

# 求解复杂约束条件下最优控制问题的 分段低阶 Gauss 伪谱法

李炳杰<sup>1</sup>, 王 磊<sup>1</sup>, 马青海<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学理学院, 西安, 710051; 2. 空军试验训练基地第二试验训练区武器系统总体试验研究所, 甘肃酒泉, 732750)

**摘要** 针对含有复杂约束条件的最优控制问题, 提出分段低阶 Gauss 伪谱法。以常规 Gauss 伪谱法为基础, 划分时间区间, 在子区间上利用低阶 Gauss 数值积分离散 Bolza 型性能指标, 利用插值型数值积分的性质离散状态微分方程, 利用低阶 Gauss 伪谱法处理复杂约束条件, 得到对应的非线性规划。对状态轨线或控制函数较复杂的情形, 该方法克服了传统 Gauss 伪谱法直接在时间区间上配置 Gauss 点, 插值多项式阶数高、数值解不稳定的缺陷, 并且数值解局部代数精度高、计算量小。最后将该方法应用于求解飞行器对地打击轨迹规划最优控制问题, 结果表明算法有效可行。

**关键词** 最优控制; 飞行器轨迹规划; Gauss 伪谱法

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2017.05.016

**中图分类号** O232 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2017)05-0092-07

## The Solution of an Optimal Control Problem under Conditions of Complicated Restrictions by Using the Segmented Low-order Gauss Pseudospectral Method

LI Bingjie<sup>1</sup>, WANG Lei<sup>1</sup>, MA Qinghai<sup>2</sup>

(1. Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2. Weapon System Test Research Institute of the Second Pilot Training Area of Air Force Pilot Training Bases, Jiuquan 732750, Gansu, China)

**Abstract:** As for the solution of optimal control issues under conditions of complex restrictive conditions, this paper proposes a segmented low-order Gauss pseudospectral method. In this paper, a nonlinear program issue is obtained by the basis of conventional Gauss pseudospectral method and the temporal intervals compartmentalization. During each subinterval, low-order Gauss numerical integration is utilized for discreteness performance of Bolza problem; the property of interpolated type numerical integration is utilized for discreteness of differential state equation; low-order Gauss pseudospectral method is utilized to process complicate constraints. The method overcomes the shortcomings of a higher order of interpolation polynomial and an unstable numerical solution caused by producing Gaussian points at the interval directly under the situation of complex state orbit and control function, thus, having high local algebraic precision and

**收稿日期:** 2016-12-01

**基金项目:** 国家自然科学基金(61631019)

**作者简介:** 李炳杰(1963—), 男, 甘肃会宁人, 教授, 博士, 主要从事最优控制数值算法以及最优化理论研究。E-mail: libingjie45@aliyun.com

**引用格式:** 李炳杰, 王磊, 马青海. 求解复杂约束条件下最优控制问题的分段低阶 Gauss 伪谱法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2017, 18(5): 92-98. LI Bingjie, WANG Lei, MA Qinghai. The Solution of an Optimal Control Problem under Conditions of Complicated Restrictions by Using the Segmented Low-order Gauss Pseudospectral Method [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2017, 18(5): 92-98.

small computation in numerical solution. Ultimately, the method is applied to optimal trajectory planning for air-to-ground operations. The result shows that the algorithm is effective and feasible.

**Key words:** optimal control; aircraft trajectory planning; Gauss pseudospectral method

求解含有复杂约束条件的最优控制问题一般较为困难,通常情况下利用直接法<sup>[1-2]</sup>或间接法<sup>[3-4]</sup>得到数值解。间接法虽然精度高,但计算量大,直接法化最优控制问题为非线性规划问题,应用较为方便,但离散后的复杂非线性方程给继续求解带来困难,并且精度不能完全保证。Legendre 伪谱法<sup>[5]</sup>, Gauss 伪谱法<sup>[6-8]</sup>和 Radau 伪谱法<sup>[9-10]</sup>等是一类直接法,用 Lagrange 多项式线性表示状态变量和控制变量,从而化微分方程约束为代数约束,代数精度高,计算量小。Gauss 伪谱法所取配置点在闭区间 $[-1, 1]$ 之上,通过线性变换把时间区间 $t \in [t_0, t_f]$ 映射到 $\tau = [-1, 1]$ ,对 $\tau = [-1, 1]$ 进行配置点离散。配置点离散法的实质是在固定采样点上的插值近似,取恰当的配置点的目的是使数值积分的精度尽可能高,但为保证计算精度,多项式的阶数一般较高,由此会产生高阶插值带来的不稳定现象<sup>[11-13]</sup>,特别对控制函数和轨线较复杂的情形更是如此。本文提出一种分段低阶 Gauss 伪谱法克服该缺陷,利用分段低阶 Gauss 伪谱法离散性能指标包含的数值积分和状态方程对应的数值积分,保证数值积分局部区域有足够高的代数精度,计算复杂度小,且数值计算是稳定的。最后,利用该算法求解飞行器对地打击轨迹规划最优控制问题<sup>[14]</sup>,进一步验证本文方法的有效性。

## 1 分段低阶 Gauss 伪谱法

不失一般性,考虑一般形式的具有复杂约束的 Bolza 型最优控制问题:

$$\min J = \Phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) +$$

$$\int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (1)$$

$$\text{s. t. } x'(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \quad (2)$$

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0 \quad (3)$$

$$c(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad (4)$$

式中:状态变量 $x \in R^n$ ;控制变量 $u \in R^m$ ;  $t$ 为时间;初始时间为 $t_0$ ;终端时间为 $t_f$ ;  $\phi \in R^q$ ;  $f \in R^n$ ;  $c \in R^c$ 是向量函数; $\Phi, g$ 均是标量函数。

将时间区间 $[t_0, t_f]$ 等分为 $N$ 个子区间,即 $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = t_f$ ,设时间步长为 $h$ ,即 $h = t_i - t_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),则控制问题的性能指标为

$$\min J = \Phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) +$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(x(t), u(t), t) dt \quad (5)$$

对每个子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ ,把子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 映射到 $\tau_i = [-1, 1]$ ,对 $t$ 作变换 $t = \frac{h}{2}\tau_i + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ ,则原最优控制问题的性能指标就转化为

$$\min J = \Phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) +$$

$$\frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 G(X(\tau_i), U(\tau_i), \tau_i) d\tau_i \quad (6)$$

$$\text{式中: } X(\tau_i) = x(h\tau_i/2 + (t_{i-1} + t_i)/2);$$

$$U(\tau_i) = u(h\tau_i/2 + (t_{i-1} + t_i)/2);$$

$$\Phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) = \Phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f);$$

$$G(X(\tau_i), U(\tau_i), \tau_i) =$$

$$g\left(x\left(\frac{h}{2}\tau_i + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right), u\left(\frac{h}{2}\tau_i + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right), \frac{h}{2}\tau_i + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right).$$

利用低阶 Gauss 求 $\int_{-1}^1 G(X(\tau_i), U(\tau_i), \tau_i) d\tau_i$ ,以 $n = 3$ 的情形为例,在 $\tau_i \in [-1, 1]$ 上取配置点 $\tau_{i1} = -0.7746, \tau_{i2} = 0, \tau_{i3} = 0.7746$ ,利用 Gauss 积分公式:

$$\int_{-1}^1 f(\tau_i) d\tau_i = \alpha_1 f(\tau_{i1}) + \alpha_2 f(\tau_{i2}) + \alpha_3 f(\tau_{i3})$$

式中: $\alpha_1 = \alpha_3 = 0.5555; \alpha_2 = 0.8890$ 。则性能指标可转化为:

$$\min J = \Phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \alpha_k G(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik}) \quad (7)$$

$G(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik}) = G(X(\tau_{ik}), U(\tau_{ik}), \tau_{ik}) = g(x(t_{ik}), u(t_{ik}), t_{ik})$ ,其中 $X_{ik}$ 是 $X(\tau_{ik})$ 的数值解, $U_{ik}$ 是 $U(\tau_{ik})$ 的数值解, $k = 1, 2, 3; t_{ik} = \frac{h}{2}\tau_{ik} + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$ 。

根据 Gauss 数值积分公式的性质,其代数精度为5,即局部范围对5次多项式精确成立,因此利用分段低阶 Gauss 数值积分公式求积分的计算精度仍然较高。

针对状态方程 $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$ ,对每个子区间对应 Gauss 数值积分转换后的子区间上以 LG 配置点为离散点作数值离散,构造低阶拉格朗日插值多项式基函数,对状态函数进行近似:

$$X(\tau_i) = \sum_{k=1}^3 L_{ik}(\tau_i) X(\tau_{ik}) \quad (8)$$

式中拉格朗日插值多项式基函数为:

$$L_{ik}(\tau_i) = \prod_{j=1, j \neq k}^3 \frac{\tau_i - \tau_{ij}}{\tau_{ik} - \tau_{ij}}$$

( $i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, 3$ )

对式(8)关于 $\tau_i$ 求导可得:

$$\dot{X}(\tau_i) = \sum_{k=1}^3 \dot{L}_{ik}(\tau_i) X(\tau_{ik}) = \sum_{k=0}^3 D_{ik}(\tau_i) X(\tau_{ik}) \quad (9)$$

$$D_{ik}(\tau_i) = \dot{L}_{ik}(\tau_i) = \left( \sum_{j=1, j \neq k}^3 (\tau_i - \tau_{ij}) \right) / \prod_{j=1, j \neq k}^3 (\tau_{ik} - \tau_{ij})$$

配置点  $\tau_{im} (i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, 3)$ ,  $D_{ik}(\tau_{im})$  为常值, 式(9)代入(2), 并对时间求导, 在配置点处离散, 将状态微分方程约束转化为代数约束有:

$$\sum_{k=0}^3 D_{ik}(\tau_{im}) X_{ik} - \frac{h}{2} F(X_{im}, U_{im}, \tau_{im}) = 0 \quad (10)$$

式中:  $i=1, 2, \dots, N; m=1, 2, 3; X_{ik}, U_{ik}, X_{im}, U_{im}$  分别是  $X(\tau_{ik}), U(\tau_{ik}), X(\tau_{im}), U(\tau_{im})$  的数值解;  $F(X_{im}, U_{im}, \tau_{im}) = f(x(t_{im}), u(t_{im}), t_{im})$ 。

式(10)中终端状态  $X_f$  未定义, 为此, 对状态方程式(2)两端积分, 可得:

$$\int_{t_0}^{t_f} x'(t) dt = \int_{t_0}^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x(t), u(t), t) dt = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \alpha_k F(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik})$$

即有:

$$X_f - X_0 = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \alpha_k F(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik}) \quad (11)$$

针对约束条件  $\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0, c(x(t), u(t), t) \leq 0$  可相应地转换为  $\phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) = 0$  以及  $c(X(\tau_{ik}), U(\tau_{ik}), \tau_{ik}) \leq 0$ 。

需要指出的是, 这里所求的数值解是 Gauss 配置点  $\tau_{ik} \in [-1, 1]$  处的解, 即对应控制函数和状态函数在  $t_{ik} = \frac{h}{2} \tau_{ik} + \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$  处的数值解, 并不是将时间区间  $[t_0, t_f]$  等分为  $N$  个子区间的端点 ( $\tau_{ik} = -1$  或  $\tau_{ik} = 1$ ) 处的数值解。初始和终端处的状态函数的数值解约束条件可通过(11)获得。

利用分段低阶(这里取 3 个配置点) Gauss 方法可将最优控制问题转化为:

$$\begin{cases} \min J = \Phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) + \\ \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \alpha_k G(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik}) \\ \sum_{k=0}^3 D_{ik}(\tau_{im}) X_{ik} - \frac{h}{2} F(X_{im}, U_{im}, \tau_{im}) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N; m = 1, 2, 3 \\ X_f - X_0 - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^3 \alpha_k F(X_{ik}, U_{ik}, \tau_{ik}) = 0 \\ \phi(X_0, \tau_0, X_f, \tau_f) = 0 \\ c(X(\tau_{ik}), U(\tau_{ik}), \tau_{ik}) \leq 0 \\ (k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (12)$$

问题(12)中的未知变量有状态变量和控制变量在配置点处的数值解共  $2 \times 3N$  个以及初始和终端处状态函数的数值解  $X_0$  和  $X_f$ , 如果终端时刻不固

定,  $\tau_f$  (对应  $t_f$ ) 也是未知变量。通过求解非线性规划问题(12), 即可得原问题的数值解。

需要进一步说明的是, 分段低阶 Gauss 伪谱法通过先划分再作 Gauss 变换将时间区间  $[t_0, t_f]$  等分为  $N$  个子区间后通过 Gauss 数值积分离散最优控制问题得到其数值解的方法是数值稳定的。由于 Gauss 变换是线性变换, 变换后的控制问题与原问题具有等价的一阶最优性条件<sup>[7]</sup>, 对应的离散问题具有等价的 Karush-Kuhn-Tucker 最优性条件<sup>[15]</sup>, 因此, 分段低阶 Gauss 伪谱法不会影响控制系统的稳定性。

## 2 数值算例

考虑求解飞行器对地打击轨迹规划最优控制问题(具体参数参见文献[14]), 航程最短性能指标为:

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (H'(t))^2} dt \quad (13)$$

式中: 时间区间为  $[t_0, t_f] = [0, 40]$ ; 状态函数为  $v(t), \theta(t), \phi(t), x(t), y(t), z(t)$ ; 控制函数为  $n_x(t), n_y(t), \gamma(t)$ 。状态方程为:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g(n_x - \sin\theta); \frac{d\theta}{dt} = \frac{g(n_y \cos\gamma - \cos\theta)}{v}; \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{gn_y \sin\gamma}{v \cos\theta}; \frac{dx}{dt} = v \cos\theta \cos\phi; \\ \frac{dy}{dt} = v \cos\theta \sin\phi; \frac{dH}{dt} = v \sin\theta \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $g$  为重力加速度;  $v(t)$  为飞机的飞行速度;  $\theta(t)$  为航迹倾角;  $\phi(t)$  为航迹偏角;  $n_x(t), n_y(t), \gamma(t)$  为飞行过程中飞机的切向过载、法向过载以及绕滚转角。边界条件为:

$$\begin{cases} x(t_0) = 0, x(t_f) = 9\ 580 \\ y(t_0) = 0, y(t_f) = -2\ 300 \\ H(t_0) = 200, H(t_f) = 1\ 000 \\ v(t_0) = 750, v(t_f) = 900 \\ \theta(t_0) = 0, \theta(t_f) = -20 \\ \phi(t_0) = 150, \phi(t_f) = 135 \end{cases} \quad (15)$$

飞机飞行机动性能约束、探测威胁约束、杀伤威胁等约束为:

$$\begin{cases} P_{R_{\text{cl}}} = e^{-\frac{k \cdot r_1^2}{H} \frac{r_1^4}{R_{\text{cl}}^{\text{max}}}} \leq 0.5 \\ P_{A_f} = e^{-\frac{r_2}{R_{\text{max}}}} \leq 0.1 \\ 750 \leq v \leq 1\ 150 \\ -1G \leq n_x \leq 1G \\ -5G \leq n_y \leq 5G \\ -85^\circ \leq \gamma \leq 85^\circ \end{cases} \quad (16)$$

式中:飞机被雷达探测到的概率近似表达式为  $P_{R_i}$

$= e^{-\frac{k \cdot r_1^2}{H} - \frac{r_1^4}{R_{R_{i\max}}^4}}$ ;  $k$  是雷达性能相关的参数; $r_1$  为飞机与雷达之间的水平距离; $R_{R_{i\max}}$  为雷达在水平方向上的最大探测距离。

模型要求  $P_{R_i} \leq 0.5$ (参见文献[14]),杀伤威胁方面,假设在敌方火力射程范围内飞机受到杀伤的概率与飞机到火力源的水平距离满足柏松分布关系。敌方火力对飞机造成杀伤的概率近似为  $P_{A_f} = e^{-\frac{r_2}{R_{\max}}}$ 。其中  $r_2$  为飞机与敌方火力之间的水平距离, $R_{\max}$  为敌方火力最大杀伤半径。模型要求  $P_{A_f} \leq 0.1$ 。飞行机动性能约束方面,飞行速度限制为  $750 \leq v \leq 1150$ ,过载限制为  $-1G \leq n_x \leq 1G, -5G \leq n_y \leq 5G$ ,滚转角限制为  $-85^\circ \leq \gamma \leq 85^\circ$ 。雷达位置坐标为(9 700, -5 000, 0),最大作用半径为 10 000 m;高炮位置为(8 000, -4 000, 0),最大杀伤半径为 1 000 m。将时间区间 20 等分,利用分段低阶 Gauss 伪谱法(这里取 3 阶)求解该问题,得到状态函数、控制函数及雷达探测和高炮威胁轨迹(见图 1~13)。

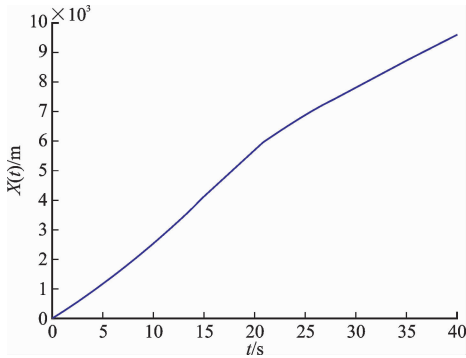


图 1 状态函数轨迹  $x(t)$  的数值解

Fig. 1 The numerical solution of trajectory of the state function  $x(t)$

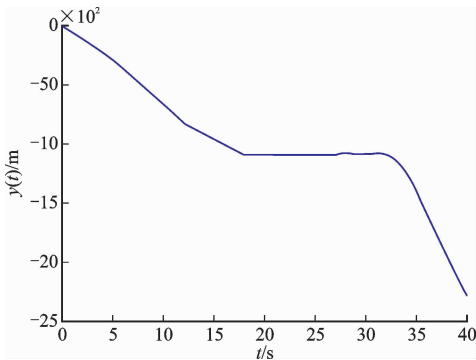


图 2 状态函数轨迹  $y(t)$  的数值解

Fig. 2 The numerical solution of trajectory of the state function  $y(t)$

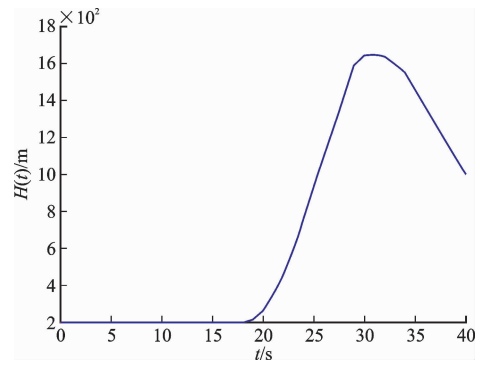


图 3 状态函数轨迹  $H(t)$  的数值解

Fig. 3 The numerical solution of trajectory of the state function  $H(t)$

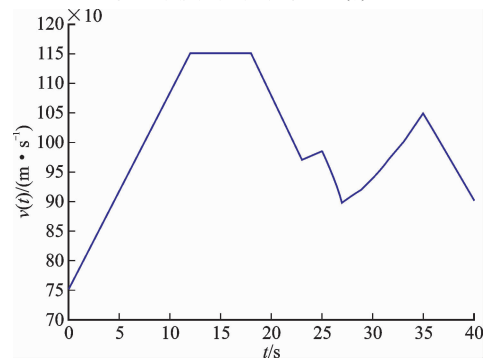


图 4 状态函数轨迹  $v(t)$  的数值解

Fig. 4 The numerical solution of trajectory of the state function  $v(t)$

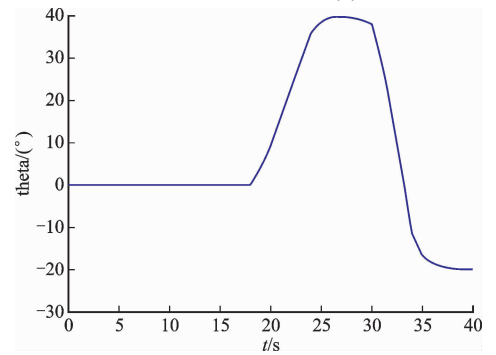


图 5 状态函数轨迹  $\theta(t)$  的数值解

Fig. 5 The numerical solution of trajectory of the state function  $\theta(t)$

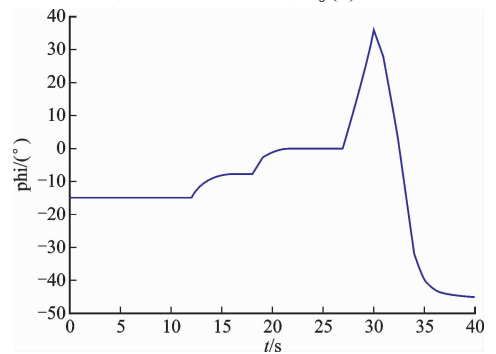


图 6 控制函数  $\phi(t)$  的数值解

Fig. 6 The numerical solution of control function  $\phi(t)$

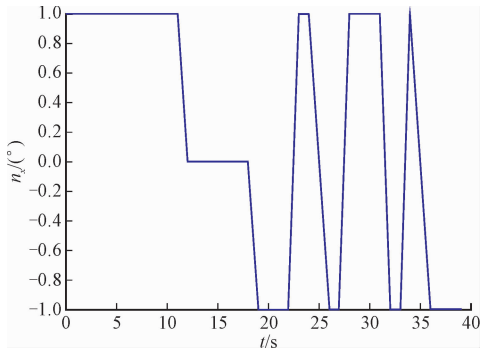


图7 控制函数  $n_x(t)$  的数值解

Fig. 7 The numerical solution of control function  $n_x(t)$

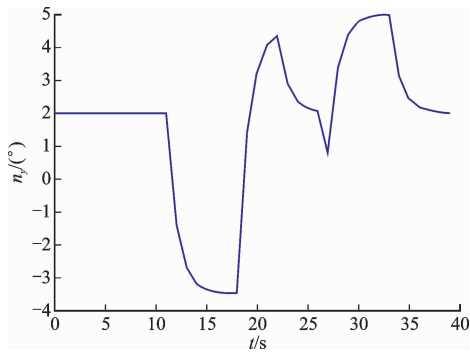


图8 控制函数  $n_y(t)$  的数值解

Fig. 8 The numerical solution of control function  $n_y(t)$

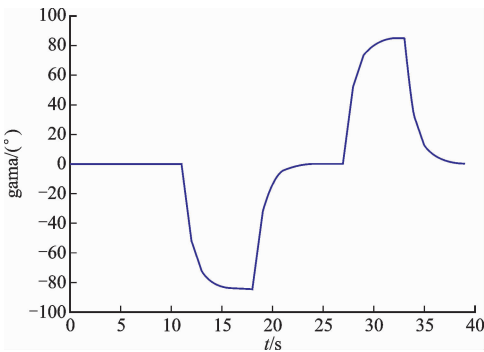


图9 控制函数  $\gamma(t)$  的数值解

Fig. 9 The numerical solution of control function  $\gamma(t)$

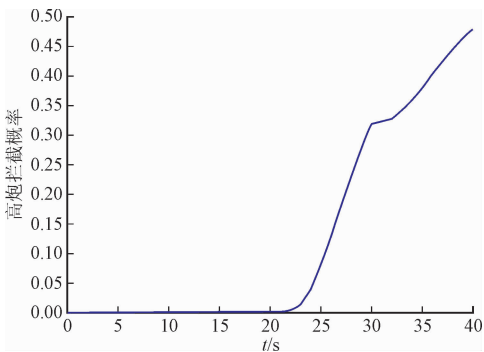


图10 高炮拦截威胁概率

Fig. 10 The probability of being intercepted by anti-aircraft artillery

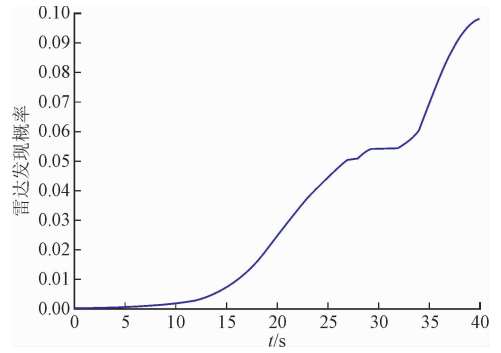


图11 飞机被雷达发现概率

Fig. 11 The probability of being detected by radar

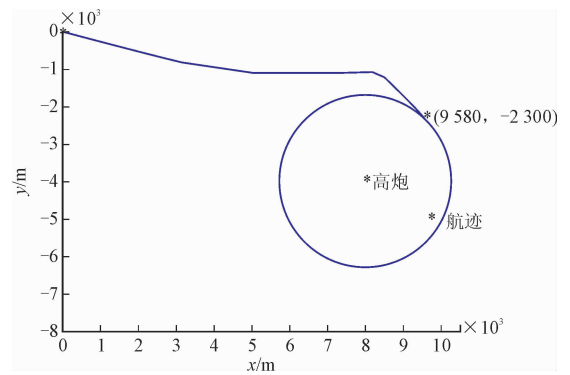


图12 水平运动轨迹与高炮的关系图

Fig. 12 The relationship between horizontal trajectory and anti-aircraft artillery

通过计算,航程的最短路径为 11 057,见图 13。文献[14]利用  $B$  样条的样板航迹规划方法仿真了时间最优控制问题  $\min J = \int_{t_0}^{t_f} t dt$ , 同时在  $t_f - t_0 \leq 40$  ( $t_f$  未知) 的约束条件下仿真了航迹规划。为验证本文提出的分段低阶 Gauss 伪谱法的可行性,将本文结果与文献[14]表 5.7 和表 5.9 的结果进行了对比,见表 1。

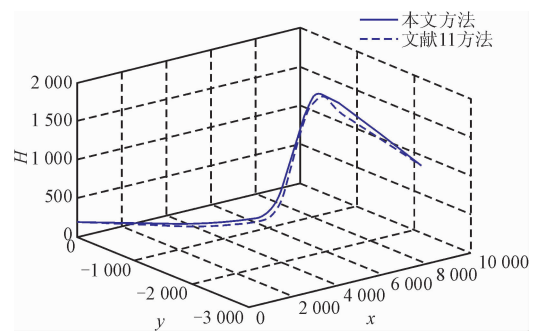


图13 本文与文献[14]算法三维空间航路对比

Fig. 13 The comparison of trajectory between this paper and literature [14]

表1 本文方法与文献[14]研究结果的对比  
Tab. 1 Results contrast of this paper and literature 14

对比项目	文献[14]时间控制算法	文献[14]航迹规划算法	本文方法
航程/m	10 874.4	10 682.8	11 057.0
航时/s	38.77	39.52	40.00
计算时间/s	28.344	80.141	15.116
最大探测概率	0.479 1	0.479 1	0.478 4
最大杀伤概率	0.086 7	0.086 7	0.096 0
最大雷达探测概率点	(9 580, -2 300, 1000)	(9 580, -2 300, 1000)	(9 580, -2 300, 1 000)
最大高炮杀伤概率点	(9 533.61, -2 095.11, 1 104.65)	(9 533.61, -2 095.11, 1 104.65)	(9 580, -2 300, 1 000)

由表1和图13可知,本文得到的路径与文献[14]的路径是一致的,尽管模型略有不同。本文平均航速介于文献[14]两类模型之间,最大雷达探测概率点与最大探测概率高度一致,甚至最大探测概率略低于文献[14];最大高炮杀伤点略迟于文献[14],投放点均与最大杀伤点和最大探测点一致;最大杀伤概率略大于文献[14],但满足杀伤条件;本文计算时间优于文献[14],因此,本文结论与文献[14]是一致的。战术方面,由于受到雷达和高炮威胁,飞机飞行的最优轨迹在飞行初期基本上平行且加速飞行,中期从匀速到降速飞行,但飞机呈上升状态,用以规避威胁,最后阶段有一个加速再降速的俯冲过程并在水平方向有一个回旋上升再压低的过程。所得数值解完全符合战术实际<sup>[14]</sup>。

由于该问题约束条件较复杂,无法得到精确解,为验证得到的数值解的最优性和合理性,在满足约束条件的情形下,对得到的控制函数  $n_x(t)$ ,  $n_y(t)$ ,  $\gamma(t)$  的数值解作加噪扰动,在光滑性不佳的数值解附近随机赋予服从正态分布的微小扰动  $\epsilon$  (但需满足约束条件),以加噪扰动后的控制函数数值解为已知向量,求解状态微分方程对应的状态函数的数值解,进一步计算路径,与本文计算的最优路径作对比。通过多次仿真计算发现,控制函数对扰动较敏感。控制函数微小的扰动会带来路径的增加,甚至在给定的时间内无法完成任务。因此,若选择不恰当的控制,除路径增加外,为避免高炮威胁和雷达探测威胁,加之飞机性能约束和航速限制,甚至在规定的时间内无法完成战术动作。由此可知,本算例得到的控制函数的数值解符合最优性要求,是合理的。通过与文献[14]研究结果的对比分析(表1)可知,最大探测概率、最大杀伤概率已经接近临界值,由此说明本文方法(或文献[14])得到的数值解的最优性和合理性。

值得说明的是,对于突发威胁,比如新的火炮或探测威胁,只需增加约束条件进行离线规划即

可,本文数值方法适用于模型本身有解的离线问题,但不适用实时情形,即只适用于开环控制,不适用闭环的情形。

### 3 结论

本文针对复杂约束条件下的最优控制问题,改进了常规 Gauss 伪谱法,提出了分段低阶 Gauss 伪谱法,克服了状态函数与控制函数较复杂时常规 Gauss 伪谱法不稳定的缺陷,利用直接法所得的非线性规划问题更加简单、明晰。利用该方法求解飞行器对地打击轨迹规划最优控制问题,由于控制函数较复杂,震荡激烈,光滑性不佳,利用常规 Gauss 伪谱法会产生不稳定现象,利用分段低阶方法可避免这种现象发生,由此验证了本文方法的可行性。

#### 参考文献(References):

- [1] TOMPKINS P, STENTZ A, WETTERGREEN D. Mission-Level Path Planning and Replanning for Rover Exploration [J]. Robot Auton Syst, 2006, 54: 174-183.
- [2] 朱礼冬, 朱经浩. 广义 LQ 最优控制问题的极小化序列 [J]. 应用数学与计算数学学报, 2014, 28(3): 266-274.  
ZHU L D, ZHU J H. Minimizing Sequence to Generalized LQ Optimal Control Problem [J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 2014, 28(3): 266-274. (in Chinese)
- [3] GARG D, PATTERSON M A, DARBY C L, et al. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation of Finite-Horizon and Infinite-Horizon Optimal Control Problems via a radau Pseudospectral method [J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2): 335-358.
- [4] 李炳杰, 张国华, 吕园. 求解最优控制问题的微分变换算法 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2011, 12(1): 90-94.

- LI B J, ZHANG G H, LYU Y. The Differential Transform Method for Solving Optimal Control Problems [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2011, 12(1): 90-94. (in Chinese)
- [5] ELNAGAR G, KAZEMI M, RAZZAGHI M. The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 88: 363-375.
- [6] ZHANG Y A, WANG L Y, ZHAO G R. Pseudo Spectral Based Free Sampling Real - Time Optimal Feedback Control and Its Application [J]. Control Theory & Applications, 2012, 29(9): 1151-1156.
- [7] 孙勇, 张卯瑞, 梁晓玲. 求解含复杂约束非线性最优控制问题的改进 Gauss 伪谱法 [J]. 自动化学报, 2013, 39(5): 672-678.
- SUN Y, ZHANG M R, LIANG X L. Improved Gauss Pseudospectral Method for Solving Nonlinear Optimal Control Problem with Complex Constraints [J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 39(5): 672-678. (in Chinese)
- [8] 程建锋, 董新民, 薛建平, 等. 基于 Gauss 伪谱法的飞机最优目标瞄准控制 [J]. 计算机应用, 2013, 33(11): 3291-3295.
- CHENG J F, DONG X M, XUE J P, et al. Aircraft optimal target aiming control based on Gauss pseudo spectral method [J]. Journal of Computer Applications, 2013, 33(11): 3291-3295. (in Chinese)
- [9] GONG Q, KANG W, ROSS I M. A Pseudospectral Method for the Optimal Control of Constrained Feedback Linearizable Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(7): 1115-1129.
- [10] 黄洁, 张友安, 王丽英. 基于 Radau 伪谱法的非线性最优控制问题的收敛性 [J]. 控制理论与应用, 2013, 31(2): 263-267.
- HUANG J, ZHANG Y A, WANG L Y. Convergence of Nonlinear Optimal Control Problem Using Radau Pseudospectral Method [J]. Control Theory & Applications, 2013, 31(2): 263-267.
- [11] TODD G. Advancement and Analysis of Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control Problems [J]. Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [12] GARG D, PATTERSON M A, FRANCOLIN C, et al. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation of Finite-Horizon and Infinite-Horizon Optimal Control Problems Using A Radau Pseudospectral Method [J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2): 335-358.
- [13] SUN Y, ZHANG M. Optimal Reentry Range Trajectory of Hypersonic Vehicle by Gauss Pseudospectral Method [C]// International Conference on Intelligent Control and Information Processing. IEEE, 2011: 545-549.
- [14] 张超杰. 基于微分平坦理论的飞行器轨迹规划方法研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010.
- ZHANG C J. Research on Aircraft Trajectory Planning Based on Differential Flatness Theory [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2010. (in Chinese)
- [15] GONG Q, ROSS I M, KANG W, et al. Connections between the Covector Mapping Theorem and Convergence of Pseudospectral Methods for Optimal Control [J]. Computational Optimization and Applications, 2008, 41(3): 307-335.

(编辑: 姚树峰)