

# 基于量子纠缠对的二阶相关星地时钟同步研究

苑博睿, 杨春燕, 杜鹏亮

(空军工程大学信息与导航学院, 陕西西安, 710077)

**摘要** 在卫星导航系统中,常用的时间同步方法可以提供纳s级同步精度,为突破经典无线电理论的测量精度而利用纠缠光子对的量子测量方法可提供fs级测量精度。基于量子光学的二阶相关函数定义,对自发参量下转换过程产生量子纠缠光子对的二阶相关函数在晶体范围内进行柱面积分,代入波矢量的一阶展开,积分结果得到二阶相关函数与测量时间差的关系。基于二阶相关函数的时间相关性,提出一种星地时钟同步测量方案。仿真表明:在理想情况下二阶相关函数反映时间精度达70 fs,文中设计方案同步测量精度可达140 fs。

**关键词** 时钟同步;纠缠光子对;二阶相关函数

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.04.019

**中图分类号** TN967.1;O437 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)04-0079-04

## Research on Clock Synchronization between Satellite and Ground Station Based on Second-order Correlation of the Quantum Entangled Photons

YUAN Bo-ruì, YANG Chun-yan, DU Peng-liang

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an, 710077)

**Abstract:** The time synchronization accuracy on the order of nanoseconds can be provided using the conventional methods of time synchronization, a higher measurement accuracy on the order of femto-seconds can be reached by quantum measurement which employs entangled photon pairs in order to break the limit of measurement accuracy of conventional methods. The second-order correlation function of the entangled photon pairs which produced in a spontaneous type-II parametric down-conversion is investigated by integral transforming in the nonlinear crystal and substituting the first order expand of the wave vector. The relation between the second-order correlation function and temporal difference. A quantum method in clock synchronization between satellite and ground station is proposed based on the temporal correlation. The simulation indicates that the measurement accuracy provided by the second-order correlation function can be 70 femto-seconds and the synchronization accuracy in the scheme can be 140 femto-seconds in the ideal case.

**Key words:** clock synchronization; entangled photons; second-order correlation function

收稿日期:2013-12-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61203201);陕西省自然科学基金资助项目(2012JQ8017)

作者简介:苑博睿(1989-),男,吉林长春人,硕士生,主要从事卫星导航研究.E-mail:yuanborui@sina.com

**引用格式:**苑博睿,杨春燕,杜鹏亮.基于量子纠缠对的二阶相关星地时钟同步研究[J].空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(4):79-82.  
[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(4): 79-82.

卫星导航系统利用测量卫星发出信号与地面接收机接收到该信号的时间延迟量为基本观测量,并依此计算得到卫星与地面接收机的距离来实现定位。因此星地时钟同步的精度对卫星导航的定位精度和可靠性有重要影响。为保证卫星时钟与GPS时间保持同步,传统方法采用钟差预报,时间对比和载波相位观测等<sup>[1-3]</sup>。传统高精度原子钟及钟差预报提供时间精度为6~10 ns<sup>[1]</sup>。文献[2]中的单向同步法精度可达5~10 ns,双向同步法精度可达1~2 ns,激光同步法精度可达1 ns以内。文献[3]中采用双频载波相位对比方法,同步精度可达160 ps。文献[4~5]利用载波相位平滑伪距方法可以提高测量精度并同时减弱载波整周模糊度,授时精度可达1~3 ns。新兴的量子定位系统中,由于处于量子纠缠态的一对光子具有极强的相关性使测量精度可达到fs级<sup>[6-7]</sup>,在星地间传输过程中还可克服电离层影响。学术界近年来提出了一些基于量子理论的远程时钟同步的方案<sup>[8-11]</sup>。文献[8]中利用分组纠缠增强测量精度,然而同时带来可能无法得到测量结果的负面影响。文献[9]中利用HOM干涉仪调整光程后测量接收纠缠光子对的时刻并进行相关以实现同步,此方法需要调整和测量延时晶体厚度方可得到测量结果。文献[10]使用MZ干涉仪通过两方互相发送光子并测量相位差以得到时钟差值,敏感度为波长量级。文献[11]利用光纤作为量子传输信道进行量子远程时钟同步实验,实验精度达到1 ps。本文提出了一种基于量子二阶相关函数的星地时钟同步测量方法。理论上分析纠缠光子对的二阶相关函数可提供时间精度小于140 fs。

## 1 纠缠光子对二阶相关函数

量子纠缠光子对由于具有非定域、非经典的强关联,所以在测量中可以达到很高的精度。目前实验上主要利用自发参量下转换的二阶非线性作用产生纠缠双光子对。自发参量下转换(SPDC)过程是当一高频泵浦光p作用非线性晶体时,由于晶体的非线性作用过程使得一个泵浦光子以一定的概率同

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_V \chi d^3 r \mathbf{E}_0 e^{i[k_p z - \omega_p t]} \sum_k \mathbf{E}_{i,k} a_{i,k}^+ e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \sum_{k'} \mathbf{E}_{s,k'} a_{s,k'}^- e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_s t)} + \mathbf{H.c.} = \\ & \frac{1}{i\hbar} \chi \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_{i,k} \mathbf{E}_{s,k'} \int_V d^3 r e^{i[k_p z - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}]} \sum_{kk'} a_{i,k}^+ a_{s,k'}^- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega_i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_s \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} + \mathbf{H.c.} = \\ & \frac{1}{i\hbar} \chi \mathbf{E}_0 \mathbf{E}_{i,k} \mathbf{E}_{s,k'} A \int_A d^2 \rho e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \rho} \int_{-L}^0 dz e^{i[k_p z - \mathbf{k} z - \mathbf{k}' z]} \sum_{kk'} a_{i,k}^+ a_{s,k'}^- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega_i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_s \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega_p t)} + \mathbf{H.c.} \end{aligned}$$

式中: $a_{i,k}$ 和 $a_{s,k'}$ 分别是i光和s光的产生算符; $\chi$ 是非线性电磁化张量; $\mathbf{H.c.}$ 是厄密共轭。由于在积分

时产生一个信号光子(s光)和一个休闲光子i光<sup>[11]</sup>,其满足能量守恒与相位匹配关系: $\omega_s = \omega_i + \omega_p$ , $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s$ 。

依据量子场理论,时空点 $(\mathbf{r}_1, t_1)$ , $(\mathbf{r}_2, t_2)$ 的联合探测概率与二阶相关函数成正比<sup>[12]</sup>:

$$G^{(2)}(t_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \langle \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}^{(+)}$ , $\mathbf{E}^{(-)}$ 分别表示时空点 $(\mathbf{r}_1, t_1)$ , $(\mathbf{r}_2, t_2)$ 检测i光和s光的纠缠光场的正频和负频场算符。对于二阶参量下转换产生的纠缠光子对,二阶相关函数可以写成双光子振幅模的平方的形式:

$$G^{(2)}(t_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = |\langle 0 | \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | \psi \rangle|^2 = |A(t_1, t_2)|^2 \quad (2)$$

i光和s光的输出电场由以下量子化场给出:

$$\mathbf{E}_j^{(+)} = \sum_k \mathbf{E}_{j,k} a_{j,k} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}, j = s, i \quad (3)$$

根据量子力学中算符运算法则以及变换关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k T_r &= \frac{\omega_k n}{c} r_r - \omega_k T_r = \omega_k \left( \frac{r_r}{c} - T \right) = \\ & -\omega_k \left( T - \frac{s}{c} \right) = -\omega_k t_r \end{aligned} \quad (4)$$

式中s代表晶体表面到探测器 $r(r=1,2)$ 的光程,为简化讨论假设光程相同。

将式(3)、(4)代入式(2)得到:

$$\begin{aligned} A(t_1, t_2) &= \langle 0 | \sum_{k_2} \mathbf{E}_{k_2} a_{2,k_2} e^{-i\omega_{k_2} t_2} \sum_{k_1} a_{1,k_1} \mathbf{E}_{1,k_1} e^{-i\omega_{k_1} t_1} | \psi \rangle \\ &= \sum_{k_1, k_2} \mathbf{E}_{k_2} \mathbf{E}_{k_1} e^{-i(\omega_{k_1} t_1 + \omega_{k_2} t_2)} \langle 0 | a_{1,k_1} a_{2,k_2} | \psi \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

对式(5)中双光子波函数 $|\psi(t)\rangle$ 进行分析;由薛定谔方程 $i\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathbf{H} \psi(t)$ 解波函数表达式

$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt \hat{H}_I} |0\rangle$ 。对此解进行泰勒展开后取前2项: $|\psi(t)\rangle = |0\rangle - \left[ \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t dt \hat{H}_I \right] |0\rangle$ 。其中 $\hat{H}_I$ 为纠缠光子对的有效哈密顿算符:

$$\hat{H}_I(t) = \int_V \chi d^3 r \mathbf{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H.c.} \quad (6)$$

假定泵浦光的泵浦场为平面波,表示为 $\hat{\mathbf{E}}_p^{(+)} = \mathbf{E}_0 e^{i[k_p z - \omega_p t]}$ 。并将式(3)代入。则:

区域内波矢量足够大可以忽略衍射效应,波矢量在

横向区域  $A$  的积分  $\frac{1}{A} \int_A d^2 \rho e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\rho} = \delta_{-\mathbf{k}_x \mathbf{k}'_x} \delta_{-\mathbf{k}_y \mathbf{k}'_y}$ ;

纠缠光子对满足相位匹配条件则:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega_{ik} + \omega_{sk'} - \omega_p)t} = 2\pi \delta_{\omega_{ik} + \omega_{sk'} - \omega_p}.$$

分析式中  $z$  的积分: 其积分域为晶体的厚度  $(-L, 0)$ 。令  $\Delta_{kk'} = k_p - k_z - k'_z$ , 则  $\int_{-L}^0 dz e^{i(k_p - k_z - k'_z)z} = \frac{1 - e^{-iL\Delta_{kk'}}}{i\Delta_{kk'}} = Le^{-\frac{iL\Delta_{kk'}}{2}} \frac{e^{\frac{iL\Delta_{kk'}}{2}} - e^{-\frac{iL\Delta_{kk'}}{2}}}{iL\Delta_{kk'}} = Le^{\frac{iL\Delta_{kk'}}{2}} \text{sinc}(L\Delta_{kk'})$

令  $e^{\frac{iL\Delta_{kk'}}{2}} \text{sinc}(L\Delta_{kk'}) = h(L\Delta_{kk'})$ 。则:

$$|\psi(t)\rangle = |0\rangle + \sum_{kk'} a_{i,k'} a_{s,k'} h(L\Delta_{kk'}) v_{K_x K_y} |0\rangle \quad (7)$$

式中  $v_{K_x K_y} = L\delta_{-\mathbf{k}_x \mathbf{k}'_x} \delta_{-\mathbf{k}_y \mathbf{k}'_y} 2\pi \delta_{\omega_{ik} + \omega_{sk'} - \omega_p} \frac{1}{i\hbar} \chi E_0 E_{i,k} E_{s,k'} A$ 。

将式(7)代入到式(5)中:

$$A(t_1, t_2) = \sum_{k_1, k_2} v_{K_x K_y} h(L\Delta_{kk'}) E_{k_2} E_{k_1} e^{-i(\omega_{k_1} t_1 + \omega_{k_2} t_2)} \quad (8)$$

利用纠缠光子的频率纠缠和波矢纠缠特性。设  $\omega_d = \omega_s - \omega_i$ , 设  $\nu_{s,i}$  为  $s$  光和  $i$  光相对中心频率的偏离量则  $\omega_k = \omega_i + \nu_i$ ,  $\omega_{k'} = \omega_s + \nu_s$ 。由于连续泵浦激光的窄频率宽度, 可认为泵浦光的频率宽度  $\nu_p$  可以忽略, 因此由  $\nu_p = \nu_s + \nu_i$ , 可以得到  $\nu = \nu_i = -\nu_s$ 。则:

$$\omega_k t_1 + \omega_{k'} t_2 = \frac{\omega_p}{2}(t_1 + t_2) + \frac{\omega_d}{2}(t_1 - t_2) + \nu(t_1 - t_2) \quad (9)$$

将  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$  进行一阶展开:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_i + \frac{\nu_i}{u_i} \mathbf{u}_i, \mathbf{k}' = \mathbf{k}_s + \frac{\nu_s}{u_s} \mathbf{u}_s.$$

由于  $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s$ ,

$$\text{则 } \Delta_{kk'} = -\nu D \left[ D = \frac{1}{u_i} - \frac{1}{u_s} \right].$$

对式(8)更新为:

$$A(t_1, t_2) = W_{K_x K_y} e^{-i(\omega_p/2)(t_1 + t_2)} e^{-i(\omega_d/2)(t_1 - t_2)} \int_{-\omega_i}^{\omega_s} h(-LD\nu) e^{-i\nu(t_1 - t_2)} d\nu \quad (10)$$

式中  $W_{K_x K_y}$  为其他缓慢变化量。

则 SPDC 产生的纠缠光子对的二阶相关函数简化为:

$$|A(t_1, t_2)|^2 \propto \left| \int_{-\omega_i}^{\omega_s} h(-LD\nu) e^{-i\nu(t_1 - t_2)} d\nu \right|^2 \quad (11)$$

式(11)说明二阶相关函数以  $t_1 - t_2$  为变量。积分中  $h(-LD\nu)$  中的复指数项使得积分结果在时域中产生漂移  $\Delta$ , 而这个漂移又无法明确表示, 所以靠单次探测无法确定探测时间关系。为确定偏移量, 需将  $i$  光与  $s$  光交换进行第 2 次探测。利用二阶相关函数以时间差为变量这一性质, 可以设计一

种星地时钟同步方案。

## 2 方案设计与仿真分析

星地时钟同步基本测量过程见图 1。源卫星端的纠缠源中连续泵浦光进入非线性晶体发生参量下转换, 从而产生偏振相互垂直的纠缠光子对  $i$  光和  $s$  光。经滤波片滤除泵浦光后, 纠缠光子对经偏振分束器分离, 从而得到 2 路光信号。为简化讨论假设光程经可控延迟晶体调节相等, 此过程可借助 HOM 干涉仪实现<sup>[13-14]</sup>。首先,  $i$  光经路径  $r_1$  发射至地面端探测器 D1, 同时  $s$  光经路径  $r_2$  发射至卫星端探测器 D2。地面端与测量卫星端可分别提供探测时间记录  $(T_1 + T_0)$  和  $T_2$ , 同时提供光子探测计数。时间记录匹配后的联合探测计数送至相关仪得到二阶相关函数。在两地时钟同步, 即  $T_0 = 0$  时, 二阶相关函数与测量时间差  $t_1 - t_2$  关系的特征见图 2, 这里采用的参数如下: 泵浦光波长  $\lambda_p = 457.9 \text{ nm}$ ,  $s$ - $i$  光波长分别为  $901 \text{ nm}, 931 \text{ nm}$ 。群速度倒数差  $D = 1.7 \text{ fs/mm}$ , 非线性晶体长度  $L = 8 \text{ mm}$ <sup>[11]</sup>。

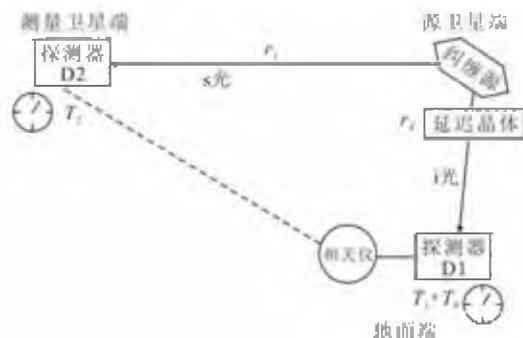


图 1 星地时钟同步方案设计

Fig.1 Method in clock synchronization between satellite and ground station



图 2 二阶相关函数时间特征图

Fig.2 Temporal correlation of the second-order correlation function

图 2 反映了理想条件下二阶相关函数与测量时间差  $t_1 - t_2$  的关系, 二阶相关函数的半波宽度小于

70 fs,可以反映的时间精度达到 fs 级,同时可以观察到二阶相关函数含有一个不可预测的时间漂移  $\Delta$ ,所以需进行 2 次探测计算峰值对应时间差以消除漂移。为进行第 2 次探测,旋转纠缠源处的偏振分束器,使 i 光与 s 光交换。再次发射纠缠光子,此次 s 光发射至地面端探测器 D1,i 光发射至测量卫星端探测器 D2。第 2 次探测 D1 提供时间记录为  $(T_1' + T_0)$ ;D2 提供时间记录为  $T_2'$ 。则第 1 次测量二阶相关函数峰值对应时间为  $(T_1 + T_0) - T_2 = \Delta$ ,第 2 次测量二阶相关函数峰值对应时间为  $T_2' - (T_1' + T_0) = \Delta$ 。图 3 中,2 次测量二阶相关函数的峰值对应时间差  $(t_1 - t_2) - (t_1' - t_2') = (T_1 - T_2) - (T_2' - T_1') = -2T_0$ 。由此即得出固定钟差,从而实现时钟校准。

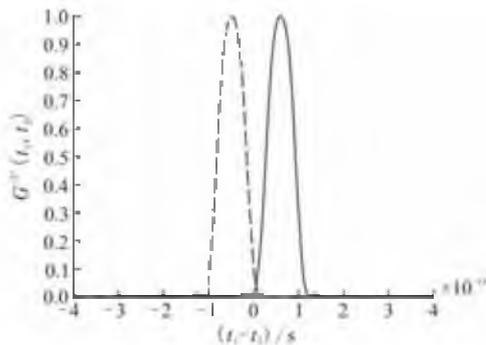


图 3 2 次测量二阶相关函数时间关系图

Fig.3 Relation of temporal correlation in two measurements

### 3 结语

本文分析了纠缠光子对二阶相关函数与测量时间差上的关系特性,并依此设计一种星地时钟同步方案。通过仿真看出该方法在校正星地时钟同步过程中可提供精度在 140 fs 以内,可以应用在卫星时钟与地面时钟同步过程中,增强卫星导航系统时间同步精度,对卫星导航后续定位解算有积极作用。同时,本文为简化分析忽略传播路径中噪声影响以及纠缠光子传输过程中的退相干,这些问题将在后续研究中考虑。

#### 参考文献(References):

- [1] 王爱生,王飞.GPS 预报星历和钟差的精度及对标准定位服务的影响[J].大地测量与地球动力学,2012,32(6):76-80.  
WANG Aisheng,WANG Fei,On GPS forecasting ephemeris and clock correction accuracy and effects on standard point positioning[J].Journal of geodesy and geodynamics,2012,32(6):76-80.(in Chinese)
- [2] 张伦.星地时间同步技术的研究[D].西安:西安电子科技大学,2008.
- [3] 屈八一.CPT 原子钟、星载钟及时频测控领域的新技术研究[D].西安:西安电子科技大学,2010.  
QU Bayi.Research on CPT atomic clock, space atomic clock and new technologies in the time-frequency measurement and control field[D].Xi'an: Xidian university,2010.(in Chinese)
- [4] 蔡成林,李孝辉,吴海涛,等.广域差分系统中的卫星钟差改正方法[J].科学通报,2009,54(20):3170-3176.  
CAI Chenglin,LI Xiaohui,WU Haitao,et al. A satellite clock error correction method in wide area differential system [J]. Chinese sci bulletin,2009,54(20):3170-3176.(in Chinese)
- [5] 杨春燕,吴德伟,卢艳娥,等.基于补充卡尔曼滤波的载波相位平滑伪距算法[J].空军工程大学学报:自然科学版,2008,9(5):52-56.  
YANG Chunyan, WU Dewei, LU Yan'e, et al. A phase-smoothed pseudo-range algorithm based on complementary kalman filtering[J]. Journal of air force engineering university:natural science edition,2008,9(5):52-56.(in Chinese)
- [6] Giovannetti V,Lloyd S,Maccone L.Positioning and clock synchronization through entanglement[J].Phys rev A,2001,65(2):022309/1-022309/6.
- [7] Bahder Thomas B,Golden William M.Clock synchronization based on second-order quantum coherence of entangled photons[C]//The seventh international conference on quantum communication, measurement and computing. [S. l.]: Army research laboratory,2004:25-29.
- [8] Giovannetti V,Lloyd S,Maccone L.Quantum-enhanced measurements—beating the standard quantum limit.[J]Science,2004,306:1330-1334.
- [9] Bahder Thomas B.Quantum positioning system[C]//36th annual precise time and time interval (PTTD) meeting.Washington DC:Naval observatory,2004:423-427.
- [10] 谢端,彭进业,赵健,等.基于 MZ 干涉仪结构的量子时钟同步方案理论研究[J].西北工业大学学报,2011,29(4):614-618.  
XIE Duan,PENG Jinye,ZHAO Jian,et al.Theoretically exploring a better way of quantum clock synchronization using MZ (Mach-Zehnder) interferometer[J] Journal of northwestern polytechnical university,2011,29(4):614-618.(in Chinese)
- [11] Alejandra Valencia, Giuliano Scarcelli,Yanhua Shih.Distant clock synchronization using entangled photon pairs[J].Application physical letters,2004,85(13):2655-2657.
- [12] Morton H.Rubin,David N.Klyshko,Y.H.shih,et al.Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion[J].Phys rev A,1994,50:5122-5133.
- [13] Hong C K,Ou Z Y,Mandel L.Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference[J].Phys rev lett,1987,59(18):2044-2046.
- [14] 杨春燕.量子测距辅助无线电导航关键技术研究[D].西安:空军工程大学,2011.  
YANG Chunyan. The key technology of satellite navigation aided by the quantum ranging[D].Xi'an: Air force engineering university,2011.(in Chinese)

(编辑:徐楠楠)