

# 基于庞加莱截面点的二阶混沌系统状态的定量判别

蔺向阳, 陈长兴, 凌云飞, 黄继尧

(空军工程大学研究生院, 西安, 710051)

**摘要** 为增强对二阶混沌系统状态判别的效率与准确性,基于 Duffing 振子特性,利用庞加莱截面点密集程度作为其系统混沌状态的判据,构造相应函数模型用以定量表征其系统状态判据。利用特定参数下二阶混沌系统表现出的不同程度的周期特性,以策动力周期为采样周期对系统输出进行等周期频闪采样,获得庞加莱截面点。通过对固定数目的相邻样点离差均方值进行计算,定量表征出其样点分布的集中程度。通过进一步实验确定合适的阈值,实现混沌状态的判别。基于混沌的基本特征,实现从系统庞加莱截面点的角度进行混沌状态的判断,减小了运算复杂度,弱化了计算机数值解的计算误差的影响,增加检测准确度。通过选择合适系统初值与采样区间,缩短了采样时长,进而缩短判定时间,提高判定效率。后以二阶周期驱动的 Duffing 振子为例进行实验,得到实验结果,证明了此定量判别方法的可行性。通过复现前人实验并与本实验结果进行对比,突出本判定方法相比于前人,具有更高的准确度与更快的判定效率。

**关键词** 混沌状态;Duffing 振子;庞加莱截面点;离差均方值

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2019.02.013

**中图分类号** TN911 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2019)02-0086-08

## The State Quantificational Judgment on Second-Order Chaos Based on the Poincare Section Points

LIN Xiangyang, CHEN Changxing, LING Yunfei, HUANG Jiyao

(Graduate School, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** In order to judge the state of second-order chaos system more accurately and efficiently, in this paper, starting from the characteristic of Duffing oscillator and using the intensity of Poincare section points as the criterion of chaotic state, a quantitative description has been developed to distinct the state of chaotic by constructing a function. The method is mainly according to different periodic characteristic of second-order chaotic system showing in specific conditions. To obtain the Poincare section points, the system output is sampled as a constant period, which is all just the same to the period of the driving force. Based on the calculation to the deviation's mean square value of a fixed number of adjacent sampling points, this method indicates concentrate degree of the sampling points' distribution quantitatively. Then through the further experiment, an appropriate threshold can be determined and the chaotic state can be judged. The method directly uses the basic characteristics of chaos as the criterion to realize the chaotic state judgment from the system Poincare section's point, greatly reducing the computation complexity, weakening the effect of the

**收稿日期:** 2018-07-06

**基金项目:** 国家自然科学基金(61701534)

**作者简介:** 蔺向阳(1994—),男,河南孟州人,硕士生,主要从事电子科学与技术研究。E-mail:95014052@qq.com

**引用格式:** 蔺向阳, 陈长兴, 凌云飞, 等. 基于庞加莱截面点的二阶混沌系统状态的定量判别[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2019, 20(2): 86-93. LIN Xiangyang, CHEN Changxing, LING Yunfei, et al. The State Quantificational Judgment on Second-Order Chaos Based on the Poincare Section Points[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2019, 20(2): 86-93.

machine error when computer numerically is calculating and the detection accuracy is increasing. The result shows that the sampling time is shortened, thus shortening the time of decision and improving the efficiency of decision. Through conducting an experiment by using the Duffing oscillator driven by Second order periodic force as an example, an anticipative conclusion is reached to prove the feasibility of the theory. By reproducing the experiments of former theory, and compared this theory to the former, this theory has higher accuracy and efficiency.

**Key words:** chaotic state; Duffing oscillator; Poincare section points; deviation's mean square value

弱信号检测的军事意义十分重大,广泛应用于电子侦查与保密通信,而混沌理论凭借其优良特性成为现代弱信号检测的重要手段<sup>[1-4]</sup>。

在混沌研究中,如何快速准确地判断混沌状态至关重要。随着混沌理论的高速发展,混沌状态检测与判别的方法多种多样。总体来说分定性定量判断 2 种:定性判断简单直观,原理清晰,如相轨迹法、庞加莱截面法、功率谱法等,缺点是没有一个定量标准,存在模糊区域<sup>[6]</sup>。定量方法则直接对混沌特征量进行计算,判定准确,如分数维法、Kolmogorov 熵以及 Lyapunov 指数法等<sup>[7-8]</sup>。但这些特征量的计算通常需要数据量庞大,计算过程繁琐,时效性差,不能满足实用要求。除以上经典判别法之外,李士林等在工程上提出了图像识别法,算法简单但是工程实现比较复杂<sup>[9]</sup>。P. Glendinning 提出 Melnikov 函数法,度量庞加莱映射上双曲不动点的不稳定流形与稳点流形间的距离,实现从庞加莱映射角度建模对状态定量判定,但仍然计算繁琐<sup>[10]</sup>。吴冬梅提出圆域分割法,谢永兴后将其改进为改进型圆域分割,实现从相图角度建模对状态进行定量判断,运算复杂度降低,但需实验数据较大,实验阈值设定相对随机,故具有一定局限性<sup>[2,11]</sup>。

针对以上方法的不足,本文根据混沌状态的本质特性提出了基于庞加莱截面点的离差均方值判定法。在混沌的判定中,庞加莱截面法<sup>[8]</sup>作为最常用的手段之一,理论成熟。传统的庞加莱截面判定仅仅是根据目测,以截面的不同特征来识别运动系统状态。这种方法的优点是能够直观区分明显的混沌与周期运动,而这种方法属于完全定性判断,受到计算误差、目测误差、混沌程度等因素影响。本文在得到庞加莱截面点后,根据其点集的分布,对其点求取离差均方值,进而实现定量方式表征出点集的密集程度,又具有低的运算复杂度与较高时效性。通过实验确定一个合适的阈值,用以判决系统的运动状态,提高了准确性。最终能够在确保判定准确性的前提下尽快得出判定结果,提高判定效率。

## 1 判定原理

### 1.1 Holmes-Duffing 方程

在混沌系统中,Duffing 振子具有丰富的动力学特性。故以 Duffing 振子作为实验系统,标准 Holmes 型 Duffing 方程的表达式为:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + x^3 = F_d \cos(\omega t) \quad (1)$$

式中: $\mu$  为阻尼系数; $F_d$  为策动力幅值; $\omega$  为策动力角频率。

当有系统外小信号输入系统时,式(1)将变为:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + x^3 = F_d \cos(\omega t) + s(t) \quad (2)$$

式中: $s(t)$  为系统外输入小信号。在实际使用中,需要实现信号的频率与幅值对输出影响相互独立,常用到式(2)的一种等价形式:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} - \omega^2 x + \omega^2 x^3 = \omega^2 (F_d \cos(\omega t) + w(t)) \quad (3)$$

其对应的状态方程为<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega(-\mu y + x - x^3 + F_d \cos(\omega t) + s(t)) \end{cases} \quad (4)$$

本系统在混沌态与大周期态转变的过程中有如下特点:当阻尼系数  $\mu$  固定,策动力幅值  $F_d$  从 0 逐渐增大时,系统相图会首先显现出单周期,即内轨周期运动状态。然后经过短暂的倍周期分岔后进入混沌状态,并在一定范围内保持混沌。之后当  $F_d$  继续增大至一临界值时系统进入大周期运动状态,而且当  $F_d$  在第 1 个由混沌到大周期过渡的临界点时相图突变性最为明显<sup>[13-14]</sup>。因此选用 Duffing 振子进行实验效果更加明显,结果也更加具有代表性。

由于绝大多数自然条件下系统噪声为零均值白噪声,而 Duffing 振子对零均值噪声具有强免疫性<sup>[15]</sup>。且本实验主要研究对混沌状态的判断,故暂忽略噪声,仅考虑单一频率策动力对系统影响。在不影响实验结论前提下,不妨设定策动力的初相为 0。

### 1.2 判定基本原理

当系统处于周期运动状态时,总会在一个周期内,循环遍历轨道的每一个点,且每个相点在一个周期运动中对应的相位是固定的,因此以策动力周期

为采样周期,得到垂直于时间轴的  $x-y$  相平面的庞加莱截面上一系列点应该是同一个点或者分布在一个极小的邻域内;当系统处于混沌状态时,由于系统不再周期运动,因此以相同采样周期采样,得到垂直于时间轴的  $x-y$  相平面的庞加莱截面点应该广泛地分布于整个吸引盆内。在拟周期状态时,采样点会分布在闭合的外周期轨道上。

由此分析可知,周期态时系统由于周期性,各样点间距极小,故离差均方值最小。相反拟周期态的样点完全均匀分布于外周期轨道上,而根据轨道对称性其均值点必在其中心位置附近,故其离差均方值最大。混沌态由于其样点完全被包含在轨道之内,故其离差均方值应界于二者之间。因此根据不同的庞加莱截面是能够判定系统不同运动状态的。

### 1.3 判定点的选取

在计算采样点的密集程度时,重点在于判定点的选取,对于不同长度的判定点,运算复杂度和处理效率是不同的,更重要的是它将直接影响到最终判定结果的准确性。原则上最少只需要 2 个点就可以得到结果,即 2 点相同为周期态,2 点不同为混沌态。然而为提高准确性,在此对点数  $N$  的选取进行讨论。

本实验主要目的在于判定系统是否处于周期状态,而在一般的研究中,通常将系统的解分为 4 类:即常数解、周期解、拟周期解和混沌解<sup>[16]</sup>。由于常数解较为简易,在此不做过多讨论,主要研究周期态、拟周期态和混沌态。除此之外,在对双激励 Duffing 振子研究过程中还发现一种介于周期态与混沌态两者之间交替变化的状态——间歇混沌态(亦称为间歇周期态)。

从动力学行为分析,以上几种状态区别在于:

1) 周期运动状态下的系统,外加总策动力给系统提供的能量足以满足耗散系统周期运动所需消耗能量。故系统无论初值如何,在策动力的驱动下,总能不断调整状态至周期态。此时系统阻尼所耗散能量将与稳定的输入能量相等,系统将一直保持周期运动

2) 混沌运动状态下的系统,外加总策动力不足以提供系统周期运动所消耗能量,或者超过了系统所能调节的承受范围。此时由于能量输入输出失衡,系统无论初值如何,都将不能稳定地周期运动,进而导致无序运动,即混沌的发生。

3) 间歇混沌状态下的系统,外加总策动力提供的能量时而能够满足系统周期运动所需能量,时而又不能满足。如在输入中有周期策动力与周期变化的微弱小信号同时存在,而两者之间有固定频差,导

致总输入振幅周期性的时大时小。系统输出上表现为间歇性地时而周期运动时而混沌运动,即间歇混沌。因而间歇混沌状态是一种在特殊条件下才能出现的一种特殊现象。

4) 与混沌和间歇混沌不同的是,拟周期运动中不存在混沌成分。反而拟周期运动与周期运动有相似之处,理论上拟周期运动可以看作多个频率不可通约的周期运动的叠加。故从这个角度看,其原理可以参考周期运动。

综上所述,显然周期、拟周期与混沌状态都有明显特征。唯有间歇混沌中同时包含周期与混沌的特征,不易分辨。故在选取点时,点数至少应等于间歇周期的变化周期  $T_c = 2\pi/\Delta\omega$ ,本模型正是基于此原理来确定判定点数,其式中  $\Delta\omega$  是策动力与小信号间固定频差<sup>[17]</sup>。而当  $\Delta\omega < 0.3\omega$  时才能够明显的观察到间歇混沌现象<sup>[18]</sup>。为验证本文所构建模型可行性与高效性,使实验现象更加明显,在本次实验中设定  $\Delta\omega$  为  $0.01\omega$ 。

### 1.4 计算算法与阈值确定

考虑到 Duffing 方程的非线性与计算的精确性,需要用计算机软件仿真实验来求得其数值解<sup>[19]</sup>。本实验使用四阶龙格-库塔法,考虑到计算机在非定步长计算时可能会遗漏某些特殊点,计算点数规模也不容易控制,因此采用定步长实验,将采样步长频率设置为策动力频率的整数倍,保证在每一个周期采样点处都有计算数值。

在对判定阈值的确定上,考虑到对应固定的系统,阈值是确定不变的,为减小偶然误差增加准确度,在本文实验中采取多次实验求得先验信息的前提下确定阈值。

## 2 基于频闪采样的离差均方值判定法

### 2.1 判定过程

1) 将系统初值设置为  $(x_0, y_0)$ , 设实验时间长度为  $T_s$ , 采用定步长为  $\tau$  的 4 阶龙格-库塔算法求解方程的数值解,画出相应时域图与相图。

2) 采用固定周期频闪采样法对相图进行采样,采样周期与系统输入策动力周期  $T$  相同,即:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

3) 固定采样点数为  $N$ , 对  $T_s$  内系统输出进行采样,为避免初值影响舍去前  $N$  个值,对之后第  $N+1 \sim$  第  $2N$  共  $N$  个样点  $(x_i, y_i)$  值求取离差均方值,设为  $\xi$ , 有:

$$\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |L_i|^2 \quad (6)$$

式中:  $l_i$  是由中心点  $O(\bar{x}, \bar{y})$  指向各样点  $(x_i, y_i)$  的有向线段, 其中:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (7)$$

4) 通过实验得出不同状态对于  $\xi$  的临界点, 并将其设定为阈值  $\xi_m, \xi_n$ , 显然: ① 当  $\xi < \xi_m$  时判定为周期态; ② 当  $\xi_n \geq \xi \geq \xi_m$  时判定为非周期态; ③ 当  $\xi \geq \xi_n$  时判定为拟周期态。

### 2.2 算法复杂度分析

在方程的计算中, 由于本算法只取了第 2 个周期内的点, 故最少只需要计算 2 个周期内方程的解, 大大减少解方程所需时间。对采样点进行处理时, 式(6)可化简为:

$$\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \quad (8)$$

可知本算法仅用  $2N + 5$  次相乘,  $3N + 2$  次相加, 复杂度较低。

## 3 实验及分析

在实验中, 设定以下参数为恒定量:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.5 \\ \omega &= 2\pi \\ \tau &= 0.001 \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 1 \end{aligned}$$

由于 Duffing 振子属于受迫振子, 因此与策动力之间具有一定的相位滞后关系, 故系统初值将影响实验效果<sup>[20]</sup>。经过以往经验, 当策动力初相为 0 时, 系统初值设定为  $[-0.2, 1.156]$  时大致满足滞后度, 能够使系统以最快的方式直接进入大周期状态, 减少实验误差, 故本实验系统初值设置为  $[-0.2, 1.156]$ 。为使实验现象更加明显, 将采样点前后各给出 100 个点, 设定  $T_a = 3T_c$ , 而  $T_c = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{200\pi}{\omega} = 100$ , 故  $T_s = 300$ 。其中采样点选取为 300 个点中的第 101 个点~第 200 个点, 共 100 个点。

### 3.1 大周期态实验

令  $F_d = 0.825$ , 结合实验恒定参数, 得到实验结果如下:

大周期态系统输出时域图见图 1(a), 从 0~300 很明显一个特征就是幅值基本处于一条直线。选其中 131~170 这一部分放大见图 1(b), 有明显周期运动。

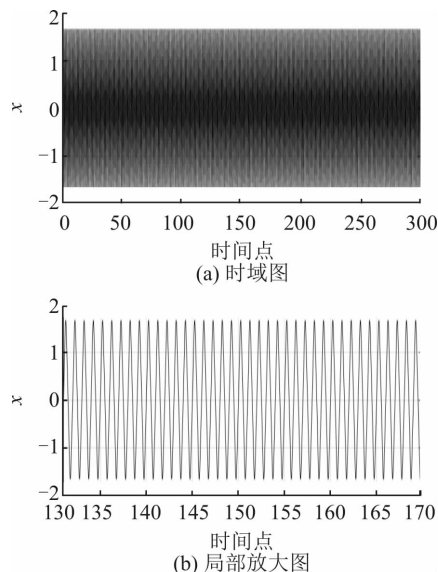


图 1 大周期态系统输出时域图

相图如图 2 所示, 是一条清晰的周期轨道。

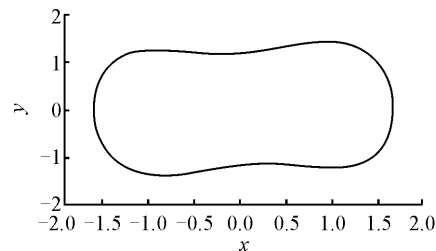


图 2 大周期态相图

对相点数据从 101~200 周期采样得到 100 个散点图见图 3, 其  $y$  值极差小于 0.003,  $x$  值极差小于 0.01。同时, 根据样点值求得离差均方值  $\xi = 4.73 \times 10^{-6}$ 。综合以上, 证明了系统周期态时完美的周期特性。

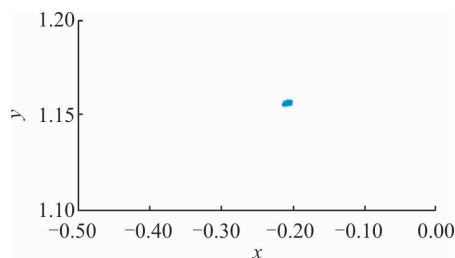


图 3 大周期态庞加莱样点图

### 3.2 混沌态实验

令  $F_d = 0.824$ , 同样结合其他默认实验参数, 通过实验得结果如下:

首先是时域图, 如图 4(a), 对比图 1(a) 有明显的不同, 前一段时间由于系统初值设置的缘故有一段过渡态, 但随时间增加  $x$  的幅值逐步减小, 最终在大概第 30 个周期系统进入混沌, 之后是稳定的混沌状态。同样将 131~170 这一部分放大见图 4(b), 能够看出, 由于是受迫振动, 系统运动有一个

与策动力频率相同的固定频率,然而又由于策动力不足以提供其周期震动,故与图 1(b)不同,图 4(b)显现出混沌状态。

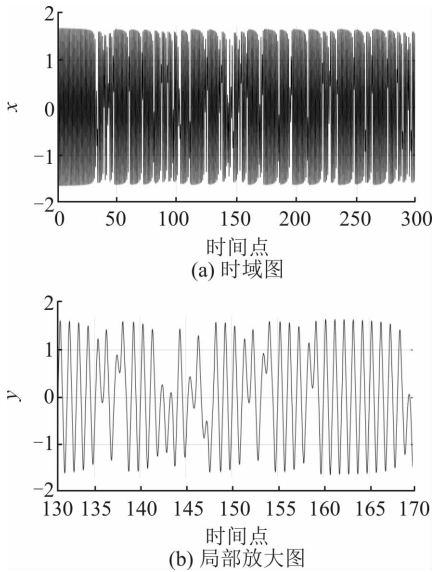


图 4 混沌态系统输出时域图

如图 5 显示,混沌与大周期在相图上也表现出明显区别:

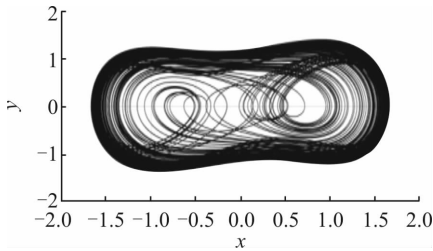


图 5 混沌态相图

在图 6 的庞加莱样点图上,能够看到样点极其离散地分布在吸引盆中。此时根据样点值得离差均方值  $\xi=0.1113$ ,比大周期态大了近 5 个数量级。二者极大的差异也验证了判决方法的可行性。

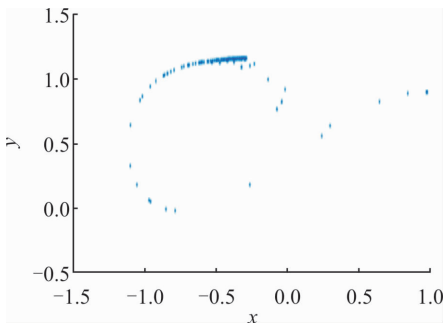


图 6 混沌态庞加莱样点图

### 3.3 间歇混沌态实验

如果只区分周期态与否而不加以细化,鉴于间歇混沌在很多方面具有混沌特性,可将其一并归为非周期态,即混沌态。而由于在采样点数的

确定上需要用到间歇混沌有关特性,在此对其简单介绍。

在间歇混沌态的实验中,需要实现输入振幅在混沌临界点附近的周期性变化。如前文所述,构造有频差的大信号和小信号相加整体作为输入,令小信号初相为 0,考虑到临界点的相图突变性,为增强实验效果,设振幅为  $A=0.2$ ,频率  $\omega_a=0.99\omega$ 、 $\Delta\tau\omega=0.1\tau\omega$ 、 $F_d=0.825$  通过实验得结果如下:

时域图 7(a)能够看出在 0~300 之间周期态和混沌态有明显的交替出现,放大 131~170 段见图 7(b),能够清晰地看到在 155 附近出现有明显的周期向混沌的过渡过程。

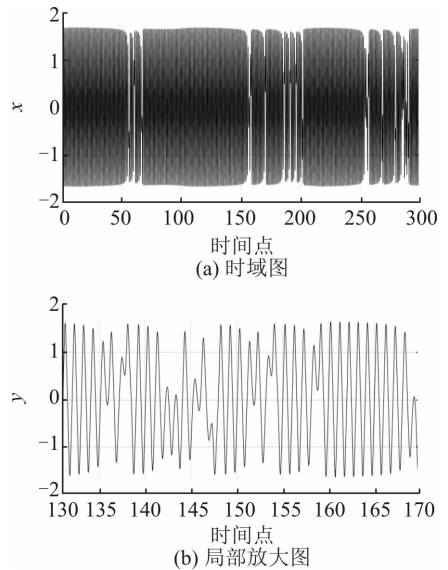


图 7 间歇混沌态系统输出时域图

图 8 为间歇混沌态相图,图 9 为其庞加莱样点图。

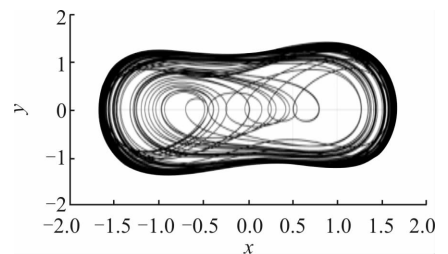


图 8 间歇混沌态相图

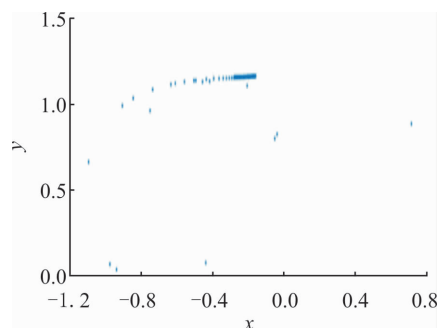


图 9 间歇混沌态庞加莱样点图

在图 8 的相图上,间歇混沌态与混沌态相似,但在时间相同情况下,混沌态相图更加杂乱无章,这是由于间歇混沌态本身就含有混沌态而又不全是混沌态。

观察其相点分布见图 9,亦能发现其与混沌态相似,但表现地更加集中,此时根据样点值求得离差均方值  $\xi=0.0445$ 。

### 3.4 拟周期态实验

由于 Duffing 振子的拟周期态实验条件比较苛刻,不容易产生。故考虑采用合成的方法直接构造出拟周期态现象。正如前文所述,拟周期态可以看作多个不可通约的周期态相叠加,在不影响实验效果的情况下,为简化实验,首先不妨设其为 2 个周期态分系统的叠加。构造 2 个周期不可通约的周期态大信号分别输入后进行相加作为输出,令 2 个信号初相为 0,振幅为  $A=F_d=0.825$ ,频率  $\omega_a=\omega, \omega_b=\sqrt{2}\omega$ 、通过实验得结果如下:

时域图 10(a)中可能对拟周期态的特征表现不是十分清晰,但与混沌态不同的是纹理亮暗分布规则,较为均匀。同时放大 131~170 段,从图 10(b)中能够看到各个周期内线图走向一致,幅值大致相同。

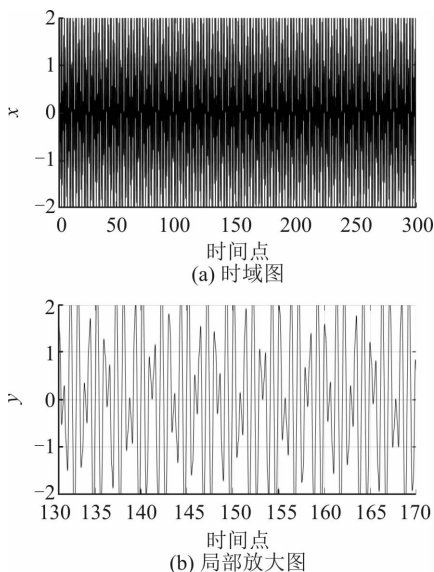


图 10 拟周期态系统输出时域图

在图 11 的相图上,虽然没有周期态的完美周期性,但是能够在纹理上发现其相图亮暗分布规则,具有对称性,这是混沌状态所不具备的。

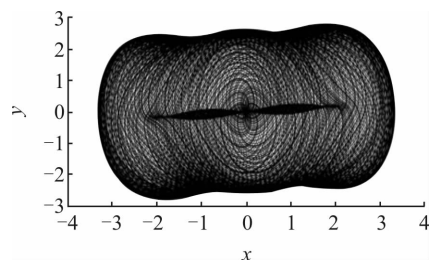


图 11 拟周期态相图

察其相点分布与理论完全吻合。此时根据样点值求得离差均方值  $\xi=1.2125$ ,超过了 1。

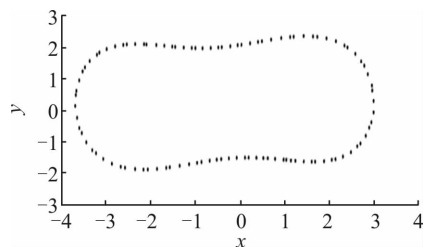


图 12 拟周期态庞加莱样点图

### 3.5 阈值设定与验证

根据上述实验结果,使用本文所构造的离差均方值来判别系统是否为周期态是非常直观的,然而对于判别阈值  $\xi_m$ ,是需要一定的实验基础上确定的,因为每个系统的阈值是固定的,但不同系统的阈值是不一样的。而相对于本实验系统,令  $F_d$  取不同的值,恒定参量不变,使实验时间取到 200 周期即可,重复多次实验得到表 1。

表 1 中列出了本实验系统输入策动力幅值  $F_d$  在混沌临界点 0.825 附近变化时(分辨率为 0.001),  $\xi$  的变化情况及所对应的系统状态。周期态时  $\xi > 1 \times 10^{-5}$ ,而混沌态时  $\xi$  大于 0.1,取其指数平均  $1 \times 10^{-3}$  作为分辨阈值  $\xi_m$ 。

表 1 不同  $F_d$  对应  $\xi$  值及系统状态表

$F_d$	$\xi$	状态
0.829	3.40E-06	周期态
0.828	3.77E-06	
0.827	5.75E-06	
0.826	4.66E-06	
0.825	4.73E-06	
0.824	0.134 411 657	混沌态
0.823	0.131 836 814	
0.822	0.159 901 807	
0.821	0.172 665 167	
0.820	0.155 147 772	

对此阈值进行验证实验。令  $F_d$  取 0.325 ~ 1.325 之间分辨率为 0.001 的 1 000 个值,恒定参数不变,实验时间 200 个周期点,并根据数据作图 13。

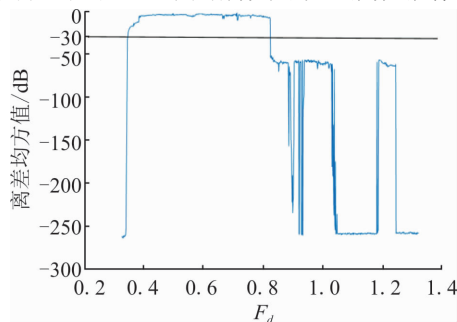


图 13 离差均方值随输入振幅的变化图

图 12 为一个闭合的具有对称性的周期轨道,观

结果正如图 13 所示,仅在 0.345~0.350 之间由于发生分岔行为,此时离差均方值恰好处于 0.002~0.01 之间,其余在 -30 dB 线上的点为混沌态,线下的点为周期态,完全符合预期判定,正确率为 99.5%。说明该方法不仅能准确地判断混沌与大周期,还能够用于寻找分岔点。

在对  $\xi_n$  的确定问题上,首先由图 13 的观察到在  $F_d$  在 0.325~1.325 对应系统无论周期或混沌,离差均方值都小于 1。在 1.1 节中曾指出式(4)中振幅与频率影响相互独立,故在振幅相同情况下的 2 个大周期信号相图也相同。所以在拟周期状态下若庞加莱样点能够遍历轨道一周,即将拟周期态分解为多个周期不可公约的周期态分系统  $A_1, A_2, \dots$  时,满足采样时间  $T \geq 2\pi/\Delta\omega_{\min}$ ,其中  $\Delta\omega_{\min}$  为两两分系统间最小频差,在此  $\Delta\omega_{\min} = \Delta\omega = (\sqrt{2}-1)2\pi$ 。此时除与采用频率相同频率的分系统外,其余每一个周期态分系统  $A_i$  的均值点均在  $x$  轴附近, $y$  轴略左侧。且对于任意分系统而言,其相图均相同。当分系统只有 2 个时,如本文举例,可由图 2 看出,相图上  $y$  轴附近  $x$  的绝对值均大于 1, $x$  轴附近  $y$  的绝对值均大于 1,故得任意相点到其中心点距离均大于 1。即  $\xi > 1$ 。当分系统不只 2 个时,由:

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}} \geq |a| \quad (9)$$

可知其分系统之和的  $\xi$  依然大于 1。故将 1 作为分辨阈值  $\xi_n$ 。

对频率比平方分别取从 1~50 的 2 个周期分系统合成的总系统用  $\xi_n$  阈值进行检验,并作图 14。

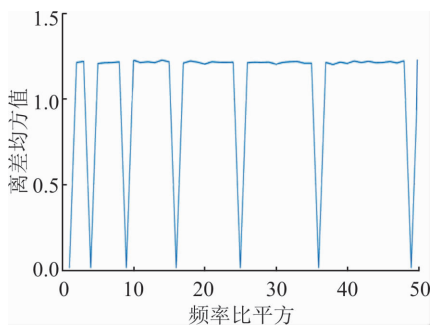


图 14 离差均方值随输入频率比平方的变化图

从图 14 中可发现除 1、4、9、16、36、49 等平方数对应状态为周期态外,其余频率比数为无理根的拟周期态系统的离差均方值均为 1.2 左右,大于 1。之后随机抽取  $\omega$  比为  $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$  的 3 个周期态分系统合成的拟周期系统,离差均方值为 4.879 远大于 1,验证对于超过 2 个分系统合成的拟周期系统,该方法一样适用。综上可证明此方法的可用性与准确性。

为进一步证明该方法优越性,用本方法与谢永兴改进吴冬梅的“改进型圆域分割法”进行比较。抽取策动力幅值  $F_d$  的值分别为 0.83 和 0.03 进行周期态和混沌态验证。得到的实验结果相图,验证了此方法的正确性。但是在计算时间上,本方法用时分别为 0.83 ms 和 9.7 ms,而改进圆域分割法用时为 0.85 ms 和 12.6 ms。证明本方法的计算效率也相对前人有所提高。

## 4 结论

本文利用实验对 Duffing 振子进行研究。对振子各个状态分别从时域、相图及庞加莱截面点等多方面进行实验观测,并结合文献理论对实验现象进行分析解释。主要创新工作如下:

1) 根据已有理论提出一种新的直接利用庞加莱截面点的混沌状态定量判别方法。取尽可能少的解进行采样,并根据样点构建判定模型,该模型计算复杂度低,判别效率高。

2) 首先通过理论分析,说明方法可行性。然后用特定系统的实验结果来确定特定系统阈值,并通过重复实验用阈值来多次检验模型,用图表清晰展示实验结果,用以验证了模型准确度与可信度。最后又与已有理论方法进行对比显示出模型的优势。

## 参考文献(References):

- [1] ZHANG X Y, GUO H X, WANG B H, et al. A New Method for Detecting Line Spectrum of Ship-Radiated Noise Using Duffing Oscillator[J]. Chinese Science Bulletin, 2007, 52(14):1906-1912.
- [2] FU Y Q, WU D M, ZHANG L, et al. A Circular Zone Partition Method for Identifying Duffing Oscillator State Transition and Its Application to BPSK Signal Demodulation[J]. Science China(Information Science), 2011, 54(2):1274-1282.
- [3] LI Y, YANG B J, YUAN Y, et al. Analysis of a Kind of Duffing Oscillator System Used to Detect Weak Signals[J]. Chinese Physics 13:2007, 16(4):1009-1963.
- [4] 韩振榕. 基于多芬振子的微弱信号检测研究[D]. 苏州:苏州大学,2006.  
HAN Z R. Weak Signal Detection Based on Duffing Oscillator[D]. Suzhou: Suzhou University, 2006. (in Chinese)
- [5] 郝柏林. 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它——关于确定论系统中的内在随机性[J]. 物理学进展, 1983, 3(3):329-416.  
HAO B L. Bifurcation, Chaos, Strange Attractor,

- Turbulence and Other—About the Theory of Inherent Randomness in the System is Determined[J]. *Progress in Physics*, 1983,3(3):329-416. (in Chinese)
- [6] GARDNER W A. The Spectral Correlation Theory of Cyclostationary Time-Series [J]. *Signal Processing*, 1986,11(1):13-36.
- [7] LIAPUNOV A M. *Stability of Motion* [M]. New York:Academic Press, 1966.
- [8] 路鹏. 基于 Duffing 振子的微弱信号检测[D]. 吉林:吉林大学,2005.  
LU P. Weak Signal Detection Based on Duffing Oscillator[D]. Jilin: Jilin University, 2005. (in Chinese)
- [9] 李士林,尹成群,尚秋峰,等. 基于图像识别理论的混沌特性判别方法[J]. *中国电机工程学报*, 2003,23(10):47-50.  
LI S L, YIN C Q, SHANG Q F, et al. A Method of Identifying Chaotic Nature Based on Image Recognition [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2003,23(10):47-50. (in Chinese)
- [10] GLENDINNING P, PERRY L P. Melnikov Analysis of Chaos in a Simple Epidemiological Model[J]. *Math Biol*, 1997,34: 359-373.
- [11] 谢永兴,黄隽,胡云安,等. 基于改进圆域分割方法的混沌微弱信号检测[J]. *海军航空工程学院学报*, 2015,30(6):511-515.  
XIE Y X, HUANG J, HU Y A, et al. Chaotic Weak Signal Detection Based on Improved Circle Zone Partition Method[J]. *Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University*, 2015, 30(6): 511-515. (in Chinese)
- [12] 李月,杨宝俊. 混沌振子检测引论[M]. 北京:电子工业出版社,2004:51-55.  
LI Y, YANG B J. *Chaotic Oscillator Detection Introduction*[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2004:51-55. (in Chinese)
- [13] LI J Y, SHEN Y. The Study of Weak Signal Detection Using Duffing Oscillators Array[C]//IEEE Circuits and Systems International Conference on Testing and Diagnosis. Chendu:IEEE,2009.
- [14] 范剑,赵文礼,王万强. 基于 Duffing 振子的微弱周期信号混沌检测性能研究[J]. *物理学报*, 2013,62(18):1-6.
- FAN J, ZHAO W L, WANG W Q. Study on the Weak Sinusoidal Signal Detection Property Using Duffing Chaos System[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(18):1-6. (in Chinese)
- [15] BIRX D L. Chaotic Oscillators and CMFFNs for Signal Detection in Noise Environments[C]//IEEE International Joint Conference on Neural Networks. Baltimore,MD:IEEE,1992:881-888.
- [16] 邱关源. 现代电路理论[M]. 北京:高等教育出版社,2001:167-206.  
QIU G Y. *Modern Circuit Theory* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001:167-206. (in Chinese)
- [17] 姜万录,吴胜强,张建成. Duffing 振子的两种检测微弱信号的方法及区别[J]. *燕山大学学报*, 2004,26(2):114-118.  
JIANG W L, WU S Q, ZHANG J C. Two Methods of Weak Signal Detection of Duffing Oscillator and Their Difference[J]. *Journal of Yanshan University*, 2004,26(2):114-118. (in Chinese)
- [18] WANG J X, HOU C L. A Method of Weak Signal Detection Based on Duffing Oscillator[C]//Proceeding of IC4E'10. Washington DC:IEEE,2010:387-390.
- [19] 李月,徐凯,杨宝俊,等. 混沌振子系统周期解几何特征量分析与微弱周期信号的定量检测[J]. *物理学报*, 2008,57(6):3353-3358.  
LI Y, XU K, YANG B J, et al. Analysis of the Geometric Characteristic Quantity of the Periodic Solutions of the Chaotic Oscillator System and the Quantitative Detection of Weak Periodic Signal[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008,57(6):3353-3358. (in Chinese)
- [20] 陈新国,王洁芸. 混沌振子在不同初值下检测弱信号的性能分析 [J]. *仪器仪表学报*, 2012, 33(12):2857-2862.  
CHEN G X, WANG J Y. The Performance Analysis of Chaotic Oscillator in Weak Signal Detection Under Different Initial[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2012,33(12):2857-2862. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)