

# 一类非线性系统的模糊自适应反推滑模控制

邢晓波, 胡剑波, 王应洋, 李俊

(空军工程大学装备管理与无人机工程学院, 西安, 710051)

**摘要** 针对一类具有非匹配不确定非线性系统, 提出一种模糊自适应反推滑模变结构控制方法。首先利用模糊逻辑系统有效逼近系统的未知非线性, 然后针对反推方法中需要对虚拟控制反复求导而存在的“微分爆炸”现象引入低阶滤波器, 同时抑制非匹配不确定性的影响; 最后设计一种积分终端滑模控制, 解决了控制过程中的奇异问题, 加快了远离平衡位置的系统状态收敛速度, 保证了系统的收敛精度, 同时削弱了传统滑模控制中存在的抖振现象。Lyapunov 稳定性分析证明了所设计的控制器能够保证闭环系统的有限时间收敛。对比仿真结果显示系统状态跟踪效果较好, 控制输入抖振现象削弱明显。

**关键词** 非线性系统; 模糊自适应; 反推滑模控制; 终端滑模控制

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2018.01.018

**中图分类号** TP273<sup>+</sup>.4 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2018)01-0104-07

## Fuzzy Adaptive Backstepping Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Systems

XING Xiaobo, HU Jianbo, WANG Yingyang, LI Jun

(Equipment Management and Unmanned Aircraft Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** For a class of nonlinear systems with mismatched uncertainties, a fuzzy adaptive backstepping sliding mode control method is proposed. In the process of backstepping design, the paper utilizes the fuzzy logic system for approximating the unknown nonlinearity of the system, introduces the “differential explosion” phenomenon in requiring repeatedly the derivation of the virtual control in the backstepping method into the low-order filter, and simultaneously restrains interference with the non-matching uncertainties. Finally, the paper designs an integral terminal sliding mode control to solve some singularity problems in the control process, speed up the convergence of the system state far away from the equilibrium position, ensure the convergence accuracy of the system and weaken the traditional sliding mode control in the presence of chattering phenomenon. Lyapunov stability analysis proves that the designed controller can ensure the finite-time convergence of closed-loop system. The simulation results show that the system state tracking is good in effect and the control input chattering is weakened significantly, and the method is valid.

**Key words:** nonlinear system; fuzzy adaptive; backstepping sliding mode control; terminal sliding mode control

**收稿日期:** 2017-06-14

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(2014CB744902)

**作者简介:** 邢晓波(1990—), 男, 黑龙江牡丹江人, 硕士生, 主要从事先进控制理论与应用研究。E-mail: xbx0825@163.com

**引用格式:** 邢晓波, 胡剑波, 王应洋, 等. 一类非线性系统的模糊自适应反推滑模控制 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2018, 19(1): 104-110. XING Xiaobo, HU Jianbo, WANG Yingyang, et al. Fuzzy Adaptive Backstepping Sliding Mode Control for a Class of Nonlinear Systems [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2018, 19(1): 104-110.

近年来,机器人<sup>[1]</sup>、运输机<sup>[2]</sup>、微型无人直升机<sup>[3]</sup>、导弹制导<sup>[4-5]</sup>等的控制问题一直被广泛研究。通过对相关文献的研究后发现各个模型经过线性化存在着共性,可以梳理整合得出一类非线性系统的数学模型如:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = b_i x_{i+1} + g_i(\bar{\mathbf{X}}_i) + \Delta g_i(\bar{\mathbf{X}}_i) + d_i(\mathbf{X}, t), \\ i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{x}_n = b_n u(t) + g_n(\bar{\mathbf{X}}_n) + \Delta g_n(\bar{\mathbf{X}}_n) + d_n(\mathbf{X}, t), \\ y = x_i \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  为系统可测状态向量; $\bar{\mathbf{X}}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ ;  $u \in \mathbf{R}$ ,  $y \in \mathbf{R}$  分别为系统输入和输出; $g_i = g_i(\bar{\mathbf{X}}_i)$  为已知连续光滑非线性函数,  $\Delta g_i = \Delta g_i(\bar{\mathbf{X}}_i)$  为未知光滑非线性函数,  $d_i = d_i(\mathbf{X}, t)$  为未知不确定干扰; $b_i$  为已知控制增益常数。

针对式(1)存在不确定性的非线性系统的鲁棒控制问题,文献[6]提出了有限时间的终端滑模控制方法。然而,通常的终端滑模控制中存在二大问题:①在控制过程中存在着奇异问题;②离平衡点较远的系统状态收敛速率缓慢。为了解决第 1 个问题,文献[7]提出了一种非奇异终端滑模控制的策略,并验证了该方法的有效性。对于第 2 个问题,文献[8]设计了一种快速终端滑模控制的方法,即使在远离平衡点的系统状态皆能较快收敛。但是这 2 种方法通常只适用于不确定性满足匹配条件的情况。文献[9]综合上述 2 种方法,提出了一种基于干扰观测器和反步法的非奇异快速终端滑模控制,对非匹配干扰具有较好的抑制能力。

对于非匹配干扰问题的研究,其中一种较为有效的解决方法是将反推(backstepping)方法与滑模变结构控制相结合<sup>[10]</sup>。传统的 backstepping 方法需要对虚拟控制变量反复微分,存在计算复杂性问题,容易出现“微分爆炸”现象<sup>[11-12]</sup>。为此,文献[13]结合动态面控制引入一阶低通滤波器设计虚拟控制律,避免传统反推设计存在的计算复杂性问题。为了更好地估计非匹配不确定性,基于神经网络<sup>[14]</sup>、模糊逻辑系统<sup>[15-16]</sup>和非线性干扰观测器<sup>[17-18]</sup>等的控制方法被广泛运用,控制效果较为满意。

本文以一类具有非匹配不确定性的非线性系统为研究对象,提出了一种模糊自适应反推滑模变结构控制方法

## 1 问题描述及准备

针对系统(1)做出以下假设:

**假设 1** 所有状态变量均可得到并用于反馈;

**假设 2**  $b_i$  非奇异,且存在已知正数  $b_m$ 、 $b_M$ ,使

得  $b_m \leq b_i \leq b_M$ ;

**假设 3** 对于  $\forall (\mathbf{X}, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ , 存在  $D_i > 0$  使得  $|d_i(\mathbf{X}, t)| \leq D_i$ ;

**假设 4** 参考输入  $\mathbf{x}_d = [y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(n-1)}]^T \in G$  光滑且已知,其中: $G = \{\mathbf{x}_d: y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \dots + (y_d^{(n-1)})^2 \leq r_0\}$ ,  $r_0$  是已知正常数。

由于  $\Delta g_i$  未知,采用模糊逻辑系统对其进行逼近,模糊逻辑系统<sup>[16]</sup>可表示为:

$$\hat{f}_i(x) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\xi}_i(x) \quad (2)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T = (\hat{\theta}_{i1}, \hat{\theta}_{i2}, \dots, \hat{\theta}_{iN})$  为模糊控制器参数,  $\boldsymbol{\xi}_i(x) = [\xi_{i1}(x), \dots, \xi_{iN}(x)]^T$  为模糊基函数向量,  $N$  是模糊规则数量。

**引理 1**<sup>[16]</sup>  $h(x)$  是紧集  $\Omega$  内的任意连续函数,则  $\forall \epsilon > 0$ , 存在上述模糊逻辑系统(2)使得:

$$\sup_{x \in \Omega} |h(x) - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(x)| \leq \epsilon \quad (3)$$

则可以用模糊逻辑系统逼近系统(1)中的未知非线性,具体表示为:

$$\Delta g_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\xi}_i - \bar{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\xi}_i + \epsilon_i \quad (4)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$  为  $\boldsymbol{\theta}_i^*$  的估计值,  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_i = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*$  为估计误差; $\epsilon_i$  为模糊系统的逼近误差。定义:

$$\boldsymbol{\theta}_i^* = \arg \min_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \in \Omega, \mathbf{X}_i \in \mathbf{R}^i} [\sup |\Delta g_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\xi}_i|], \boldsymbol{\theta}_i^* \text{ 为最优参数。}$$

**假设 5** 假设最优参数  $\boldsymbol{\theta}_i^*$  和逼近误差  $\epsilon_i$  均有界,即存在正常数  $\theta_{iM}$ 、 $\epsilon_{iM}$ ,使得  $|\boldsymbol{\theta}_i^*| \leq \theta_{iM}$ ,  $|\epsilon_i| \leq \epsilon_{iM}$ 。

## 2 控制器设计及稳定性分析

### 2.1 自适应反推终端滑模控制器设计

控制器具体设计步骤如下:

**Step 1:** 对于系统(1)取  $i=1$ , 定义跟踪误差为:

$$e_1 = x_1 - y_d \quad (5)$$

对式(5)求导,并将式(4)代入,得:

$$\dot{e}_1 = b_1 x_2 + g_1 + d_1 + \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\xi}_1 - \bar{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\xi}_1 + \epsilon_1 - \dot{y}_d \quad (6)$$

从而设计  $x_2$  的虚拟控制律为:

$$\beta_1 = b_1^{-1} (-k_1 e_1 - g_1 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_1^T \boldsymbol{\xi}_1 + \dot{y}_d - \frac{D_1^2 e_1}{2\lambda}) \quad (7)$$

自适应律设计为:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_1 = \Gamma_1 (e_1 \boldsymbol{\xi}_1 - \sigma_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_1) \quad (8)$$

式中: $k_1 > 0$ ,  $\sigma_1 > 0$  为设计参数; $\Gamma_1 > 0$  为自适应增益矩阵; $\frac{D_1^2 e_1}{2\lambda}$  为克服干扰  $d_1$  的非线性阻尼项。

针对传统反推设计过程中需要对虚拟控制进行反复求导带来“微分爆炸”问题,引入低通滤波器对虚拟控制律进行滤波,以降低控制器的复杂程度。

取  $\alpha_1$  为  $\beta_1$  的低通滤波器  $\frac{1}{\zeta_1 s + 1}$  输出,并满足:

$$\begin{cases} \zeta_1 \dot{\alpha} = \beta \\ \alpha_1 = \beta_1 \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\zeta_1$  为滤波器时间常数。

定义滤波误差为:

$$\omega_1 = \alpha_1 - \beta_1 \quad (10)$$

由式(9)~(10)得:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{\omega_1}{\zeta_1} - \dot{\beta}_1 \quad (11)$$

**Step i:** 对于系统(1)取  $i=2, 3, \dots, n-1$ , 定义跟踪误差为:

$$e_i = x_i - \alpha_{i-1} \quad (12)$$

对式(12)求导, 并将式(4)代入, 得:

$$\dot{e}_i = x_{i+1} + g_i + d_i + \hat{\theta}_i^T \xi_i - \bar{\theta}_i^T \xi_i + \varepsilon_i - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (13)$$

从而设计  $x_{i+1}$  的虚拟控制律为:

$$\beta_i = b_i^{-1} \left( -k_i e_i - g_i - \hat{\theta}_i^T \xi_i + \dot{\alpha}_{i-1} - \frac{D_i^2 e_i}{2\lambda} \right) \quad (14)$$

自适应律设计为:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i (e_i \xi_i - \sigma_i \hat{\theta}_i) \quad (15)$$

式中:  $k_i > 0, \sigma_i > 0$  为设计参数;  $\Gamma_i > 0$  为自适应增益矩阵;  $\lambda$  为任意小的正实数;  $\frac{D_i^2 e_i}{2\lambda}$  为克服干扰  $d_i$  的非线性阻尼项。

对  $\beta_i$  进行滤波, 得到期望虚拟控制  $\alpha_i$ , 并满足:

$$\begin{cases} \zeta_i \dot{\alpha} = \beta \\ \alpha_i(0) = \beta_i(0) \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $\zeta_i$  为滤波器时间常数。

定义滤波误差为:

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i \quad (17)$$

由式(16)~(17)得:

$$\dot{\omega}_i = -\frac{\omega_i}{\zeta_i} - \dot{\beta}_i \quad (18)$$

**Step n:** 对于系统(1)取  $i=n$ , 定义跟踪误差为:

$$e_n = x_n - \alpha_{n-1} \quad (19)$$

为了确保系统跟踪误差能够在有限时间收敛至零, 提高收敛精度, 同时避免奇异问题, 本文设计如下积分型终端滑模面:

$$s = e_n + \gamma \int_0^t e_n^{l/m} d\tau \quad (20)$$

式中:  $\gamma > 0; l$  和  $m$  为正奇数, 且  $1 < \frac{l}{m} < 2$ 。

对式(20)求导, 得:

$$\dot{s} = \gamma e_n^{l/m} + b_n u + g_n + \hat{\theta}_n^T \xi_n - \bar{\theta}_n^T \xi_n + \varepsilon_n + d_n - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (21)$$

并设计如下控制律:

$$u = b_n^{-1} \left( -k_n s - g_n - \hat{\theta}_n^T \xi_n + \dot{\alpha}_{n-1} - \frac{D_n^2 s}{2\lambda} - \gamma e_n^{l/m} \right) \quad (22)$$

自适应律设计为:

$$\dot{\hat{\theta}}_n = \Gamma_n (s \xi_n - \sigma_n \hat{\theta}_n) \quad (23)$$

式中:  $k_n > 0, \sigma_n > 0$  为设计参数;  $\Gamma_n > 0$  为自适应增益矩阵;  $\lambda$  为任意小的正实数,  $\frac{D_n^2 s}{2\lambda}$  为克服干扰  $d_n$  的非线性阻尼项。

## 2.2 稳定性分析

**定理 1** 在假设 1~假设 5 的基础上, 对于非线性系统(1), 采用如式(7)、(8)、(14)、(15)、(22)、(23)的控制方法, 选取终端滑模面(20), 设计  $k_i, \zeta_i, \Gamma_i, \sigma_i$  等参数使得闭环系统(1)的状态有限时间内到达滑模面, 跟踪误差有限时间内收敛至零。

证明: 考虑一阶状态跟踪误差及滤波误差, 定义 Lyapunov 函数为:

$$V_1 = \frac{1}{2} (e_1^2 + \omega_1^2 + \bar{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \bar{\theta}_1) \quad (24)$$

由式(6)、(7)、(10)、(12), 得:

$$\dot{e}_1 = b_1 (e_2 + \omega_1) - k_1 e_1 - \bar{\theta}_1^T \xi_1 + \varepsilon_1 + d_1 - \frac{D_1^2 e_1}{2\lambda} \quad (25)$$

由式(11)可知存在非负连续函数  $\phi_1$  [20], 且有:

$$|\dot{\omega}_1 + \frac{\omega_1}{\zeta_1}| < \phi_1(e_1, e_2, \omega_1, \bar{\theta}_1, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d) \quad (26)$$

由 Young's 不等式及式(11)、(26)可得:

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 \leq -\frac{\omega_1^2}{\tau_1} + |\omega_1| \phi_1 \quad (27)$$

于是:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 \omega_1 + \bar{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\bar{\theta}}_1 \leq b_1 (e_1 e_2 + e_1 \omega_1) + \\ &k_1 e_1^2 - \bar{\theta}_1^T \xi_1 e_1 + e_1 \varepsilon_1 + d_1 e_1 - \frac{D_1^2 e_1^2}{2\lambda} - \frac{\omega_1^2}{\tau_1} + \\ &|\omega_1| \phi_1 + \bar{\theta}_1^T \xi_1 e_1 - \bar{\theta}_1^T \sigma_1 \hat{\theta}_1 \end{aligned} \quad (28)$$

由于:

$$\frac{D_1^2 e_1^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} \geq D_1 |e_1| \geq d_1 e_1 \quad (29)$$

利用 Young's 不等式及式(30):

$$\begin{aligned} -\sigma_1 \bar{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 &\leq \frac{\sigma_1 |\hat{\theta}_1^*|^2}{2} - \sigma_1 \bar{\theta}_1^T \hat{\theta}_1 = \frac{\sigma_1 |\hat{\theta}_1 - \bar{\theta}_1|^2}{2} - \\ &\frac{\sigma_1 |\bar{\theta}_1|^2}{2} = \frac{\sigma_1 |\hat{\theta}_1^*|^2}{2} - \frac{\sigma_1 |\bar{\theta}_1|^2}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

故:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \frac{b_1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{b_1}{2} (e_1^2 + \omega_1^2) + \frac{1}{2} (e_1^2 + \varepsilon_1^2) - \\ &k_1 e_1^2 - \frac{\omega_1^2}{\zeta_1} + \frac{\omega_1^2 \phi_1^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} (|\hat{\theta}_1^*|^2 - |\bar{\theta}_1|^2) + \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

进一步, 定义 Lyapunov 函数为:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} (e_i^2 + \omega_i^2 + \bar{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\theta}_i) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^i (e_j^2 + \omega_j^2 + \bar{\theta}_j^T \Gamma_j^{-1} \bar{\theta}_j) \quad (32)$$

类似式(26), 可得:

$$|\dot{\omega}_i + \frac{\omega_i}{\zeta_i}| \leq \phi_i(e_i, e_{i+1}, \omega_i, \tilde{\theta}_i, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d) \quad (33)$$

由 Young's 不等式及式(20)~(33)可得:

$$\omega_i \dot{\omega}_i \leq -\frac{\omega_i^2}{\zeta_i} + |\omega_i| \phi_i \quad (34)$$

由式(13)、(14)、(15)、(19)、(32)、(34),得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq \sum_{j=1}^i \frac{b_j}{2} (e_j^2 + e_{j+1}^2) + \sum_{j=1}^i \frac{b_j}{2} (e_j^2 + \omega_j^2) + \\ &\sum_{j=1}^i (-k_j e_j^2 - \frac{\omega_j^2}{\zeta_j} + \frac{\omega_j^2 \phi_j^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}) + \frac{\lambda i}{2} + \\ &\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j}{2} (|\theta_j^*|^2 - |\tilde{\theta}_j|^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i (e_j^2 + \epsilon_j^2) \quad (35) \end{aligned}$$

当  $i=n-1$  时:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{n-1} &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{2} (e_i^2 + e_{i+1}^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{2} (e_i^2 + \omega_i^2) + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} (-k_i e_i^2 - \frac{\omega_i^2}{\zeta_i} + \frac{\omega_i^2 \phi_i^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}) + \frac{(n-1)\lambda}{2} + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} (e_i^2 - \epsilon_i^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i}{2} (|\theta_i^*|^2 - |\tilde{\theta}_i|^2) \quad (36) \end{aligned}$$

定义 Lyapunov 函数为:

$$\begin{cases} V = V_{n-1} + V_n \\ V_n = \frac{1}{2} (s^2 + \tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \tilde{\theta}_n) \end{cases} \quad (37)$$

由式(21)~(23)、(37),得:

$$\dot{V}_n = s\dot{s} + \tilde{\theta}_n^T \Gamma_n^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_n =$$

$$\frac{1}{2} (s^2 + \epsilon_n^2) - k_n s^2 + \frac{\sigma_n}{2} (|\theta_n^*|^2 - |\tilde{\theta}_n|^2) + \frac{\lambda}{2} \quad (38)$$

故:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{V}_{n-1} + \dot{V}_n \leq \\ &-(k_1 - b_1 - \frac{1}{2})e_1^2 - \sum_{i=2}^{n-1} (k_i - \frac{b_{i-1}}{2} - b_i - \frac{1}{2})e_i^2 - \\ &(k_n - \frac{1}{2})s^2 - \frac{b_{n-1}}{2}e_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{1}{\zeta_i} - \frac{b_i}{2} - \frac{\phi_i^2}{2\lambda})\omega_i^2 - \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{2k_{\max}(\Gamma_i^{-1})} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i + \sum_{i=1}^n (\frac{1}{2}\epsilon_i^2 + \frac{\sigma_i}{2} |\theta_i^*|^2) + \\ &\frac{(2n-1)\lambda}{2} \quad (39) \end{aligned}$$

由于  $b_m \leq b_i \leq b_M$ ,  $|\theta_i^*| \leq \theta_M$ ,  $|\epsilon_i| \leq \epsilon_M$ , 故定义  $\zeta, \delta$  如下:

$$\zeta = \min(k_1 - b_M - \frac{1}{2}, k_i - \frac{3b_M}{2} - \frac{1}{2}, \frac{b_M}{2}, k_n - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\zeta_i} - \frac{b_M}{2} - \frac{\phi_i^2}{2\lambda}, \frac{\sigma_i}{2k_{\max}(\Gamma_i^{-1})}),$$

$$\delta = \frac{(2n-1)\lambda}{2} + \sum_{i=1}^n (\frac{1}{2}\epsilon_M^2 + \frac{\sigma_i}{2} |\theta_M|^2).$$

则式(39)可以改写为:

$$\dot{V} \leq -2\zeta V + \delta \quad (40)$$

由式(40)得:

$$\frac{d}{dt}(V(t)e^{2\zeta t}) \leq e^{2\zeta t} \delta \quad (41)$$

对式(41)两边同时积分得:

$$V \leq \frac{\delta}{2\zeta} + (V(0) - \frac{\delta}{2\zeta})e^{-2\zeta t} \leq \frac{\delta}{2\zeta} + V(0) \quad (42)$$

可见,  $V$  为指数收敛, 即  $s$  为指数收敛, 从而系统状态将会有有限时间到达滑模面  $s=0$ 。

设  $e_n(0) \neq 0$  到  $e_n(t_s) = 0$  的时间为  $t_s$ , 在此阶段,  $s = s = 0$ 。由式(20)得:

$$\frac{de_n}{e_n^{l/m}} = -\gamma \quad (43)$$

对式(43)两边同时积分, 得:

$$\int_{e_n(0)}^0 e_n^{-l/m} de_n = \int_0^{t_s} -\gamma dt \quad (44)$$

从而在终端滑模上, 从任意初始状态收敛至零的时间为:

$$t_s = \frac{m}{\gamma(m-l)} |e_n(t_s)|^{1-\frac{l}{m}} \quad (45)$$

由上述分析可知, 通过设定  $\gamma, l, m$  可使闭环系统(1)的系统状态在有限时间内到达滑模面, 且跟踪误差在有限时间内收敛至零。

证毕。

### 3 仿真研究

根据文献[19], 飞行器的简化纵向模型为:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \bar{L}_a \alpha - \frac{g}{V_T} \cos \gamma + \bar{L}_0 \\ \dot{\alpha} = q + \frac{g}{V_T} \cos \gamma - \bar{L}_0 - \bar{L}_a \alpha \\ \dot{\theta}_p = q \\ \dot{q} = M_0 + M_\delta \delta \end{cases} \quad (46)$$

$$\text{且 } \bar{L}_0 = \frac{L_0}{mV_T}, \bar{L}_a = \frac{L_a}{mV_T}.$$

式中:  $\gamma, \alpha, \theta_p$  分别为飞行器航迹角、攻角和俯仰角;  $q$  为俯仰角速度;  $\delta$  为舵偏角;  $m$  和  $g$  分别为质量和重力加速度;  $V_T$  为飞行器速度;  $L_a$  为升力曲线斜率;  $L_0$  为其他对升力的影响因素, 如马赫数, 俯仰角速度;  $M_\delta$  为舵偏角引起的俯仰力矩;  $M_0 = M_0(\alpha, M, h, V_T, q)$ , 通常由  $M_{\alpha} + M_q q$  近似。

假设飞行器速度稳定在理想值的一个很小邻域内, 可以视为常量。定义  $x_1 = \gamma, x_2 = \alpha, x_3 = q, u = \delta$ , 考虑模型的不确定性, 得到如下严反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_1 x_2 + \Delta g_1(x_1) + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 = x_3 + \Delta g_2(x_1, x_2) + d_2(x, t) \\ \dot{x}_3 = b_3 u(t) + \Delta g_3(x_1, x_3) + d_3(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (47)$$

式中:  $\Delta g_1(x_1) = -\frac{g}{V_T} \cos x_1 + \bar{L}_0$ ,  $b_1 = \bar{L}_a > 0$ ,  $\Delta g_2(x_1, x_2) = \frac{g}{V_T} \cos x_1 - \bar{L}_0 - \bar{L}_a x_2$ ,  $\Delta g_3(x_1, x_3) = M_a x_2 + M_q x_3$ ,  $b_3 = M_\delta > 0$ ,  $y$  为系统输出即航迹角。

仿真中,设计系统参考指令信号  $y_d = 5^\circ \sin(t)$ , 初始状态为  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [1, 0, 0]^T$ , 假设外部干扰为:  $d_1 = 0.01 \sin(2t)$ ,  $d_2 = 0.1 \cos(2t)$ ,  $d_3 = 0.05 \sin(t) \cos(2t)$ 。

取以下 5 种隶属函数对模糊逻辑系统输入进行模糊化:  $\mu_{NM}(x_i) = \exp[-((x_i + \pi/6)/(\pi/24))^2]$ ,  $\mu_{NS}(x_i) = \exp[-((x_i + \pi/12)/(\pi/24))^2]$ ,  $\mu_Z(x_i) = \exp[-(x_i/(\pi/24))^2]$ ,  $\mu_{PS}(x_i) = \exp[-((x_i - \pi/12)/(\pi/24))^2]$ ,  $\mu_{PM}(x_i) = \exp[-((x_i - \pi/6)/(\pi/24))^2]$ 。

根据隶属函数设计程序,可以得到  $x_i$  的隶属函数图,见图 1。

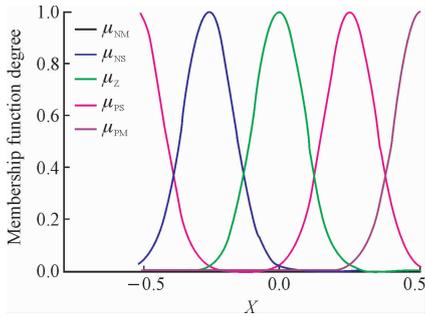


图 1  $x_i$  的隶属函数

Fig. 1 The membership function of  $x_i$

为与参考文献[20]形成对比,文中相同参数均选择相同数值,具体系统参数设定为:  $\bar{L}_0 = -0.1$ ,  $\bar{L}_a = 1.0$ ,  $M_a = 0.1$ ,  $M_q = -0.02$ ,  $M_\delta = 1.0$ 。设定稳定航速为  $V_T = 200$  m/s,取  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>。控制器参数设置为:  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.0198$ ,  $\sigma_1 = 0.04$ ,  $\sigma_2 = 0.002$ ,  $\sigma_3 = 0.004$ ,  $\gamma = 1000$ ,  $k_1 = 1.51$ ,  $k_2 = 2.01$ ,  $k_3 = 1.01$ ,  $l = 5$ ,  $m = 3$ ,  $\Gamma_1 = \text{diag}\{0.5\}$ ,  $\Gamma_2 = \text{diag}\{10\}$ ,  $\Gamma_3 = \text{diag}\{5\}$ 。仿真步长取 0.01 s。

仿真结果见图 2~4。图 2 为采用模糊自适应反推滑模控制的航迹角跟踪参考指令信号轨迹变化曲线,从图中可以看出本文方法可以使系统输出能够相对较好地实现对参考指令信号的稳定跟踪,并且跟踪误差能够控制一定很小的范围内。图 3 为系统状态跟踪误差  $e_1$  的变化曲线,从图中可以看出本文通过设计积分滑模面使航迹角跟踪误差能够在更短的有限时间内收敛至零,且误差的量级比文献[20]小 13 倍。图 4 为采用模糊自适应终端滑模控制的控制输入信号曲线,从图中可以发现所设计控制输入信号较为平滑,且控制输入的幅值较小,从而

能耗较小。从图 5~7 看出,未知非线性函数的估计值逐渐逼近真实值,总体估计效果较好。不足之处是逼近速度较慢,逼近的精度还有待提高。

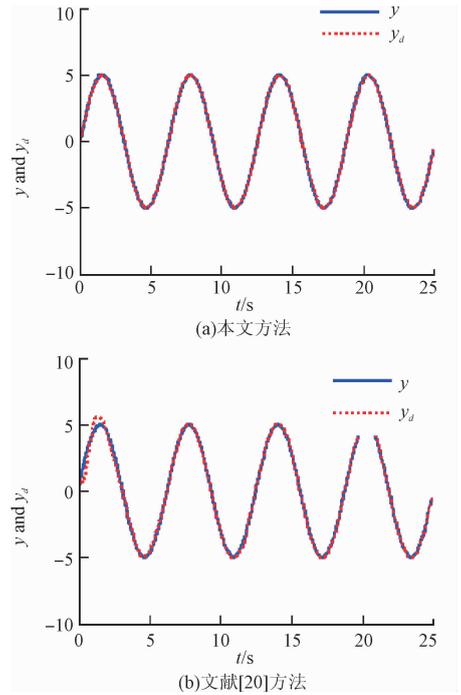


图 2 系统输出  $y$  和参考轨迹  $y_d$

Fig. 2 The output  $y$  and reference trajectory  $y_d$

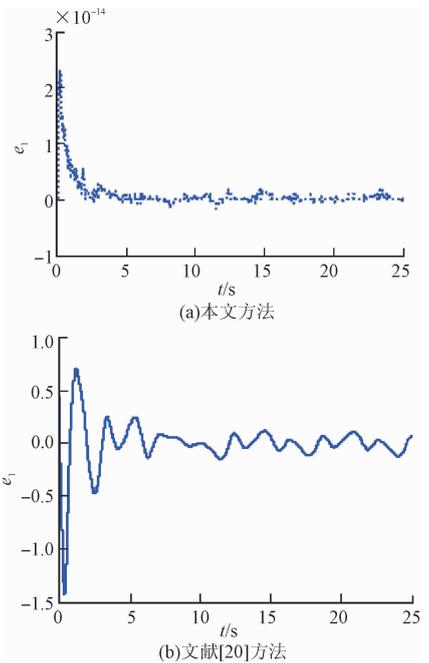


图 3 状态跟踪误差  $e_1$

Fig. 3 State tracking error  $e_1$

综合以上仿真分析结果表明,本文控制方案对给定参考轨迹具有很好的跟踪性能,且状态跟踪误差可以在较短的时间内收敛至零,说明本文设计的控制方法具有较强的鲁棒性。

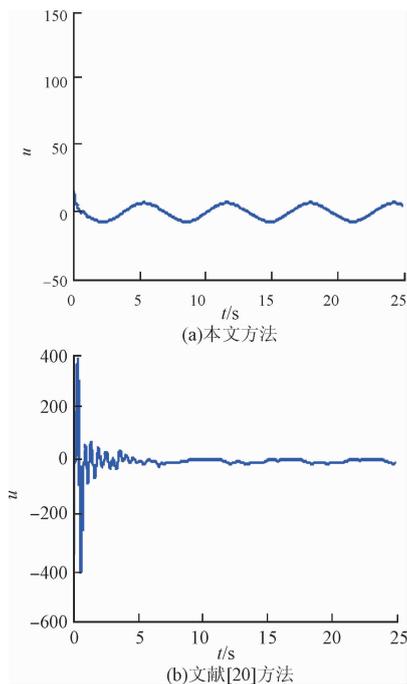


图 4 控制输入  $u$   
Fig. 4 Control input  $u$

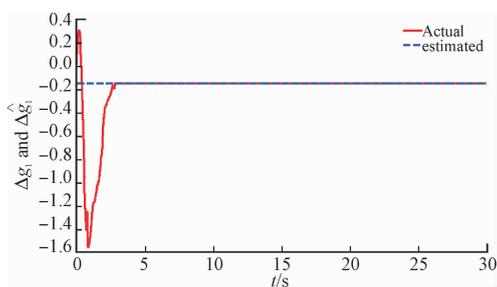


图 5  $\Delta g_1$  和  $\hat{\Delta g}_1$  的估计值  
Fig. 5  $\Delta g_1$  and estimation of  $\hat{\Delta g}_1$

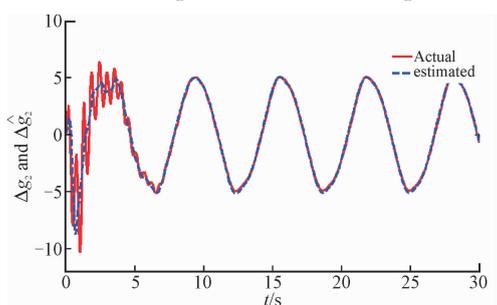


图 6  $\Delta g_2$  和  $\hat{\Delta g}_2$  的估计值  
Fig. 6  $\Delta g_2$  and estimation of  $\hat{\Delta g}_2$

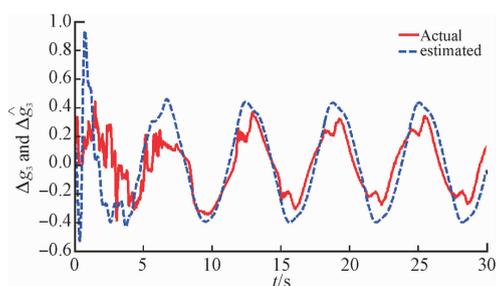


图 7  $\Delta g_3$  和  $\hat{\Delta g}_3$  的估计值  
Fig. 7  $\Delta g_3$  and estimation of  $\hat{\Delta g}_3$

## 4 结语

本文针对一类具有非匹配不确定非线性系统,提出了一种模糊自适应反推终端滑模控制方案。通过常规控制方法的综合运用,有效保证了系统的收敛精度,减小误差,消除控制输入的抖振现象。该方案能够准确估计系统的未知非线性函数,克服外界干扰的影响;低通滤波器的引入简化了设计方法,避免微分爆炸现象;跟踪误差尽管无法趋近于零,但是通过调节控制参数已经达到  $10^{-14}$ ,相较于文献[20]的控制方法更能够满足工程实际应用要求。该方案对于解决类似结构系统的跟踪控制问题具有一定的参考意义。

## 参考文献(References):

[1] QIN L, LIU F C, LIANG L H, et al. Fuzzy Adaptive Robust Control for Space Robot Considering the Effect of the Gravity [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(6): 1562-1570.

[2] ZHANG C, CHEN Z J, WEI C. Sliding Mode Disturbance Observer-based Backstepping Control for a Transport Aircraft [J]. Science China, 2014, 57(5): 228-243.

[3] XIAN B, GUO J C, ZHANG Y, et al. Sliding Mode Tracking Control for Miniature Unmanned Helicopters [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(1): 277-284.

[4] RAN M P, WANG Q, HOU D L, et al. Backstepping Design of Missile Guidance and Control Based on Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2014, 27(3): 634-642.

[5] LI Q C, ZHANG W S, HAN G et al. Fuzzy Sliding Mode Control Guidance Law with Terminal Impact Angle and Acceleration Constraints [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2016, 27(3): 664-679.

[6] VENKATARAMAN S T, GULATI S. Terminal Sliding Modes; a New Approach to Nonlinear Control Synthesis [C]// The 5th International Conference on Advanced Robotics. Pisa, Italy: IEEE, 2002: 443-448.

[7] FENG Y, YU X, MAN Z. Non-Singular Terminal Sliding Mode Control of Rigid Manipulators [J]. Automatica, 2002, 38(12): 2159-2167.

[8] 刘宇超, 郭建国, 周军等. 基于新型快速 Terminal 滑模的高超声速飞行器姿态控制 [J]. 航空学报, 2015, 36(7): 2372-2380.

LIU Y C, GUO J G, ZHOU J, et al. Hypersonic

- Vehicle Attitude Control Based on New Fast Terminal Sliding Mode [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(7): 2372-2380. (in Chinese)
- [9] 杨晓骞, 李健, 董毅. 非线性不确定系统的非奇异快速终端滑模控制 [J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(6): 772-778.  
YANG X Q, LI J, DONG Y. A Novel Non-singular Fast Terminal Sliding Mode Control of Nonlinear Systems with Uncertain Disturbances [J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(6): 772-778. (in Chinese)
- [10] CHUTIPHON P. Adaptive Backstepping Finite-time Sliding Mode Control of Spacecraft Attitude Tracking [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2015(4): 826-839.
- [11] HAN S S, JIAO Z X, WANG C W, et al. Fuzzy Robust Nonlinear Control Approach for Electro-Hydraulic Flight Motion Simulator [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(1): 294-304.
- [12] LI F, HU J B, ZHENG L, et al. Terminal Sliding Mode Control for Cyber Physical System Based on Filtering Backstepping [J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2015, 12(5): 497-502.
- [13] 王坚浩, 胡剑波. 不确定非线性系统的自适应反推高阶终端滑模控制 [J]. *控制与决策*, 2012, 27(3): 413-418.  
WANG J H, HU J B. Adaptive Backstepping High-order Terminal Sliding Mode Control for Uncertain Nonlinear Systems [J]. *Control and Decision*, 2012, 27(3): 413-418. (in Chinese)
- [14] 王建敏, 董小萌, 吴云洁. 高超声速飞行器 RBF 神经网络滑模变结构控制 [J]. *电机与控制学报*, 2016, 20(5): 103-110.  
WANG J M, DONG X M, WU Y J. Hypersonic Flight Vehicle of Sliding Mode Variable Structure Control Based on RBF Neural Network [J]. *Electric Machines and Control*. 2016, 20(5): 103-110. (in Chinese)
- [15] TIAN Q Y, WEI J H, FANG J H, et al. Adaptive Fuzzy Integral Sliding Mode Velocity Control for the Cutting System of Atrench Cutter [J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2016, 17(1): 55-66.
- [16] TONG S C, LI Y M. Observer-Based Adaptive Fuzzy Backstepping Control of Uncertain Nonlinear Pure-feedback Systems [J]. *Science China*, 2014, 57(1): 1-14.
- [17] WANG J M, WU Y J, DONG X M, et al. Recursive Terminal Sliding Mode Control for Hypersonic Flight Vehicle with Sliding Mode Disturbance Observer [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(3): 1489-1510.
- [18] MU C X, ZONG Q, TIAN B L et al. Continuous Sliding Mode Controller with Disturbance Observer for Hypersonic Vehicles [J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2015, 2(1): 45-55.
- [19] SHARMA M, WARD D G. Flight-Path Angle Control via Neuro-Adaptive Backstepping [R]. AIAA-02-3520.
- [20] 郭一, 刘金琨. 飞行器航迹倾角的自适应动态面控制 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2013, 39(2): 275-279.  
GUO Y, LIU J K. Adaptive Dynamic Surface Control for Aircraft Flight Path Angle [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2013, 39(2): 275-279. (in Chinese)

(编辑: 徐敏)