

拉格朗日方程的菱形翼布局无人机建模

吴 翰¹, 王正平¹, 周 洲^{1,2}, 王 睿¹

(1. 西北工业大学航空学院, 西安, 710072;

2. 西北工业大学无人机特种技术重点实验室, 西安, 710065)

摘要 为建立菱形翼布局无人机的动力学模型,提出一种基于拉格朗日方程的动力学建模方法,首先选取四元数用于参数化该无人机的姿态,建立该无人机系统的约束矩阵;其次通过虚功的形式建立无人机的广义力矩阵,建立无人机的动能与势能模型;最后通过矩阵直积的概念得到与无人机系统约束矩阵乘积为零的矩阵,通过该矩阵消掉拉格朗日方程中的拉格朗日乘子,基于拉格朗日方程模块化地建立该无人机的动力学模型。为与拉格朗日方程进行对比,同样采用 Kane 方程和 ADAMS 软件建立该无人机的动力学模型。仿真结果表明,拉格朗日方程、Kane 方程以及 ADAMS 软件的仿真结果基本一致,验证了动力学建模方法的合理性。

关键词 菱形翼布局无人机;拉格朗日方程;凯恩方程;拉格朗日乘子;四元数;

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2019.05.002

中图分类号 V212 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2019)05-0008-08

A Modeling of Diamond Jointed-Wing Configuration UAV Based on Lagrange's Equation

WU Han¹, WANG Zhengping¹, ZHOU Zhou^{1,2}, WANG Rui¹

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Science and Technology of UAV Laboratory, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710065, China)

Abstract: In order to establish a dynamics model of the diamond jointed-wing configuration UAV, a dynamics modeling method based on Lagrange's equation is proposed. Firstly, the quaternion is selected to parameterize the attitude of the UAV, and the constraint matrix of the UAV system is established. Secondly, a generalized force matrix of the UAV is established by the virtual work, the Kinetic and Potential energy of the UAV are established. Finally, a matrix is obtained by the concept of matrix direct product and the product of this matrix and the constraint matrix is a zero matrix. The Lagrange multipliers in the Lagrange's equation are eliminated by the matrix, and the dynamics model of the UAV is established in modularization based on the Lagrange's equation. In order to compare with the Lagrange's equation, the Kane equation and ADAMS software are also used to establish a dynamics model of the UAV. The results show that the simulation of Lagrange's equation, Kane equation and ADAMS software are basically the

收稿日期: 2019-04-18

基金项目: 陕西省重点研发项目(2018ZDCXL-GY-03-04);西北工业大学研究生创新创业种子基金(ZZ2019054)

作者简介: 吴 翰(1996—),男,陕西宝鸡人,硕士生,主要从事无人机总体设计与多体动力学建模研究。E-mail:wuhan.234@163.com

引用格式: 吴翰,王正平,周洲,等.拉格朗日方程的菱形翼布局无人机建模[J].空军工程大学学报(自然科学版),2019,20(5):8-15. WU Han, WANG Zhengping, ZHOU Zhou, et al. A Modeling of Diamond Jointed-Wing Configuration UAV Based on Lagrange's Equation[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2019, 20(5): 8-15.

same, and the rationality of the dynamics modeling in this paper is verified.

Key words: diamond joined-wing configuration UAV; Lagrange's equation; Kane equation; Lagrange multipliers; quaternion

近年来,随着无人机在军用和民用领域的应用,无人机的发展越来越快。无人机的动力学模型是无人机详细设计与控制的基础,因此较为重要。然而目前大部分无人机的动力学模型均是采用传统的牛顿-欧拉方程^[1-2]建立,随着无人机的快速发展,其布局、功能、结构均呈现出多样性,因此牛顿-欧拉方程已经不能完全满足现有无人机动力学建模的需求。为适应无人机的发展,与此同时诞生出很多新的动力学建模方法,如拉格朗日方程^[3-5]、Kane 方程^[6-7]、Gibbs-Appell 方程^[8]等。其中 Gibbs-Appell 方程应用较少,仍需较为深入地研究;Kane 方程在建模过程中需要取偏线速度矩阵和偏角速度矩阵进行辅助建模,这种建模方法较难理解,但其在建模过程中能主动消掉系统内部的约束力,减少对约束力的处理,对于约束系统的动力学建模问题较有优势;拉格朗日方程建模最终结果为二阶偏微分方程组,仿真计算量较大,但其建模过程相比于其他几种建模方法更为模块化,针对不同建模对象只需修改相应模块的内容即可。综上所述拉格朗日方程与 Kane 方程在未来无人机的动力学建模中更具优势。

针对以上情况,主要对拉格朗日方程的动力学建模方法进行研究,选取目前较为新颖的菱形翼布局无人机为算例,选取四元数参数化其姿态,建立其约束矩阵,通过虚功建立其广义力和力矩模型,最终基于拉格朗日方程以矩阵的形式推导并建立其动力学模型。除此之外对拉格朗日方程、Kane 方程以及 ADAMS 软件的动力学建模方法进行对比,并分析对比几种建模方法的优缺点和适用范围,其结论可为现有无人机的动力学建模提供方法参考。

1 四元数及其约束介绍

首先对四元数及其性质进行相应的描述以支撑后文的动力学建模。四元数与欧拉角均可用于描述研究对象的姿态,其中四元数属于带约束^[9]的姿态坐标而欧拉角属于不带约束的姿态坐标。假设存在坐标系 (a, a_x, a_y, a_z) 和 (b, b_x, b_y, b_z) ,则坐标系 (a, a_x, a_y, a_z) 相对于坐标系 (b, b_x, b_y, b_z) 的姿态可以用四元数表示成如下形式:

$$q^{ba} = [\sigma^{ba} \ \eta^{ba}] = \left[a \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^T \quad (1)$$

式中: $\sigma^{ba} = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T = a \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$; $\eta^{ba} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$; a 为由坐标系 (a, a_x, a_y, a_z) 到坐标系 (b, b_x, b_y, b_z) 单位长度的旋转轴; ϕ 为由坐标系 (a, a_x, a_y, a_z) 到坐标系 (b, b_x, b_y, b_z) 的旋转角度。

同样也可得到四元数与欧拉角之间的转换关系式为^{[10]17}:

$$\begin{cases} \phi = \arctan\left(\frac{2(a_0 a_1 + a_2 \eta^{ba})}{1 - 2(a_1^2 + a_2^2)}\right) \\ \theta = -\arcsin\left(2(a_0 a_2 - a_1 \eta^{ba})\right) \\ \Psi = \arctan\left(\frac{2(a_0 \eta^{ba} + a_1 a_2)}{1 - 2(a_2^2 + \eta^{ba^2})}\right) \end{cases} \quad (2)$$

参考相关文献^{[10]18}可得四元数受到单位长度的约束如下:

$$[\sigma^{ba}]^T \sigma^{ba} + [\eta^{ba}]^T \eta^{ba} = 1 \quad (3)$$

式中: $[\sigma^{ba}]^T$ 为 σ^{ba} 的转置; $[\eta^{ba}]^T$ 为 η^{ba} 的转置,为数值。

将式(3)两边同时求导可得:

$$2[\sigma^{ba}]^T \dot{\sigma}^{ba} + 2\eta^{ba} \dot{\eta}^{ba} =$$

$$[2[\sigma^{ba}]^T \ 2\eta^{ba}] \begin{bmatrix} \dot{\sigma}^{ba} \\ \dot{\eta}^{ba} \end{bmatrix} [2[\sigma^{ba}]^T \ 2\eta^{ba}] \dot{q}^{ba} = 2 \quad (4)$$

式中: $\dot{\sigma}^{ba}$ 为 σ^{ba} 关于时间的导数; $\dot{\eta}^{ba}$ 为 η^{ba} 关于时间的导数。

四元数与角速度之间的关系式^{[10]35}如下:

$$\omega^{ba} = \underbrace{\left[2[\eta^{ba} I - \sigma^{ba x}] - 2\sigma^{ba} \right]}_{S^{ba}} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}^{ba} \\ \dot{\eta}^{ba} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$I = \text{diag}[1, 1, 1] \quad (6)$$

$$\sigma^{ba x} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 & a_1 \\ a_2 & 0 & -a_0 \\ -a_1 & a_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: ω^{ba} 为坐标系 (a, a_x, a_y, a_z) 相对于坐标系 (b, b_x, b_y, b_z) 的角速度矩阵; S^{ba} 为四元数 q^{ba} 随时间的变化率和角速度 ω^{ba} 之间的映射矩阵。同理可得角速度 ω^{ba} 与四元数 q^{ba} 之间的映射矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}^{ba} \\ \dot{\eta}^{ba} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[\eta^{ba} I + \sigma^{ba x} \right]}_{\Gamma^{ba}} \omega^{ba} \quad (8)$$

式中: Γ^{ba} 为角速度 ω^{ba} 与四元数 q^{ba} 随时间的变化率之间的映射矩阵。

2 模型描述

2.1 参考坐标系描述

对菱形翼布局无人机进行动力学建模,该无人机的整体构型如图1所示。

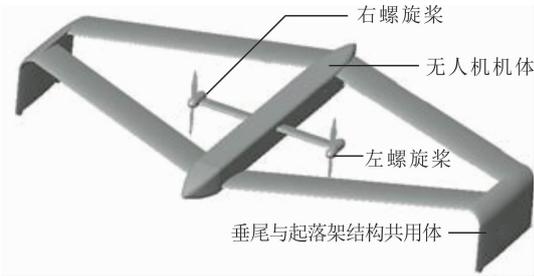


图1 菱形翼布局无人机

该菱形翼布局无人机主要由无人机机体(包含机翼、机身以及垂尾与起落架结构共用体)、左螺旋桨以及右螺旋桨所组成,将菱形翼布局无人机划分为无人机机体 b 、左螺旋桨 c 和右螺旋桨 d 分别进行分析,选取地面参考点 e 以及无人机机体、左螺旋桨和右螺旋桨的质心作为原点建立右手坐标系,具体如图2所示。其中 e 坐标系固定于地面,而 b, c, d 坐标系可随无人机的机体、左螺旋桨和右螺旋桨一起运动。

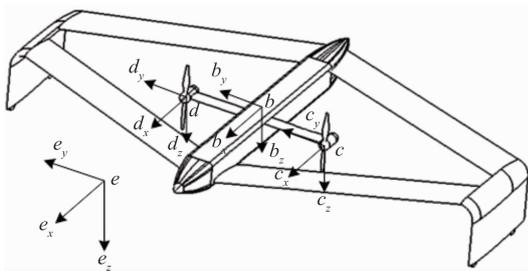


图2 菱形翼布局无人机坐标系

2.2 广义坐标描述

选取广义坐标具体如下,用于描述该菱形翼布局无人机的质心位置与菱形翼布局无人机的姿态:

$$\mathbf{p}^{eb} = [\mathbf{r}^{eb} \quad \mathbf{q}^{eb}]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{V}^{eb} = \dot{\mathbf{r}}^{eb}, \boldsymbol{\omega}^{eb} = \mathbf{S}^{eb} \dot{\mathbf{q}}^{eb} = \mathbf{S}^{eb} [\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{eb} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}^{eb}]^T \quad (10)$$

式中: \mathbf{r}^{eb} 用于描述菱形翼布局无人机机体质心相对于参考坐标系原点 e 的位置; \mathbf{q}^{eb} 为用于描述菱形翼布局无人机机体坐标系相对于参考坐标系姿态的四元数; \mathbf{V}^{eb} 为菱形翼布局无人机机体质心相对于参考坐标系原点 e 的线速度; $\boldsymbol{\omega}^{eb}$ 菱形翼布局无人机机体坐标系相对于参考坐标系姿态的角速度; $\boldsymbol{\sigma}^{eb}$ 与 $\boldsymbol{\eta}^{eb}$ 和式(1)中的定义一致; \mathbf{S}^{eb} 为四元数 \mathbf{q}^{eb} 随时间的变

化率和角速度 $\boldsymbol{\omega}^{eb}$ 之间的映射矩阵,其具体形式为:

$$\mathbf{S}^{eb} = \left[2[\boldsymbol{\eta}^{eb} \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}^{eb} \boldsymbol{\sigma}^{eb}] - 2\boldsymbol{\sigma}^{eb} \right] \quad (11)$$

3 拉格朗日方程的应用

3.1 系统的约束介绍

建模对象菱形翼布局无人机自身并无约束,因此建模系统的约束仅由所选取的广义坐标产生。当选取四元数用于描述菱形翼布局无人机的姿态时,四元数之间的约束矩阵即为菱形翼布局无人机系统的约束矩阵,由式(4)可得无人机系统约束矩阵的具体形式如下:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2[\boldsymbol{\sigma}^{eb}]^T & 2\boldsymbol{\eta}^{eb} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Xi}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{eb} \\ \mathbf{q}^{eb} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (12)$$

式中: $\boldsymbol{\Xi}$ 为菱形翼布局无人机系统的约束矩阵。

3.2 系统的动能与势能介绍

该菱形翼布局无人机的动能^[11]主要由平动动能和转动动能组成,其具体形式如下所示:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{A} \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{V}^{eb} \quad \boldsymbol{\omega}^{eb}]^T, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$m = m_b + m_c + m_d \quad (15)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_c \omega_c^2 + \frac{1}{2} \mathbf{J}_d \omega_d^2 \quad (17)$$

式中: m 为无人机的总质量; m_b, m_c, m_d 分别为无人机机体、左、右螺旋桨的质量; \mathbf{J} 为无人机的总转动惯量矩阵; \mathbf{J}_b 为刚体 j 的转动惯量矩阵; \mathbf{J}_c 和 \mathbf{J}_d 分别为左右螺旋桨的转动惯量; ω_c 和 ω_d 分别为左右螺旋桨的转速; \mathbf{A} 为左右螺旋桨转动动能之和。

对于该菱形翼布局无人机的势能主要通过菱形翼布局无人机的机体质心 b 与坐标原点 e 之间的高度差得到,其具体形式如下:

$$U = mg \mathbf{I}_3^T \mathbf{r}^{eb} \quad (18)$$

式中:

$$\mathbf{I}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (19)$$

3.3 系统的广义力和力矩介绍

通过虚功的方式得到菱形翼布局无人机的广义力和力矩矩阵。首先菱形翼布局无人机左右螺旋桨

c, d 到菱形翼布局无人机质心的实位移分别为 r^{bc} 和 r^{bd} , 因此其虚位移为 δr^{bc} 和 $r\delta^{bd}$, 进而可以得到菱形翼布局无人机所产生的广义力和力矩矩阵为:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} C_{cb}F_b + C_{cc}F_c + C_{cd}F_d \\ \mathbf{S}^{cbT} \left[\mathbf{M}_{\text{sum}} \right] + \frac{\partial [C_{cb}r^{bc}]^T}{\partial q^{cb}} C_{cc}F_c + \frac{\partial [C_{cd}r^{bd}]^T}{\partial q^{cb}} C_{cd}F_d \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_{\text{sum}} = \mathbf{M}_b + C_{bc}M_c + C_{bd}M_d \quad (21)$$

式中: C_{ij} 为坐标系 (j, j_x, j_y, j_z) 向坐标系 (i, i_x, i_y, i_z) 的转换矩阵; F_b, M_b 为无人机机体的气动力和力矩模型^[12]; F_c, M_c 为左螺旋桨气动力和力矩模型; F_d, M_d 为右螺旋桨气动力和力矩模型^[13]。

3.4 拉格朗日方程介绍

拉格朗日方程^[14]的具体形式如下所示:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{P}^{cb}} \right]^T - \left[\frac{\partial L}{\partial P^{cb}} \right]^T = \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau} \quad (22)$$

式中: $\boldsymbol{\Xi}$ 为系统的约束矩阵; $\boldsymbol{\lambda}$ 为拉格朗日乘子, 在此处为一个 7×1 的矩阵; $\boldsymbol{\tau}$ 为菱形翼布局无人机广义力和力矩矩阵; P^{cb} 为系统的广义坐标; 系统的拉格朗日函数具体如下所示:

$$L = T - U = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{A} - mg \mathbf{I}_3^T \mathbf{r}^{cb} \quad (23)$$

对式(22)进行化简求解, 式(22)中的项

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}^{cb}} \right)$ 可化简为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{P}^{cb}} \right) = \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{v}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}} \quad (24)$$

式中:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^{cb} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式(22)中的项 $\left(\frac{\partial L}{\partial P^{cb}} \right)$ 可采用链式求导法则^[15]

化简为:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial P^{cb}} \right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}^{cb}} \quad \frac{\partial L}{\partial q^{cb}} \right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}^{cb}} \quad 0 \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}^{cb}} \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}^{cb}} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{cb}}{\partial q^{cb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L}{\partial q^{cb}} \end{bmatrix} = \left[-mg \mathbf{I}_3^T \quad 0 \right] + \mathbf{v}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{cb}}{\partial q^{cb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L}{\partial q^{cb}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中: $\frac{\partial L}{\partial P^{cb}}$ 为 1×7 阶矩阵; $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}^{cb}}$ 为 1×3 阶矩阵; $\frac{\partial L}{\partial q^{cb}}$ 为 1×4 阶矩阵。式(26)左右两端可以成立的理论依

据为数量函数对于矩阵的导数等于数量函数关于每个矩阵元素的导数所组成的矩阵。其中:

$$\frac{\partial L}{\partial q^{cb}} = 0 \quad (27)$$

将式(23), (24)和(26)代入式(22), 可以得到化简后的拉格朗日方程为:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} + \left[\dot{\mathbf{S}}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{cb}}{\partial q^{cb}} \right]^T \end{bmatrix} \right] \mathbf{M} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} mg \mathbf{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\tau} \quad (28)$$

对拉格朗日方程中的拉格朗日乘子矩阵的处理方法进行介绍。首先应当通过矩阵直积的方式得到矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}$, 使其满足如下条件:

$$\boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\Xi}^T = \mathbf{0} \quad (29)$$

又由于与之间存在有如下关系:

$$\mathbf{S}^{cb} \boldsymbol{\Gamma}^{cb} = \mathbf{I} \quad (30)$$

因此得到矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}$ 的具体形式如下:

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Gamma}^{cb} \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中: $\boldsymbol{\Gamma}^{cb}$ 为角速度 $\boldsymbol{\omega}^{cb}$ 与四元数 q^{cb} 随时间的变化率之间的映射矩阵, 其具体形式如下:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{cb} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{cb} \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^{cb, x} \\ -\boldsymbol{\sigma}^{cb, T} \end{bmatrix} \quad (32)$$

在式(28)两端同时左乘矩阵 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 。对 $\mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}$ 左乘 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 后, 由于存在:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{S}^T = \mathbf{I} \quad (33)$$

因此其可化简为:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} \quad (34)$$

对于等号左边的第2项左乘 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 后可将其化简如下:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \left[\dot{\mathbf{S}}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}^{cb}}{\partial q^{cb}} \right]^T \end{bmatrix} \right] \mathbf{M} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\omega}^{cb, x} \end{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (35)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}^{cb, x}$ 与式(7)中矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{cb, x}$ 的形式一致。

对于等号左边第3项左乘 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 后不发生变化。

对于等号右边第1项左乘 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 后可化简为:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \boldsymbol{\Xi}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (36)$$

对于等号右边第2项左乘 $\boldsymbol{\Upsilon}^T$ 后为:

$$\boldsymbol{\Upsilon}^T \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} C_{cb}F_b + C_{cc}F_c + C_{cd}F_d \\ \left[\boldsymbol{\Gamma}^{cb} \right]^T \left[\mathbf{S}^{cbT} (\mathbf{M}_{\text{sum}}) + \frac{\partial (C_{cb}r^{bc})^T}{\partial q^{cb}} C_{cc}F_c + \frac{\partial (C_{cd}r^{bd})^T}{\partial q^{cb}} C_{cd}F_d \right] \end{bmatrix} \quad (37)$$

又由于四元数存在有固有性质^[16]:

$$\mathbf{\Gamma}^{b^x} \frac{\partial [\mathbf{C}_{db} \mathbf{r}^{b^x}]^T}{\partial \mathbf{q}^{b^x}} = \mathbf{r}^{b^x} \mathbf{C}_{be} \quad (38)$$

式中: \mathbf{r}^{b^x} 与式(7)中矩阵 $\boldsymbol{\sigma}^{b^x}$ 的形式一致。

因此将式(38)代入式(37)后可化简得到:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{\Gamma}^T \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{db} \mathbf{F}_b + \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{F}_c + \mathbf{C}_{ad} \mathbf{F}_d \\ \mathbf{M}_{\text{sum}} + \mathbf{r}^{b^x} \mathbf{C}_{be} \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{F}_c + \mathbf{r}^{b^x} \mathbf{C}_{be} \mathbf{C}_{ad} \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \quad (39)$$

将式(34)、(35)、(36)、(39)代入式(28)最终可得菱形翼布局无人机的动力学模型为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}^{b^x} = \mathbf{S} \mathbf{V}^{b^x} \\ \dot{\mathbf{v}}^{b^x} = \mathbf{M}^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{M} \mathbf{S} \dot{\mathbf{P}}^{b^x} + \mathbf{G}] \end{cases} \quad (40)$$

式中:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\omega}^{b^x} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} mg \mathbf{I}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^{b^x} \end{bmatrix} \quad (42)$$

4 Kane 方程与 ADAMS 软件的应用

采用 Kane 方程和 ADAMS 软件对该菱形翼布局无人机进行动力学建模与仿真,并将仿真结果与拉格朗日方程仿真结果进行对比。

4.1 Kane 方程的应用

选取菱形翼布局无人机的机体质心作为参考点,基于 Kane 方程建立其动力学模型如下所示:

$$\mathbf{K}^* = \sum_j \left[\left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{p}} \right] [-\mathbf{m}_j \mathbf{v}_j] + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial \mathbf{p}} \right] [-\mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j] \right] \quad (j = b, c, d) \quad (43)$$

$$\mathbf{K} = \sum_j \left[\left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{p}} \right] [\mathbf{F}_j] + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial \mathbf{p}} \right] [\mathbf{M}_j] \right] \quad (j = b, c, d) \quad (44)$$

$$\mathbf{K}^* + \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (45)$$

式中: j 取 b, c, d 时分别代表无人机机体、左螺旋桨以及右螺旋桨; $\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial \mathbf{p}}$ 为偏线速度矩阵; $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial \mathbf{p}}$ 为偏角速度矩阵; \mathbf{p} 为无人机的广义坐标;上文式(43)代表的是无人机的广义惯性力和力矩矩阵;式(44)代表的是无人机的广义主动力和广义主动力矩矩阵;式(45)为基于 Kane 方程建立的无人机六自由度动力学模型。

需要注意的是凯恩方程在建立无人机六自由度模型时,其所采用的广义主动力和广义主动力矩与上文基于拉格朗日方程建模时所采用的广义力和力

矩是一致的。凯恩方程与拉格朗日方程建模的不同之处在于,其主要是通过偏线速度矩阵和偏角速度矩阵将各个刚体的力和力矩引入参考点进行动力学建模。

4.2 ADAMS 软件的应用

ADAMS(Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems)是机械动力学的分析软件^[17-18],本文在 ADAMS/View 中建立该菱形翼布局无人机的动力学模型,建立地面固定坐标系 Marker_e,以无人机质心为原点建立随无人机一起运动的坐标系 Marker_b,以左右螺旋桨质心为原点分别建立坐标系 Marker_c, Marker_d。需要注意的是 ADAMS 中的坐标系其 Y 轴是向上的, X 轴是向后的, Z 轴垂直于 XOY 平面,在 ADAMS/View 中设定如下测量函数:

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{DX}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{DY}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{DZ}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ \omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{VX}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{VY}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{VZ}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_b \\ \theta_b \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{YAW}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{PITCH}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \\ \text{ROLL}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\omega_c = \text{WX}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \quad (49)$$

$$\omega_d = \text{WX}(\text{Marker}_b, \text{Marker}_e) \quad (50)$$

式中: ω_c, ω_d 分别表示左右螺旋桨的转速; (x_b, y_b, z_b) 描述无人机机体质心相对于参考坐标系原点的位置; (u_b, v_b, ω_b) 描述无人机质心相对于参考坐标系原点的线速度; (ϕ, θ, ψ) 描述无人机机体坐标系相对于参考坐标系的姿态。具体 ADAMS 软件建模结果见图 3、图 4。

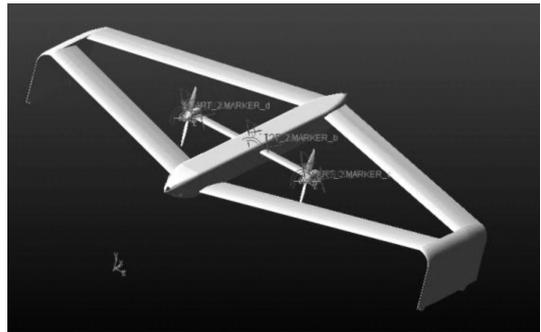


图3 菱形翼布局无人机 ADAMS 建模全局展示

ADAMS 软件建模与图 2 建模相比,主要有以

下两点不同:①两者所建立的参考坐标系不同;②ADAMS主要是通过转动副来模拟螺旋桨相对于无人机机体的转速进而求得螺旋桨的力和力矩。ADAMS软件可以通过其内部求解器,在无人机施加力和力矩的情况下,得出无人机的动力学特征。

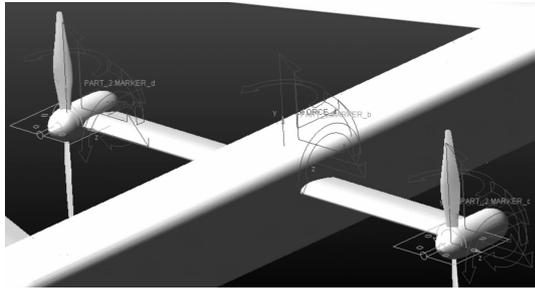


图 4 菱形翼布局无人机 ADAMS 建模局部展示

5 算例验证与分析

5.1 模型验证

首先为验证所提拉格朗日方程动力学建模方法的准确性,采用该方法建立文献[19]中的无人机伞降回收六自由度动力学模型,并与实验数据进行对比,具体结果如图 5~6 所示。

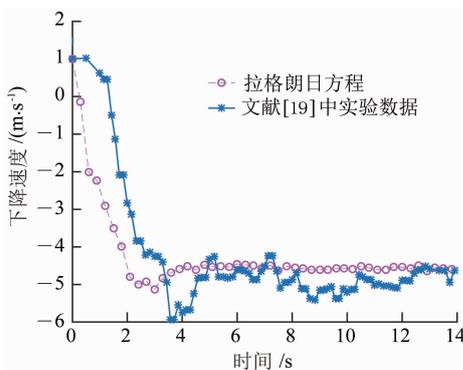


图 5 无人机伞降回收下降速度曲线

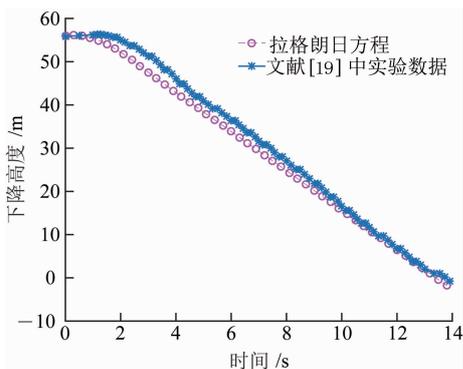


图 6 无人机伞降回收飞行高度曲线

通过图 5~6 拉格朗日方程仿真结果与文献[19]中实验数据的对比,验证该拉格朗日方程建模

方法的合理性。

5.2 菱形翼布局无人机仿真对比

为对拉格朗日方程、Kane 方程和 ADAMS 软件建模的优缺点进行总结,对拉格朗日方程、Kane 方程以及 ADAMS 软件的仿真结果进行对比分析。关于仿真结果的展示在此做以下说明:①ADAMS 软件建模坐标系与拉格朗日方程建模坐标系有所不同,将其仿真结果通过坐标转换矩阵转换至拉格朗日方程建模坐标系下进行对比;②将 ADAMS 软件仿真数据导入 MATLAB 软件中进行处理;③统一采用龙格库塔方法进行数值仿真,仿真采用固定步长;④以上几种建模方法所采用的菱形翼布局无人机的广义力和力矩模型均是一致的。

拉格朗日方程仿真初始条件为:

$$\mathbf{r}^{\text{ob}} = [0 \ 0 \ -60]^T,$$

$$\mathbf{q}^{\text{ob}} = [0 \ \sin[1.5] \ 0 \ \cos[1.5]^T]$$

$$\mathbf{V}^{\text{ob}} = [12 \ 0 \ 0]^T, \boldsymbol{\omega}^{\text{ob}} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

凯恩方程以及 ADAMS 软件仿真初始条件均为:

$$\mathbf{r}^{\text{ob}} = [0 \ 0 \ -60]^T, \mathbf{q}^{\text{ob}} = [0 \ 3 \ 0]^T$$

$$\mathbf{V}^{\text{ob}} = [12 \ 0 \ 0]^T, \boldsymbol{\omega}^{\text{ob}} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

左右螺旋桨转速均为 2 000 r/min,并且在仿真过程中保持不变。由于无人机的侧滑角以及其余姿态角在仿真过程中均为 0,因此在仿真结果中并未展示,仿真结果见图 7~10。

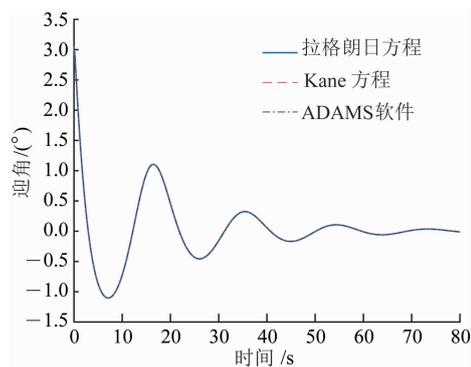


图 7 菱形翼翼布局无人机迎角曲线

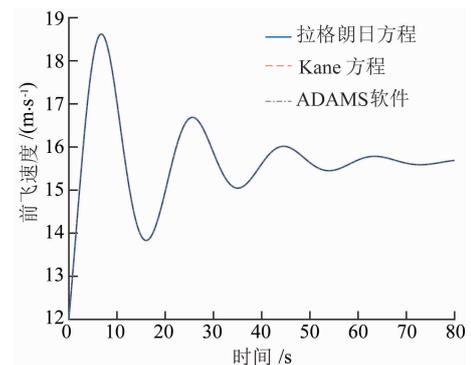


图 8 菱形翼布局无人机前飞速度曲线

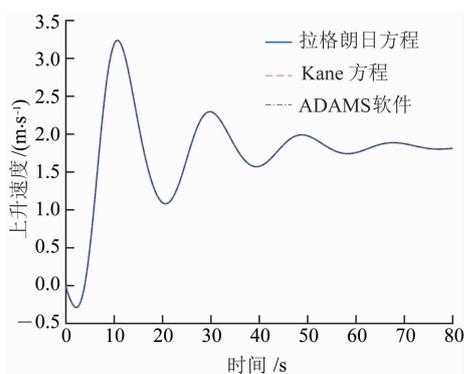


图9 菱形翼布局无人机上升速度曲线

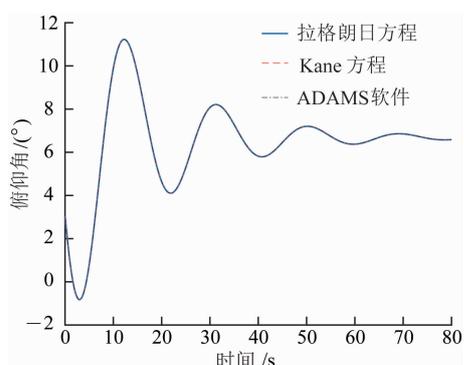


图10 菱形翼布局无人机俯仰角曲线

通过图7~10仿真结果的对比分析,可以得出:首先拉格朗日方程、Kane方程以及ADAMS软件的仿真结果基本一致,证明本文所提方法能够适用于无人机的动力学建模问题,同时也通过ADAMS软件的仿真结果验证基于拉格朗日方程和Kane方程进行无人机动力学建模的合理性。其次通过拉格朗日方程、Kane方程以及ADAMS软件仿真结果的一致性,验证这3种方法在本文模型下建模的实质是一样的,将仿真结果与前文公式推导结果进行呼应,由于拉格朗日方程建模结果化简后与凯恩方程建模结果化简后相比,仅多增加四元数随时间变化率与系统角加速度之间的映射矩阵,因此这两种方程建模结果的实质是一样的,这与仿真结果一致。

6 结论

通过菱形翼布局无人机的建模与仿真,可以得到如下结论:

1)提出一种基于拉格朗日方程建立无人机动力学模型的方法,并采用该方法建立菱形翼布局无人机的动力学模型,通过该方法、Kane方程以及ADAMS软件仿真结果的一致性,可以验证,该方法能够适用于无人机的动力学建模问题,且其仿真结果较为合理。

2)所提方法主要是采用四元数参数化无人机的姿态,采用虚功形式建立无人机的广义力和力矩模型,通过无人机的动能与势能建立无人机的拉格朗日函数,最终通过矩阵运算消掉拉格朗日方程中的拉格朗日乘子建立无人机的动力学模型。与现有建模方法相比,其优势在于建模思路清晰、可移植性和适合范围更强,即针对不同的研究对象,只需要改变其广义力和力矩模型即可,整体建模思路不用发生改变,因此其更适用于无人机的动力学建模问题。

3)通过动力学建模的分析,针对现有拉格朗日方程、Kane方程以及ADAMS软件建模而言,拉格朗日方程主要优势在于基于能量交换的方式进行动力学建模,建模精度较高,因此更适合用于无人机系统的精确动力学建模问题;Kane方程主要优势在于可避免求取系统的内部约束力和力矩,直接通过偏速度矩阵进行动力学建模,因此其更适合于无人机伞降等具有约束的系统动力学建模问题;ADAMS软件建模过程较为简单,因此其主要可用于无人机动力学模型的初步验证。

参考文献(References):

- [1] 高红岗,高正红,邓阳平,等.鸭式旋翼/机翼飞机悬停状态飞行动力学特性[J].航空学报,2017,38(11):26-37.
GAO H G, GAO Z H, DENG Y P, et al. Flight Dynamic Characteristics of Canard Rotor/wing Aircraft in Hover[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(11): 26-37. (in Chinese)
- [2] EDWARD F. II. Parachute Dynamics and Stability Analysis of the Queen Match Recovery System[Z]. AIAA-91-0879-CR, 1991: 351-364.
- [3] ESTES A, MAJJI M. Generalization of Lagrange's Equations for Constrained Hybrid-Coordinate Systems[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(3): 709-712.
- [4] 李家乐,王正平.基于Lagrange方法的单旋翼飞行器动力学建模[J].飞行力学,2016,34(4):16-18.
LI J L, WANG Z P. Dynamics Modeling for Monowing Rotorcraft Using Lagrange Method[J]. Flight Dynamics, 2016, 34(4): 16-18. (in Chinese)
- [5] 周小三,张毅.基于非标准Lagrange函数的动力学系统的广义能量积分与Whittaker降阶法[J].南京航空航天大学学报,2017,49(2):269-275.
ZHOU X S, ZHANG Y. Generalized Energy Integral and Whittaker Method of Reduction for Dynamics Systems with Non-Standard Lagrangians[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 49(2): 269-275. (in Chinese)

- [6] 蒋建平, 李东旭. 带太阳帆板航天器刚柔耦合动力学研究[J]. 航空学报, 2006, 27(3): 418-422.
JING J P, LI D X. Research on Rigid Flexible Coupling Dynamics of Spacecraft with Solar Panel[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(3): 418-422. (in Chinese)
- [7] 夏丹, 程维山, 刘考军, 等. 基于 Kane 方法的仿鱼机器人波状游动的动力学建模[J]. 机械工程学报, 2009, 45(6): 41-49.
XIA D, CHEN W S, LIU K J, et al. Dynamic Modeling of a Fishlike Robot with Undulatory Motion Based on Kane's Method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(6): 41-49. (in Chinese)
- [8] 郭冠平. 相对论转动变质量系统的 Gibbs-Appell 方程[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2002, 19(1): 27-30.
GUO G P. Gibbs-Appell Equation of Relativistic Rotational Variable Mass System[J]. Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition), 2002, 19(1): 27-30. (in Chinese)
- [9] CHANG L B, HU B Q, CHANG G B. Modified Unscented Quaternion Estimator Based on Quaternion Averaging[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(1): 305-308.
- [10] HUGHES P C. Spacecraft Attitude Dynamics[M]. Dover, Mineola: John Wiley And Sons, 2004: 20-29.
- [11] YAN L, XU W F, HU Z H, et al. Virtual-base Modeling and Coordinated Control of a Dual-arm Space Robot for Target Capturing and Manipulation[J]. Multibody System Dynamics, 2019, 45(4): 431-455.
- [12] 孙俊磊. 菱形翼布局飞机总体气动外形的研究与应用[D]. 西安: 西北工业大学, 2018: 21-49.
SUN J L. Research and Application of the Overall Aerodynamic Shape of the Diamond Joined-Wing Configuration UAV[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2018: 21-49. (in Chinese)
- [13] 曹芸芸, 陈仁良. 倾转旋翼飞行器的操纵策略和配平方法[J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(1): 6-10.
CAO Y Y, CHEN R L. Control Strategy for Aircraft Trimming in Steady Level Flight[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(1): 6-10. (in Chinese)
- [14] 陈建平, 宁雷鸣, 张红英, 等. 基于多体动力学的大型翼伞系统飞行仿真分析[J]. 飞行力学, 2015, 33(6): 486-490.
CHEN J P, NING L M, ZHANG H Y, et al. Flight Simulation of Large Parafoil-payload Systems Based on Multibody Dynamics[J]. Flight Dynamics, 2015, 33(6): 486-490. (in Chinese)
- [15] HOGAN F R, FORBES J R. Modeling of Spherical Robots Rolling on Generic Surfaces[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 35(1): 91-109.
- [16] FORBES J R. Identities for Deriving Equations of Motion Using Constrained Attitude Parametrizations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(4): 1283-1289.
- [17] 张俊, 曹俊, 陈敏. 基于 Adams 的伞弹系统降落过程动力学仿真[J]. 电子机械工程, 2015, 31(1): 57-59.
ZHANG J, CAO J, CHEN M. Dynamics Simulation of Bomb-parachute System during Falling Process Based on Adams[J]. Electro-Mechanical Engineering, 2015, 31(1): 57-59. (in Chinese)
- [18] 裴锦华, 何成, 王陶, 等. 小型固定翼无人机绳钩回收过程动力学分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2017, 49(5): 693-698.
PEI J H, HE C, WANG T, et al. Dynamics Analysis of Rope Hook Recovery System for Fixed Wing UAV[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 49(5): 693-698. (in Chinese)
- [19] 吴翰, 王正平, 周洲, 等. 基于凯恩方程的无人机伞降落回收动力学建模与仿真[J]. 北京航空航天大学学报, 2019, 45(6): 1256-1265.
WU H, WANG Z P, ZHOU Z, et al. Dynamics Modeling and Simulation of UAV Parachute Recovery Based on Kane Equation[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(6): 1256-1265. (in Chinese)

(编辑: 姚树峰)