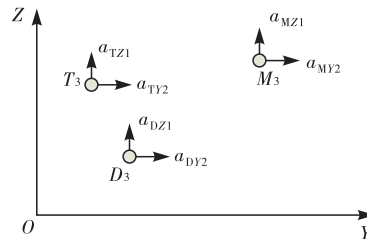


图 7 YOZ 平面上 T-M-D 平面几何关系

构造如下优化问题, 使得攻击导弹-拦截导弹脱靶距离  $|y_{MD}(t_{MD})|$  最小。

Minimize

$$J = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_D^2 + \beta u_T^2) dt$$

Subject to (41)

$$\dot{Z}_{MD-Y}(t) = \tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Y} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Y}$$

$$\dot{Z}_{MD-Z}(t) = \tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Z} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Z}$$

其中,

$$J = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Y}^2 + u_{D-Z}^2 + \beta u_{T-Y}^2 +$$

$$\begin{aligned} \beta u_{T-Z}^2 dt &= \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Z}^2(t_{MD}) + \\ &\frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Y}^2 + u_{D-Z}^2 + \beta u_{T-Y}^2 + \beta u_{T-Z}^2) dt = \\ &\frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Y}^2 + \beta u_{T-Y}^2) dt + \\ &\frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Z}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Z}^2 + \beta u_{T-Z}^2) dt \end{aligned} \quad (42)$$

令:

$$J_{XOY} = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Y}^2 + \beta u_{T-Y}^2) dt \quad (43)$$

$$J_{XOZ} = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Z}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Z}^2 + \beta u_{T-Z}^2) dt \quad (44)$$

由此可得:

$$J = J_{XOY} + J_{XOZ} \quad (45)$$

可分解为 XOY 和 XOZ 平面独立的最优求解问题。

在 XOY 平面上,求解如下问题:

Minimize

$$J_{XOY} = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Y}^2 + \beta u_{T-Y}^2) dt \quad (46)$$

Subject to

$$\dot{Z}_{MD-Y}(t) = \tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Y} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Y}$$

在 XOZ 平面上,求解如下问题:

Minimize

$$J_{XOZ} = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Z}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (u_{D-Z}^2 + \beta u_{T-Z}^2) dt \quad (47)$$

Subject to

$$\dot{Z}_{MD-Z}(t) = \tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Z} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Z}$$

### 3.4 问题的求解

在 XOY 平面上,应用拉格朗日乘子法,构造增广泛函:

$$\begin{aligned} J'_{XOY} &= \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \\ &\frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} \left[ \begin{aligned} &(u_{D-Y}^2 + \beta u_{T-Y}^2) + \\ &\lambda_{Z_{MD-Y}}(t) \left[ \begin{aligned} &\tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Y} + \\ &\tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Y} - \\ &\dot{Z}_{MD-Y}(t) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] dt \end{aligned} \quad (48)$$

式中: $\lambda_{Z_{MD-Y}}$  为待定的拉格朗日乘子系数。

构造哈密顿函数(Hamiltonion):

$$H = \frac{1}{2} (u_{D-Y}^2 + \beta u_{T-Y}^2) +$$

$$\lambda_{Z_{MD-Y}}(t) (\tilde{B}_T(t_{MD}, t) u_{T-Y} + \tilde{B}_D(t_{MD}, t) u_{D-Y}) \quad (49)$$

由此可得:

$$J'_{XOY} = \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) +$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (H - \lambda_{Z_{MD-Y}}(t) \dot{Z}_{MD-Y}(t)) dt = \\ &\frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD}) + \frac{1}{2} \int_0^{t_{MD}} (H + \dot{\lambda}_{Z_{MD-Y}}(t) \dot{Z}_{MD-Y}(t)) dt - \\ &\lambda_{Z_{MD-Y}}(t) \dot{Z}_{MD-Y}(t) \Big|_0^{t_{MD}} \end{aligned} \quad (50)$$

设式(49)中的  $u_{T-Y}(t)$ ,  $u_{D-Y}(t)$  和式(50)中的  $Z_{MD-Y}(t_{MD})$  相对于目标机和拦截导弹的最优控制  $u_{T-Y}^*(t)$ ,  $u_{D-Y}^*(t)$  及最优轨线的变分为  $\delta u_{T-Y}(t)$ ,  $\delta u_{D-Y}(t)$  和  $\delta Z_{MD-Y}(t_{MD})$ , 则计算  $\delta u_{T-Y}(t)$ ,  $\delta u_{D-Y}(t)$  和  $\delta Z_{MD-Y}(t_{MD})$  引起的  $J'_{XOY}$  的变分为:

$$\begin{aligned} \delta J' &= \delta Z_{MD-Y}(t_{MD}) \left[ \frac{\partial \frac{1}{2} \alpha Z_{MD-Y}^2(t_{MD})}{\partial Z_{MD-Y}(t_{MD})} - \lambda_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}) \right] + \\ &\int_0^{t_{MD}} \left( \delta Z_{MD-Y}(t) \left( \frac{\partial H}{\partial Z_{MD-Y}(t)} + \dot{\lambda}_{Z_{MD-Y}}(t) \right) + \right. \\ &\left. \delta u_{D-Y}(t) \left( \frac{\partial H}{\partial u_{D-Y}(t)} \right) + \delta u_{T-Y}(t) \left( \frac{\partial H}{\partial u_{T-Y}(t)} \right) \right) dt \end{aligned} \quad (51)$$

则式(51)取极值的必要条件是,对任意的  $\delta u_{T-Y}(t)$ ,  $\delta u_{D-Y}(t)$  和  $\delta Z_{MD-Y}(t_{MD})$ , 都有  $\delta J'_{XOY} = 0$  成立。

因此,由式(51)得到伴随方程:

$$\dot{\lambda}_{Z_{MD-Y}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial Z_{MD-Y}(t)} = 0 \quad (52)$$

由式(51)、式(52)得到横截条件:

$$\lambda_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}) = \alpha Z_{MD-Y}(t_{MD}) \quad (53)$$

由式(51)得到控制方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_{D-Y}(t)} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u_{T-Y}(t)} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

结合式(49),式(52),式(54)求解得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_{T-Y}} = \beta u_{T-Y} + \lambda_{Z_{MD-Y}} \tilde{B}_T(t_{MD}, t) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u_{D-Y}} = \beta u_{D-Y} + \lambda_{Z_{MD-Y}} \tilde{B}_D(t_{MD}, t) = 0 \\ u_{T-Y}^*(t) = - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}) \tilde{B}_T(t_{MD}, t) \\ u_{D-Y}^*(t) = - \alpha \lambda_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}) \tilde{B}_D(t_{MD}, t) \end{cases} \quad (55)$$

因此得到:

$$\dot{Z}_{MD-Y}(t) = -\alpha \left( \frac{1}{\beta} \tilde{B}_T^2(t_{MD}, \xi) + \tilde{B}_D^2(t_{MD}, \xi) \right) Z_{MD-Y}(t_{MD}) \quad (56)$$

对式(56)积分得到:

$$\begin{aligned} Z_{MD-Y}(t_{MD}) &= Z_{MD-Y}(t) + \int_0^{t_{MD}} \dot{Z}_{MD-Y}(\xi) d\xi = Z_{MD-Y}(t) - \\ &\alpha Z_{MD-Y}(t_{MD}) \int_0^{t_{MD}} \left( \frac{1}{\beta} \tilde{B}_T^2(t_{MD}, \xi) + \tilde{B}_D^2(t_{MD}, \xi) \right) d\xi \end{aligned} \quad (57)$$

由式(57)得到:

$$\Phi_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}, t) = \frac{1}{1 + \alpha \int_t^{t_{MD}} \left( \frac{1}{\beta} \tilde{B}_T^2(t_{MD}, \xi) + \tilde{B}_D^2(t_{MD}, \xi) \right) d\xi} \quad (58)$$

最终求得目标机和防御导弹在 XOY 平面上的最优制导律为:

$$\begin{cases} u_{T-Y}^* = -N'_T Z_{MD-Y}(t)/t_{go}^2 \\ N'_T = \frac{\alpha}{\beta} \tilde{B}_T(t_{MD}, t) \Phi_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}, t) t_{go}^2 \\ u_{D-Y}^* = -N'_D Z_{MD-Y}(t)/t_{go}^2 \\ N'_D = \alpha \tilde{B}_D(t_{MD}, t) \Phi_{Z_{MD-Y}}(t_{MD}, t) t_{go}^2 \end{cases} \quad (59)$$

在 XOZ 平面上,按照上述 XOY 平面上的求解过程,同理可得目标机和防御导弹在 XOZ 平面上的最优制导律为:

$$\begin{cases} u_{T-Z}^* = -N'_T Z_{MD-Z}(t)/t_{go}^2 \\ N'_T = \frac{\alpha}{\beta} \tilde{B}_T(t_{MD}, t) \Phi_{Z_{MD-Z}}(t_{MD}, t) t_{go}^2 \\ u_{D-Z}^* = -N'_D Z_{MD-Z}(t)/t_{go}^2 \\ N'_D = \alpha \tilde{B}_D(t_{MD}, t) \Phi_{Z_{MD-Z}}(t_{MD}, t) t_{go}^2 \end{cases} \quad (60)$$

## 4 仿真实验

为了验证本文设计的最优协同制导律的有效性,假设在敌机发射攻击导弹之初,防御方发射防御导弹进行拦截。将主动防御导引律做为飞机-导弹协同主动防御方法中防御导弹的导引律,以飞机、防御导弹共同作为主动防御策略的实施主体,设脱靶量小于 1 m 做为拦截有效的指标,分析其拦截效能<sup>[17]</sup>。设仿真步长  $T=0.5$  ms,目标机、攻击导弹及防御导弹的模型参数和初始状态分别如表 1 和表 2 所示。

表 1 One-on-One 仿真系统参数

预警机	探测距离/km	40
	速度/(m·s <sup>-1</sup> )	200
护航机	护航半径/m	500
	护航角度/(°)	0
	速度/(m·s <sup>-1</sup> )	300
攻击导弹	导引律	PN
	攻击角度/(°)	150
	最大过载/g	40
	时间常数	0.1
	速度/(m·s <sup>-1</sup> )	1 200
	倾斜角/(°)	-20
拦截导弹	方位角/(°)	140
	最大过载/g	40
	时间常数	0.1
攻击导弹	速度/(m·s <sup>-1</sup> )	1 000
	倾斜角/(°)	20
	方位角/(°)	30

表 2 目标机、防御导弹、攻击导弹初始状态

目标与导弹	X/km	Y/km	H/km
目标机(T)	0	0	0
防御导弹(D)	0	0	0
防御导弹(M)	40	0	0

实验 1 采用传统的 PN 导引律,仿真结果分别如图 8 和图 9 所示。

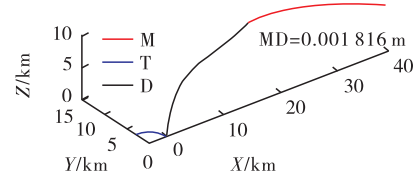


图 8 拦截轨迹

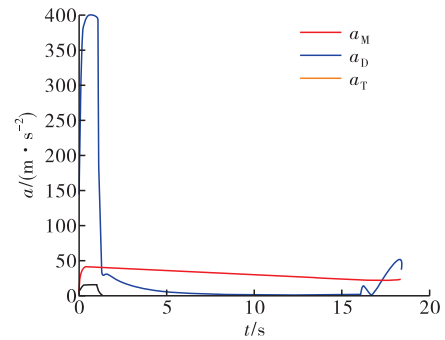


图 9 加速度变化

由图 8 和图 9 可知,将目标机、防御导弹同时作为主动防御策略的实施主体,采用 PN 导引律时,其有效脱靶量为 0.001 8 m,最大过载约 40 g,满足防御要求,能够实现对攻击导弹的有效拦截,由此验证了 PN 导引律的有效性。

在相同的初始条件下,实验 2 采用最优协同制导律,其仿真结果如图 10 和图 11 所示。

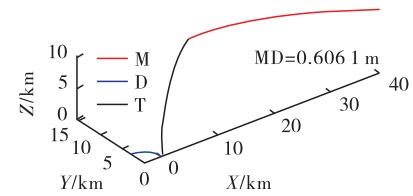


图 10 拦截轨迹

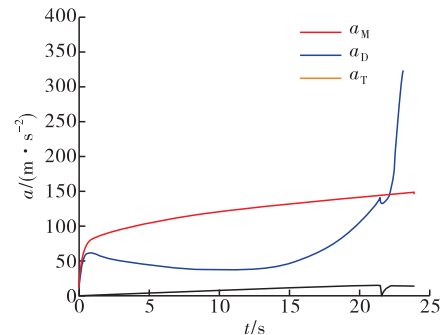


图 11 加速度变化

由图 10 和图 11 可知,采用最优制导律时,能够实现攻击导弹的有效拦截,其有效脱靶量为 0.61 m,在末短时出现最大过载约 35 g。上述仿真同样也验证了主动防御最优协同制导律的有效性,同时由于 PN 制导律只需考虑脱靶量指标,因此防御导弹脱靶量精度比最优协同要高,但最优导引律下防守方能够以小于采用 PN 导引律所需的代价引诱并拦截攻击导弹,即采用最优协同制导律时,对防御导弹的过载要求减少,因此通过调节参数,能够协调指标平衡,这证明了最优制导律相较于 PN 导引律的优越性。

## 5 结语

本文主要在对飞机主动防御问题分析的基础上,提出了飞机-导弹协同主动防御的方法。采用最优控制理论,提出了一种基于变分法的主动防御最优协同制导律设计方法,首先在二维平面内,建立了基于 LOS 的三体对抗模型,结合攻击导弹、防御导弹、目标机和攻击导弹的制导律数学模型,建立各自情况下的主动防御系统运动方程;综合考虑拦截脱靶量、控制量等优化指标,进一步将主动防御制导律设计问题转化为最优控制问题,采用变分法,根据最优化的条件,推导出了二维平面内目标机与拦截导弹协同的最优主动防御制导律。在此基础上,通过三维空间主动防御过程的二维投影的方法,将三维主动防御制导律设计问题转化为两个相互约束的二维平面制导律(水平面和垂直面)设计问题,实现了协同制导律从二维平面向三维空间的扩展,提高实战应用效果。

## 参考文献

- [1] 马明. 论空空反导弹武器[J]. 战术导弹技术, 2002(5): 41-45.
- [2] RUSNAK I. Guidance Laws in Defense Against Missile Attack with Acceleration Constrained Players[Z]. AIAA 2010-8057.
- [3] SHIMA T. Optimal Cooperative Pursuit and Evasion Strategies Against a Homing Missile[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2011, 34(2): 414-425.
- [4] SHINAR J, ROTSZTEIN Y, BEZNER E. Analysis of Three-Dimensional Optimal Evasion with Linearized Kinematics[J]. Journal of Guidance and Control, 1979, 2(5): 353-360.
- [5] RATNOO A, SHIMA T. Line-of-Sight Interceptor Guidance for Defending an Aircraft[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 34(2): 522-532.
- [6] RATNOO A, SHIMA T. Guidance Strategies Against Defended Aerial Targets[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2012, 35(4): 1059-1068.
- [7] 王亚飞, 方洋旺, 周晓滨. 比例导引律研究现状及其发展[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(10): 8-12.
- [8] 花文华, 陈兴林. 基于多模型自适应估计的机动目标拦截[J]. 沈阳工业大学学报, 2011, 33(3): 326-330.
- [9] SONG J H, SONG S M, XU S L. Three-Dimensional Cooperative Guidance Law for Multiple Missiles with Finite-Time Convergence[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 67: 193-205.
- [10] CHEN J, ZHAO Q L, LIANG Z X, et al. Fractional Calculus Guidance Algorithm in a Hypersonic Pursuit-Evasion Game[J]. Defence Science Journal, 2017, 67(6): 688-697.
- [11] YAMASAKI T, BALAKRISHNAM S, TAKANO H. Modified CLOS Intercept Guidance for Aircraft Defense Against a Guided Missile[Z]. AIAA 2011-6421.
- [12] GARCIA E, CASBEER D W, PACHTER M. Active Target Defense Using First Order Missile Models[J]. Automatica, 2017, 78: 139-143.
- [13] WEISS M, SHIMA T, CASTANEDA D, et al. Minimum Effort Intercept and Evasion Guidance Algorithms for Active Aircraft Defense[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2016, 39(10): 2297-2311.
- [14] WEISS M, SHIMA T. Minimum Effort Pursuit/Evasion Guidance with Specified Miss Distance[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2016, 39(5): 1069-1079.
- [15] RUSNAK I, WEISS H, HEXNER G. Guidance Laws in Target-Missile-Defender Scenario with an Aggressive Defender[J]. IFAC Proceedings, 2011, 44(1): 9349-9354.
- [16] RUBINSKY S, GUTMAN S. Three Player Pursuit and Evasion Conflict[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2014, 37(1): 98-110.
- [17] KARELAHTI J, VIRTAVEN K, RAIVIO T. Near-Optimal Missile Avoidance Trajectories via Receding Horizon Control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(5): 1287-1298.

(编辑:姚树峰)