广义 Aluthge 变换的 Drazin 逆

刘 妮, 李炳杰, 郭艳鹂
(空军工程大学理学院,陕西西安,710051)

摘要 设 H 为无限维 Hilbert 空间,T 为 H 中的有界线性算子,$\widetilde{T}^{\lambda}$,$\widetilde{T}^{\lambda(*)}$ 分别表示 T 的广义 Aluthge 变换和广义 $*$-Aluthge 变换,其中 $\lambda\in(0,1)$。主要利用分块算子矩阵的方法研究了 $\widetilde{T}^{\lambda}$ 和 $\widetilde{T}^{\lambda(*)}$ 的 Drazin 逆及 Moore-Penrose 逆,证明了对任意复数 μ 有:① $\widetilde{T}^{\lambda}-\mu$ Drazin 可逆当且仅当 $\widetilde{T}^{\lambda(*)}-\mu$ Drazin 可逆;② $\widetilde{T}^{\lambda}-\mu$ Moore-Penrose 可逆当且仅当 $\widetilde{T}^{\lambda(*)}-\mu$ Moore-Penrose 可逆。同时给出了这2个算子 Drazin 逆及 Moore-Penrose 逆的相互关系的刻画。

关键词 广义 Aluthge 变换;极分解;Drazin 逆;Moore-Penrose 逆
DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.03.022
中图分类号 O177.1 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)03-0093-03

The Drazin Inverse of Generalized-Aluthge Transform

LIU Ni, LI Bing-jie, GUO Yan-li
(Science College, Air Force Engineering University, Xi′an 710051, China)

Abstract: Let H be an infinite Hilbert space and T a bounded linear operator in H, and $\widetilde{T}^{\lambda}$ and $\widetilde{T}^{\lambda(*)}$ indicate respectively the generalized Aluthge transform and generalized $*$-Aluthge transform of T, where $\lambda\in(0,1)$. By utilizing the method of operational partitioning, the Drazin inverse and Moore—Penrose inverse of $\widetilde{T}^{\lambda}$ and $\widetilde{T}^{\lambda(*)}$ are studied. The result proves that for any complex number μ: ① $\widetilde{T}^{\lambda}-\mu$ is Drazin invertible if and only if $\widetilde{T}^{\lambda(*)}-\mu$ remains; ② $\widetilde{T}^{\lambda}-\mu$ is Moore-Penrose invertible if and only if $\widetilde{T}^{\lambda(*)}-\mu$ remains. Simultaneously, a drawing of the relationships between these two operators, i.e. Drazin inverse and Moore-Penrose inverse, is given.

Key words: generalized Aluthge transform; polar decomposition; Drazin inverse; Moore-Penrose inverse

广义逆理论是在分析学背景下产生的,Fredholm 首次对积分算子提出了广义逆的概念。伴随着广义逆理论的发展,其应用也逐渐遍及到了数理统计、数值分析、系统理论、优化计算及信息安全等各个领域。常见的广义逆主要包括:Drazin 逆 A^{D}[1],Moore-Penrose 逆 $A^{\dagger}$[1]以及广义 Bott-Duffin 逆 A_{L}[2]。

本文借助算子分块技巧来研究 Hilbert 空间上算子 T 的广义 Aluthge 变换和广义 $*$-Aluthge 变换的 Drazin 逆及 Moore-Penrose 逆。

收稿日期:2013-11-26
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11001159)
作者简介:刘 妮(1976—),女,陕西蓝田人,讲师,主要从事算子广义逆理论研究.E-mail:niliu1065@126.com.

引用格式:*刘妮,李炳杰,郭艳鹂.广义 Aluthge变换的 Drazin逆[J].空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(3):93-95. LIU Ni, LI Bingjie, GUO Yanli. The Drazin inverse of generalized-Aluthge transform[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(3):93-95.*

1　预备知识

设 H 是复可分无限维 Hilbert 空间，$B(H)$ 表示 H 上有界线性算子全体。对 $T\in B(H)$，设 $T=U|T|$ 是它的极分解，其中 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$，则算子 $\tilde{T}^{\lambda}=|T|^{\lambda}U|T|^{1-\lambda}$ 与 $\tilde{T}^{\lambda(*)}=|T^*|^{\lambda}U|T^*|^{1-\lambda}$ 分别称为 T 的广义 Aluthge 变换和广义 *-Aluthge 变换，这里 $\lambda\in(0,1)$，$\tilde{T}^{\lambda}$ 及 $\tilde{T}^{\lambda(*)}$ 与部分等距算子 U 的选取无关。特别地，$\lambda=\frac{1}{2}$ 时，就得到 T 的 Aluthge 变换 $\tilde{T}$ 和 *-Aluthge 变换 $\tilde{T}^{(*)}$[3]。近年来，关于 $\tilde{T}^{\lambda}$ 及 $\tilde{T}^{\lambda(*)}$ 的研究吸引了众多学者的关注，尤其是关于数值域，数值域半径，各种谱以及不变子空间格的研究已相当深入[1-8]。

对任意的 $T\in B(H)$，设 T^*，$N(T)$，$R(T)$，$N(T)^{\perp}$ 分别为算子 T 的伴随，核空间，值域以及核空间在 H 中的余子空间，I_M 表示 M 上的单位算子，在不会引起混淆的情况下简记为 I。

2　主要结论及证明

首先给出算子 Drazin 的定义及几个必要引理：

定义 1　设 $T\in B(H)$，若存在 $B(H)$ 中的算子 A 使得：①$ATA=A$；②$AT=TA$；③$T^{k+1}A=T^{k}$，则称算子 T 是 Drazin 可逆的，称 A 为 T 的 Drazin 逆，记作 T^{D}，这里 $k=\mathrm{ind}(T)$ 表示算子 T 的 Drazin 逆指标。

我们知道，若算子 T 是 Drazin 可逆的，则 T^{D} 唯一[9]。

引理 1　设 $T\in B(H)$，则对任意复数 α，$T=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & M\end{pmatrix}$ Drazin 可逆⇔M 是 Drazin 可逆且 $\alpha\neq 0$ 时，$T^{D}=\begin{pmatrix}1/\alpha & 0\\ 0 & M^{D}\end{pmatrix}$；若 $\alpha=0$ 则 $T^{D}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & M^{D}\end{pmatrix}$。

证明　由**定义 1** 可得。

引理 2[8]　设 $T\in B(H)$，$T=U|T|$ 是算子 T 的极分解，则：① $T^{*}=U^{*}|T^{*}|$ 是算子 T^{*} 的极分解；② $\tilde{T}^{\lambda(*)}=U\tilde{T}^{\lambda}U^{*}$，其中 $\lambda\in(0,1)$。

定理 1　设 $T\in B(H)$，$T=U|T|$ 是 T 的极分解，则对任意复数 μ：

$\tilde{T}^{\lambda}-\mu I$ Drazin 可逆⇔$\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I$ Drazin 可逆，且 $\mu\neq 0$ 时，$(\tilde{T}^{\lambda}-\mu I)^{D}=U^{*}(\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I)^{D}U\oplus\left(-\frac{1}{\mu}\right)(I-U^{*}U)$。

证明　由于 $T\in B(H)$，$T=U|T|$ 是它的极分解，则有 $N(T)=N(|T|)=N(U)$。在空间分解 $H=N(T)\oplus N(T)^{\perp}$ 下，算子 T 具有矩阵形式 $T=\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & B\end{pmatrix}$，其中 $A:N(T)^{\perp}\mapsto N(T)$，$B\in B(N(T)^{\perp})$，此时 $U=\begin{pmatrix}0 & U_1\\ 0 & U_2\end{pmatrix}$，$T^{*}T=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A^{*}A+B^{*}B\end{pmatrix}$。计算可得 $\tilde{T}^{\lambda}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & X\end{pmatrix}$，这里 $X=(A^{*}A+B^{*}B)^{\frac{\lambda}{2}}U_2(A^{*}A+B^{*}B)^{\frac{1-\lambda}{2}}$ 是 $N(T)^{\perp}$ 上的算子。

由**引理 2** 第②项，$\tilde{T}^{\lambda(*)}=U\tilde{T}^{\lambda}U^{*}$，而 U 在 $N(T)^{\perp}\mapsto N(T^{*})^{\perp}$ 上是酉算子，故存在酉算子 $U_0:N(T)^{\perp}\mapsto N(T^{*})^{\perp}$ 使得 $U=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & U_0\end{pmatrix}:N(T)\oplus N(T)^{\perp}\mapsto N(T^{*})\oplus N(T^{*})^{\perp}$，则在空间分解 $H=N(T^{*})\mapsto N(T^{*})^{\perp}$ 下，$\tilde{T}^{\lambda(*)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix}$，这里 $Y=U_0XU_0^{*}$。对任意复数 μ，显然 $\tilde{T}^{\lambda}-\mu I=\begin{pmatrix}-\mu & 0\\ 0 & X-\mu I\end{pmatrix}$，$\tilde{T}^{\lambda}-\mu I=\begin{pmatrix}-\mu & 0\\ 0 & X-\mu I\end{pmatrix}$。

由**引理 1** 知：

$\tilde{T}^{\lambda}-\mu I$ Drazin 可逆⇔$X-\mu I$ Drazin 可逆⇔$Y-\mu I$ Drazin 可逆⇔$\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I$ Drazin 可逆，且 $U_0^{*}(Y-\mu I)^{D}U_0=(X-\mu I)^{D}$。若 $\mu\neq 0$，则：$(\tilde{T}^{\lambda}-\mu I)^{D}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\mu} & 0\\ 0 & (X-\mu I)^{D}\end{pmatrix}$，$(\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I)^{D}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\mu} & 0\\ 0 & (Y-\mu I)^{D}\end{pmatrix}$，且 $U^{*}(\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I)^{D}U=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & U_0^{*}(Y-\mu I)^{D}U_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & (X-\mu I)^{D}\end{pmatrix}$，而 $U^{*}U$ 是 $N(T)^{\perp}$ 上的投影，所以 $I-U^{*}U$ 是 $N(T)$ 上的投影，因此有：

$$U^{*}(\tilde{T}^{\lambda(*)}-\mu I)^{D}U\oplus\left(-\frac{1}{\mu}\right)(I-U^{*}U)=$$

$\begin{pmatrix}-\frac{1}{\mu} & 0\\ 0 & (X-\mu I)^{D}\end{pmatrix}=(\tilde{T}^{\lambda}-\mu I)^{D}$，证毕。

我们知道，对任意算子 T，满足 $T-\lambda I$ 不是 Drazin 可逆的复数 λ 的全体称作算子 T 的 Drazin 谱，记作 $\sigma_D(T)$，由**定理 1**，很容易得到与文献[7]中相同的结论：

推论　设 $T \in B(H)$，则有 $\sigma_D(\widetilde{T}^{\lambda}) = \sigma_D(\widetilde{T}^{\lambda(*)})$。

以下来考虑算子 $\widetilde{T}^{\lambda}$ 与 $\widetilde{T}^{\lambda(*)}$ 的 Moore-Penrose 广义逆，它在 1920 年由 Moore 首先引进，但直到 1955 年 Penrose 以下列矩阵方程的形式给出了定义以后，才被众多学者关注。

定义 2　设 $T \in B(H)$，若存在 $B(H)$ 中的算子 T^+ 使得：① $T^+TT^+ = T^+$；② $TT^+T = T$；③ $(T^+T)^* = T^+T$；(4) $(TT^+)^* = TT^+$。

则称算子 T 是 Moore-Penrose 可逆的，T^+ 为 T 的 Moore-Penrose 逆。

对于 T^+ 的存在性和唯一性，在文献[1]中已经证明。

引理 3 设 $M \in B(H)$，则对任意复数 α 有 $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ Moore-Penrose 可逆当且仅当 M 是 Moore-Penrose 可逆，且 $\alpha \neq 0$ 时，$T^+ = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & M^+ \end{pmatrix}$；若 $\alpha = 0$，则 $T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^+ \end{pmatrix}$。

证明 设 $\alpha \neq 0$，$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ Moore-Penrose 可逆，且 $T^+ = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，由定义可得：

1) $\begin{pmatrix} \alpha^2 X_1 & \alpha X_2 M \\ \alpha M X_3 & M X_4 M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$，即 $X_2 M = 0$，$MX_3 = 0$，$X_1 = \dfrac{1}{\alpha}$，$MX_4M = M$；

2) $\begin{pmatrix} \alpha X_1 & \alpha X_2 \\ 0 & MX_4 \end{pmatrix}$ 自伴，故 $X_2 = 0$，$(MX_4)^* = MX_4$；

3) $\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 M X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，因此，$X_4 M X_4 = X_4$；

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha X_3 & X_4 M \end{pmatrix}$ 自伴，故 $X_3 = 0$，$(X_4 M)^* = X_4 M$。

综上，X_4 就是 M 的 Moore-Penrose 逆，即 $M^+ = X_4$。

反之，设 M 的 Moore-Penrose 逆为 M^+，不难验证 $T^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & M^+ \end{pmatrix}$ 就是 T 的 Moore-Penrose 逆。若 $\alpha = 0$，可类似证得。

由**引理 3**，可以得到如下定理：

定理 2　设 $T \in B(H)$，$T = U|T|$ 是 T 的极分解，则对任意复数 μ 有：

$\widetilde{T}^{\lambda} - \mu I$ Moore-Penrose 可逆 $\Leftrightarrow$ $\widetilde{T}^{\lambda(*)} - \mu I$ Moore-Penrose 可逆，且当 $\mu \neq 0$ 时，$(\widetilde{T}^{\lambda} - \mu I)^+ = U^*(\widetilde{T}^{\lambda(*)} - \mu I)^+ U \oplus \left(-\dfrac{1}{\mu}\right)(I - U^*U)$。

证明与**定理 1** 类似。

3　结语

我们知道 Drazin 逆是矩阵广义逆理论的重要组成部分，而将矩阵的广义逆理论推广到无限维 Hilbert 空间上，对研究解决可数 Markov 链，抽象 Cauchy 问题以及无限线性微分方程系统中的一些重要问题都将有着非常重要的意义。

参考文献(References)：

[1] Koliha J J. The Drazin and Moore-Penrose inverse in C*-algebras[J]. Math proc R Irish acad, 1999, 99A: 17-27.

[2] Chen G, Liu G, Xue Y. Perturbation analysis of the generalized Bott-Duffin inverse of L-zero matrices[J]. Linear multilinear algebra, 2003, 51: 11-20.

[3] Aluthge A. On p-hyponormal operators for $0<p<1$ [J]. Integral equation and operator theory, 1990, 13: 307-315.

[4] T Yamazaki. On numerical range of the Aluthge transformation[J]. Linear algebra and its applications, 2002, 34(1): 111-117.

[5] Wu P Y. Numerical range of Aluthge transform of operator[J]. Linear algebra and its applications, 2002, 357: 295-298.

[6] Ji Guoxing, Liu Ni, Li Ze. Essential numerical rang and maximal numerical range of the Aluthge transform[J]. Linear and multilinear algebra, 2007, 55(4): 315-322.

[7] 张云，吉国兴. 关于 Aluthge 变换谱的研究[J]. 应用泛函分析学报，2008, 10(2): 116-122.
ZHANG Yun, JI Guoxing. Spectral properties of the generalized aluthge transform[J]. Acta analysis functionalis applicata, 2008, 10(2): 116-122. (in Chinese)

[8] 刘秀梅，杨新兵. 关于广义 Aluthge 变换的数值域[J]. 纯粹数学与应用数学，2010, 26(1): 111-114.
LIU Xiumei, YANG Xinbing. Numerical range of the generalized Aluthge transform[J]. Pure and applied mathematics, 2010, 26(1): 111-114. (in Chinese)

[9] Wang G, Wei Y, Qiao S. Generalized inverses: theory and computation[M]. Beijing: Science press, 2004.

(编辑：徐楠楠)