有关本原自动机的研究

徐 慧[1,2]，田 径[3]，冯军庆[2]
(1.西北大学数学学院,西安,710127;2.空军工程大学理学院,西安,710051;
3.西安外国语大学经济金融学院,西安,710128)

摘要　讨论了本原自动机的自同态,证明了如果广义正规自动机 $\boldsymbol{A}$ 的所有本原自动机都是 $S\ell$(或 G)-自动机,那么 $\boldsymbol{A}$ 也是 $S\ell$(或 G)-自动机;证明了强连通本原自动机的并是 G-自动机;利用极小生成元集将标准自动机的定义推广到有限自动机,给出了广义标准自动机的定义及其成立的一个充分条件。

关键词　本原自动机;极小生成元集;自同态幺半群
DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2016.02.017
中图分类号　O152.7　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2016)02-0088-03

Research on Primary Automation

XU Hui[1,2], TIAN Jing[3], FENG Junqing[2]
(1. College of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710069, China;
2. Science College, Air Force Engineering University, Xi′an 710051, China;
3.Economy and Finance College, Xi′an Internation Studies University, Xi′an 710128, China)

Abstract: Some properties on primary automata are studied in this paper. Firstly, the endomorphism of the primary automaton is dealt with. The paper proves that if all the primary automata are $S\ell$ (or G)-automaton, so is . Secondly, the union of the strongly connected automata is proved to be G -automaton. Finally, the definition of canonical automata is extent to finite automata by the minimal generated set. Also, the definition of generalized canonical automata is given and the sufficient conditions are provided.

Key words: primary automaton; minimal generated set; Endomorphism monoid

1　预备知识

1936 年,英国数学家 Turing 提出一种抽象的自动机,称为图灵机。用图灵机来定义可计算函数类,开创了自动机理论的抽象研究。20 世纪五六十年代,自动机理论得到了迅速发展:Kleene、Shannon、Minsky、Santos、Wee 等人先后提出有限自动机、概率自动机、无限自动机、模糊自动机等多种抽象自动机的概念[1-4]。

有限自动机是自动机理论的重要分支,在神经网络、密码学、控制理论等众多学科领域中具有广泛应用。所谓有限自动机[5]是一个三元组 (A,Σ,δ),其中 A 为有限状态集,Σ 为有限字母表,δ 为 $A\times\Sigma$ 到 A 上的函数,称为状态转换函数。令 Σ^* 表示 Σ 上所有有限字符串构成的集合。自动机的状态转换函数 δ 可以扩张成 $A\times\Sigma^*$ 到 A 的函数 $\bar{\delta}$:

1)$(\forall a\in A)\bar{\delta}(a,\varepsilon)=a$;

2)$(\forall a\in A,x\in\sum,u\in\sum^*)\bar{\delta}(a,ux)=$

收稿日期:2015-05-06
基金项目:国家自然科学基金(61402364);陕西省自然科学基金(2014JQ1014);陕西省教育厅基金(14JK1246)
作者简介:徐 慧(1983—),女,山东高唐人,讲师,博士,主要从事自动机的代数理论研究.E-mail:xaxuhui716@126.com

引用格式:徐慧,田径,冯军庆,等. 有关本原自动机的研究[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2016,17(2):88-90. XU Hui, TIAN Jing, FENG Junqing.Research on Primary Automation[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition,2016,17(2):88-90.

$\bar{\delta}(\bar{\delta}(a,u),x)$。

为方便起见，用 δ 表示 $\bar{\delta}$，记 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，$\boldsymbol{B}=(B,\Sigma,\delta')$，若 $B\subseteq A$，并且 δ' 是 δ 在 $B\times\Sigma^*$ 上的限制，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子自动机[6]，记作 $\boldsymbol{B}\leqslant\boldsymbol{A}$。设 $a\in A$，记 $\boldsymbol{A}(a)=\{\delta(a,u)\,|\,u\in\Sigma^*\}$。称三元组 $(A(a),\Sigma,\delta)$ 是由 a 生成的子自动机[6]，记作 $\boldsymbol{A}(a)$。若 $A(a)=A$，则称 a 是 $\boldsymbol{A}$ 的生成元[7]。$\boldsymbol{A}$ 的所有生成元构成的集合用 $\mathrm{Gen}(\boldsymbol{A})$ 表示。若 $\mathrm{Gen}(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是循环自动机[7]。若 $\mathrm{Gen}(\boldsymbol{A})=A$，称 $\boldsymbol{A}$ 是强连通的[8]。

Ito 在文献[8]中给出了强连通自动机的表示及其分类。文献[10～11]描述了循环自动机的表示。Bavel 在文献[6]中指出任意有限自动机可分解成本原自动机的并。本文将利用本原自动机讨论广义正规自动机。

定义 1[6]　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是有限自动机，$\boldsymbol{B}=(B,\Sigma,\delta)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子自动机。若 $\boldsymbol{B}$ 满足：$(\exists a\in A)B=A(a)$；$(\forall b\in A)\boldsymbol{B}\leqslant\boldsymbol{A}(b)\Rightarrow B=A(b)$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本原自动机。

定义 2[8]　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，$\boldsymbol{B}=(B,\Sigma,\gamma)$，若映射 $f:A\rightarrow B$ 满足：$(\forall a\in A,\forall x\in\Sigma,)f(\delta(a,x))=\gamma(f(a),x)$，则称 f 是从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的同态。称自动机 $\boldsymbol{A}$ 到自身的同态为自同态。容易证明，$\boldsymbol{A}$ 的自同态的全体 $E(\boldsymbol{A})$ 在通常意义的映射合成下构成一个含幺半群，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的自同态幺半群。若 $E(\boldsymbol{A})$ 是半格（或群），则称 $\boldsymbol{A}$ 是 $S\ell$（或 G）-自动机。

2　证明过程

引理 1[6]　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是有限自动机。如果 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有（不同的）本原自动机，那么：$A=\bigcup\limits_{i=1}^{i=n}P_i$；$A\neq\bigcup\limits_{i\neq j}P_i$，其中 P_i 是本原自动机 $\boldsymbol{P}_i$ 的状态集，$i,j=1,2,\cdots,n$。

在此基础上，Bavel 给出了有限自动机上自同态的一个刻画。

引理 2[6]　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有本原自动机。若 $f\in E(\boldsymbol{A})$，则存在 $f_i\in H(\boldsymbol{P}_i\rightarrow\boldsymbol{A})$ 使得 $f=f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n$，其中 $f_i\vee f_j$ 定义如下：

若任意 $r\in P_i\cap P_j$ 有 $f_i(r)=f_j(r)$，则：

$$f_i\vee f_j(s)=\begin{cases}f_i(s),s\in P_i\\ f_j(s),s\in P_j\end{cases}$$

否则 $f_i\vee f_j$ 是空函数。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，$S\subseteq A$，若 $A=\bigcup\limits_{s\in S}A(s)$，则称 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的生成元集[7]。设 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有本原自动机，那么 $S=\{s_i\,|\,s_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{P}_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的极小生成元集[7]。设 $s_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{P}_i)$，$f\in E(\boldsymbol{A})$，若 $f(s_i)\in P_k$，则 $f(P_i)\subseteq P_k$。如果任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $f(s_i)\in P_i$，那么就称 $\boldsymbol{A}$ 是广义正规自动机。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，由引理 2 可得：

命题 1　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有本原自动机。若 $f\in E(\boldsymbol{A})$，则存在 $f_i\in E(\boldsymbol{P}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $f=f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n$。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本原自动机，$f_i,g_i\in H(\boldsymbol{P}_i\rightarrow\boldsymbol{A})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 若 $\boldsymbol{A}$ 是广义正规自动机，则任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $f_i\in E(\boldsymbol{P}_i)$。设 $f,g\in E(\boldsymbol{A})$，由命题 1 可知，存在 $f_i,g_i\in E(\boldsymbol{P}_i)$ 使得 $f=f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n$，$g=g_1\vee g_2\vee\cdots\vee g_n$。由文献[6]中定理 2 可知任意 $f_i,g_i\in H(\boldsymbol{P}_i\rightarrow\boldsymbol{A})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 有：

$f_i\vee f_j=f_j\vee f_i$；

$(f_i\vee f_i)\vee f_k=f_i\vee(f_i\vee f_k)$；

$(f_i\vee f_j)\circ(g_i\vee g_j)=(f_i\circ g_i)\vee(f_j\circ g_j)$。

若本原自动机 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $S\ell$-自动机，则：

$$\begin{aligned}f\circ g&=(f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n)\circ(g_1\vee g_2\vee\cdots\vee g_n)=\\&(f_1\circ g_1)\vee(f_2\circ g_2)\vee\cdots\vee(f_n\circ g_n)=\\&(g_1\circ f_1)\vee(g_2\circ f_2)\vee\cdots\vee(g_n\circ f_n)=\\&(g_1\vee g_2\vee\cdots\vee g_n)\circ(f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n)=g\circ f。\end{aligned}$$

同样可以证明 $f^2=f$。进一步，若本原自动机 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 G-自动机，则任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $(f_i\vee f_j)^{-1}=(f_i)^{-1}\vee(f_j)^{-1}$。因此，任意 $f=f_1\vee f_2\vee\cdots\vee f_n\in E(\boldsymbol{A})$ 存在 $f^{-1}=(f_1)^{-1}\vee(f_2)^{-1}\vee\cdots\vee(f_n)^{-1}\in E(\boldsymbol{A})$ 使得 $f\circ f^{-1}=I$，其中 I 是 A 上的恒等映射，这样得到了定理 1。

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，若本原自动机 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是 $S\ell$（或 G）-自动机，则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $S\ell$（或 G）-自动机。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，$f\in E(\boldsymbol{A})$，任取 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，令 $f_i=f|_{P_i}$，则 $f_i\in E(\boldsymbol{P}_i)$。定义映射 $\varphi:E(\boldsymbol{A})\rightarrow(E(\boldsymbol{P}_1),E(\boldsymbol{P}_2),\cdots E(\boldsymbol{P}_n))$ 如下：

$(\forall f\in E(A))\varphi(f)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$。

下面定理证明了映射 φ 是单同态。

定理 2　设有限自动机 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，若 $\boldsymbol{A}$ 是广义正规自动机，则 φ 是单同态。

证明　设 $f,g\in E(\boldsymbol{A})$，$\varphi(f)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，$\varphi(g)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$。若 $\varphi(f)=\varphi(g)$，则任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $f_i=g_i$。任取 $s_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{P}_i)$ 有 $f_i(s_i)=g_i(s_i)$。从而 $f(s_i)=g(s_i)$。另外，由于自动机上的同态完全由生成元集上的值确定，而 $S=\{s_i\,|\,s_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{P}_i),i=1,2,\cdots,n\}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的极小生成元集，故 $f=g$，即 φ 是单射。

另一方面，设 $\varphi(f\circ g)=((f\circ g)_1,(f\circ g)_2,$

$\cdots,(f\circ g)_n)$，则：

$(f\circ g)_i=(f\circ g)|_{P_i}=f\circ g|_{P_i}=f\circ g_i$。

由于 **A** 是广义正规的，$g(P_i)\subseteq P_i$，故 $f\circ g_i=f_i\circ g_i$，从而 $((f\circ g)_1,(f\circ g)_2,\cdots,(f\circ g)_n)=((f_1\circ g_1),(f_2\circ g_2),\cdots,(f_n\circ g_n))=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\circ(g_1,g_2,\cdots,g_n)$ 即 $\varphi(f\circ g)=\varphi(f)\circ\varphi(g)$，故 φ 是同态。

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，*Feichtinger* 在文献[7]中定义了 A 上的一个等价关系 $\mathscr{R}$ 如下：

$\mathscr{R}=\{(a,b)\in A\times A\,|\,(\exists u,v\in\Sigma^*)\delta(a,u)=b,\delta(b,v)=a\}$。

设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ 是 **A** 的极小生成元集，根据 $\mathscr{R}$ 的定义可知，$\mathscr{R}_{si}$ 表示本原自动机 $\boldsymbol{P}_i$ 的所有生成元，因此 $\mathscr{R}_{s_i}\subseteq A(s_i)$. 如果本原自动机 P_i 是强连通的，那么 $\mathscr{R}_{s_i}=A(s_i)$。进一步，若所有的本原自动机都是强连通的，则 $A=\bigcap_{i=1}^{n}\mathscr{R}_{s_i}$。即 **A** 是由 n 个独立的强连通自动机构成。进一步，我们可以证明 **A** 是 G-自动机。

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$ 是广义正规自动机，若 **A** 的所有本原自动机 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$ 是强连通的，则 **A** 是 G-自动机。

证明 要证明 **A** 是 G-自动机，只需要证明 **A** 上的任意同态都是同构。设：

$f\in E(\boldsymbol{A})$，任取 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，令 $f_i=f|_{P_i}$，则 $f_i\in E(\boldsymbol{P}_i)$。由于 $\boldsymbol{P}_i$ 是强连通的，故 $E(\boldsymbol{P}_i)=G(\boldsymbol{P}_i)$，从而 f_i 是 $\boldsymbol{P}_i$ 上的双射。因此任取 $a\in A$，存在 $b\in A$ 使得 $f(b)=a$，即 f 是满射。又由于 A 是有限自动机，所以 f 也是单射。即 $E(\boldsymbol{A})=G(\boldsymbol{A})$。

并非所有 G-自动机都是强连通自动机的并。本文最后将标准自动机的定义推广到有限自动机。

定义 2 设 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ 是 **A** 的极小生成元集，在状态集 A 上定义一个二元关系 $\mathscr{L}$：

$\mathscr{L}=\{(a,b)\in A\times A\,|\,(\exists s_i\in S)a,b\in O_{si}\}$。

其中 $O_{si}=\{f(s_i)\,|\,f\in E(\boldsymbol{A})\}$。若 $\mathscr{L}$ 是等价关系，则称 A 是广义标准自动机。

下面本文给出 **A** 是广义标准自动机的一个充分条件。

命题 2 设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$，$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ 是 **A** 的极小生成元集。若 **A** 满足以下条件：

1) $(\forall a\in A)(\exists s_i\in S,f\in E(\boldsymbol{A}))a=f(s_i)$；

2)若 $f(s_i)=f(s_j)$，则存在 $h\in G(\boldsymbol{A})$ 使得 $s_i=g(s_j)$。

则 **A** 是广义标准自动机。

证明 $\mathscr{L}$ 显然满足对称性；由条件(1)知任意 $a\in A$ 有 $(a,b)\in\mathscr{L}$，故 $\mathscr{L}$ 满足反身性。

设 $(a,b)\in\mathscr{L}$，$(b,c)\in\mathscr{L}$，则存在 $s_i,s_j\in S$，$f,g,\alpha,\beta,\in E(\boldsymbol{A})$ 使得 $a=f(s_i),b=g(s_i)=\alpha(s_j),c=\beta(s_j)$。由条件 2)知存在 $h\in G(\boldsymbol{A})$ 使得 $s_i=h(s_j)$，从而 $a=fh(s_j),c=\beta(s_j)$，即 $a,c\in O_{s_j}$ 故 $(a,c)\in\mathscr{L}$ 即 $\mathscr{L}$ 满足传递性。从而 $\mathscr{L}$ 是等价关系，所以 **A** 是广义标准自动机。

3 结语

基于本原自动机的研究，本文讨论了非循环有限自动机上的自同态幺半群与其本原自动机上的自同态幺半群之间的关系，同时利用极小生成元集将标准自动机的定义推广到有限自动机，给出了广义标准自动机的定义及其等价刻画。本文的工作对研究有限自动机的表示有一定的意义。

参考文献(References)：

[1] TURING A M. On Computable Numberwith an Application to the Entscheidungs Problem [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1936, 42 (2): 230-265.

[2] KIEENS S E. Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata. In: Automata Studies [M]. Princeton: Princeton University Press, 1956: 3-42.

[3] WEE W G. On Generalizations of Adaptive Algorithms and Application of the Fuzzy Sets Concept to Pattern Classification[D]. West Lafayette: Purdue University, 1967.

[4] PAZ A. Introduction to Probabilistic Automata [M]. San Diego: Academic Press, 1971.

[5] FLECK A C. Isomorphism Groups of Automata [J]. Journal of the Association for Computing Machinery, 1962, 9: 469-476.

[6] BAVE Z. Structure and Transition-Preserving Functions of Finite Automata [J]. J ACM, 1968, 15: 135-158.

[7] FEICHTINGER G. Some Results on the Relation Between Automata and Their Automorphism Groups [J]. Computing, 1966, 1: 327-340.

[8] ITO M. Algebraic Theory of Automata and Languages [M]. Singapove: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2004.

[9] TIAN Jing, ZHAO Xianzhong. Representations of Commutative Asynchronous Automata[J]. J Comput System Sci, 2012, 78: 504-516.

[10] XU Hui, TIAN Jing, ZHAO Xianzhong. Monoid-Matrix Type Automata [J]. Theor Comput Sci, 2014, 520: 1-10.

[11] 田径. 关于半群代数理论的研究[D]. 西安：西北大学，2012.
TIAN Jing. On Algebraic Theory of Antomata[D]. Xi′an: Northwest University, 2012. (in Chinese)

(编辑：姚树峰)