

飞机大迎角纵向机动稳定性及通向混沌的道路

张志浩¹, 姚宏¹, 彭兴钊², 苏磊²

(1.空军工程大学理学院,陕西西安,710051;2.空军工程大学航空航天工程学院,陕西西安,710038)

摘要 基于非线性动力学理论,分析了飞机大迎角纵向机动的稳定性及混沌行为。根据纵向机动的动力学模型,分析了飞机在大迎角状态下的飞行稳定性,通过 Lyapunov 稳定性原理,给出了不同参数匹配条件下飞机的纵向机动稳定域;以升降舵偏角和质量为系统参数,利用 Melnikov 方法,研究了飞机纵向机动的混沌运动,得到通向混沌的道路;通过数值仿真得出不同条件下的飞机纵向运动的 Lyapunov 指数,分析实验结果并对理论推演进行了验证。结果表明:大攻角机动情况下,飞机极易进入混沌状态,造成飞行不稳定甚至导致飞行事故。

关键词 纵向机动;大迎角;稳定性;Lyapunov 指数;混沌

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2014.03.004

中图分类号 V211 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2014)03-0015-05

Stable Field Analysis and Roads Leading to Chaos of Aircraft Vertical Maneuvering at A High Angle of Attack

ZHANG Zhi-hao¹, YAO Hong¹, PENG Xing-zhao², SU Lei²

(1.Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 2, Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: Based on nonlinear dynamics theory, this paper analyzes the stable field and roads led to chaos of aircraft vertical maneuvering at high angles of attack, analyzes flight stability of aircraft at the high angle state and puts forward the stable field of vertical maneuvering under various matching parameter on the basis of aircraft vertical maneuvering equation. Regarding rudder angle and quality as variable parameters, the chaos movement is analyzed by developing the heteroclinic orbit based on Melnikov method. This provides a theory foundation for the control of aircraft vertical maneuvering at high angles of attack under various conditions.

Key words: vertical maneuvering; high angles of attack; stability; Lyapunov exponent; chaos

飞机在纵向机动中的稳定性^[1]是飞机飞行安全和战斗机完成任务情况的重要影响因素。现代飞机在高速飞行时,气动力特性已表现出明显的非线性,

特别是飞机在大迎角飞行或机动过程中,极易出现失速、自激震荡等失稳和不可控现象而引发飞行事故^[2]。战斗机在攻击和逃脱过程中,往往会进入大

收稿日期:2013-06-19

基金项目:航空基金资助项目(20111396011)

作者简介:张志浩(1989-),男,山东济南人,硕士生,主要从事非线性动力学研究.E-mail:haohao3679@sina.com

引用格式: 张志浩,姚宏,彭兴钊,等.飞机大迎角纵向机动稳定性及通向混沌的道路[J].空军工程大学学报:自然科学版,2014,15(3):15-19. ZHANG Zhihao, YAO Hong, PENG Xingzhao, et al. Stable field analysis and roads leading to chaos of aircraft vertical maneuvering at a high angle of attack[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2014, 15(3): 15-19.

迎角飞行状态,从而影响飞机飞行全。因此,研究飞机大迎角机动稳定性具有重要意义。本文以飞机纵向机动的动力学模型为对象进行研究,为飞机纵向运动安全域提出合理建议,给不同条件下飞机纵向机动的稳定控制提供了理论依据。

1 飞机纵向机动的动力学模型

飞机在飞行过程中表现出来的力学特性,通常可由非线性动力学方程结合常微分方程定性理论^[3-4]分析得出。本文选取某型飞机纵向机动动力学模型^[5]进行研究,其方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u\theta \tan\alpha - g \sin\theta + \frac{L_w}{m} \sin\alpha + \frac{L_t}{m} \sin\alpha_t \\ \dot{\alpha} &= \theta \sin^3\alpha + \frac{g}{u} \sin\theta \sin\alpha \cos\alpha - \frac{L_w}{um} \sin^2\alpha \cos\alpha - \\ &\quad \frac{L_t}{um} \sin\alpha \cos\alpha \sin\alpha_t + \dot{\theta} \cos^2\alpha + \frac{g}{u} \cos^2\alpha \cos\theta - \\ &\quad \frac{L_w}{um} \cos^3\alpha - \frac{L_t}{um} \cos^2\alpha \cos\alpha_t \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= \frac{M_w}{I_y} + \frac{lL_w}{I_y} \cos\alpha - \frac{l_t L_t}{I_y} \cos\alpha_t - \frac{c}{I_y} q \end{aligned} \quad (1)$$

式中: u 为飞行速度; α 为机翼迎角; α_t 为尾翼迎角; θ 为俯仰角; L_w 为机翼升力; L_t 为尾翼升力; I 为转动惯量; M_w 为力矩; c 为比例系数; l, l_t 为升力参数。本文将 u 视为常数,因此,式(1)可简化得到动力学模型:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q \cos^2\alpha + \frac{g}{u} \cos\theta \cos^2\alpha - \frac{L_w}{um} \cos^3\alpha - \\ &\quad \frac{L_t}{um} \cos^3\alpha \cos\alpha_t \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= \frac{M_w}{I_y} + \frac{lL_w}{I_y} \cos\alpha - \frac{l_t L_t}{I_y} \cos\alpha_t - \frac{c}{I_y} q \end{aligned} \quad (2)$$

式中机翼升力和尾翼升力的表达式为:

$$\begin{aligned} L_w &= C_{w1} \alpha - C_{w2} \alpha^3 \\ L_t &= C_{t1} \alpha_t - C_{t2} \alpha_t^3 + a \delta_e \end{aligned} \quad (3)$$

式中: C 为升力系数; δ_e 为升降舵偏角。

定义空气下洗气流为: $\epsilon = a_e \alpha$, 则尾翼迎角 α_t 可表示为: $\alpha_t = \alpha - \epsilon + \delta_e = (1 - a_e) \alpha + \delta_e$, 式中 a_e 为比例系数。

根据实际情况,在失速和过失速区域的飞机机翼升力表达式为:

$$L_w = QS(C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) W =$$

$$QS(C_{L_w}^1 \alpha - C_{L_w}^2 \alpha^3) \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{0.41} \right)^{60}} \right] \quad (4)$$

式中 Q, S, W 为比例系数。由式(4)知,飞机迎角大于 0.41 rad 时, L_w 近似为 0。在保证结果正确的前提下,假设惯性矩正比于质量 m , 引入相关参数^[5], 可得动力学模型:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q \cos^2\alpha + 0.038 \cos\theta \cos^2\alpha - \frac{1}{m} (35.145 \alpha - \\ &\quad 6.56 \alpha^3 + 144.09 \delta_e - 79.077 \alpha^2 \delta_e - 316.309 \alpha \delta_e^2 - \\ &\quad 421.745 \delta_e^3) \cos^2\alpha \cos(0.25 \alpha + \delta_e) \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= -\frac{1}{m} 264.409 q - \frac{1}{m} (3423.386 \alpha - 641.885 \alpha^3 + \\ &\quad 14403.588 \delta_e - 7702.619 \alpha^2 \delta_e - 30810.476 \alpha \delta_e^3) \cdot \\ &\quad \cos(0.25 \alpha + \delta_e) \end{aligned} \quad (5)$$

2 飞机纵向机动的稳定域与混沌运动

2.1 飞机纵向机动的相图、庞加莱截面

当质量 $m = 12773 \text{ kg}$, $\delta_e = 0$ 时,对飞机纵向机动进行数值仿真,结果见图 1~4。

图中系统的庞加莱截面为多个不连续的点或者线段,可判断,此时飞机进入混沌运动状态^[6]。

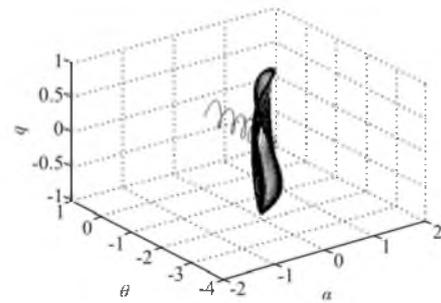


图1 三维相图

Fig.1 Three dimensional phase diagram

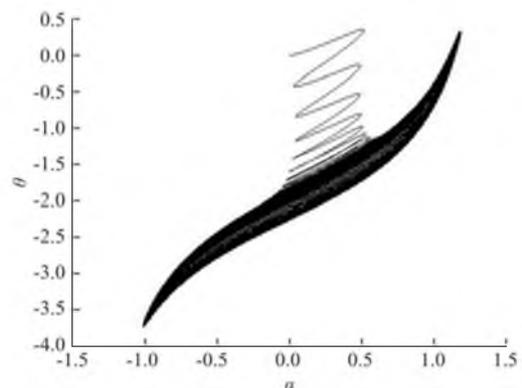


图2 α - θ 平面相图

Fig.2 α - θ flat phase diagram

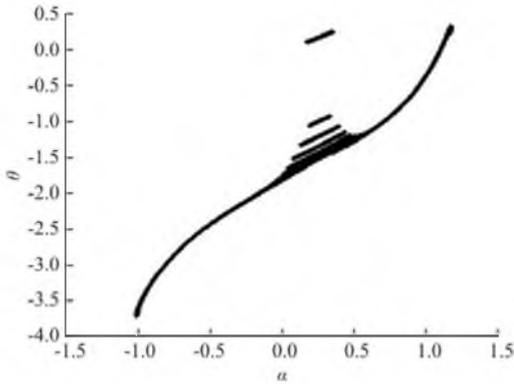


图 3 α - θ 平面庞加莱截面

Fig.3 α - θ flat poincare section

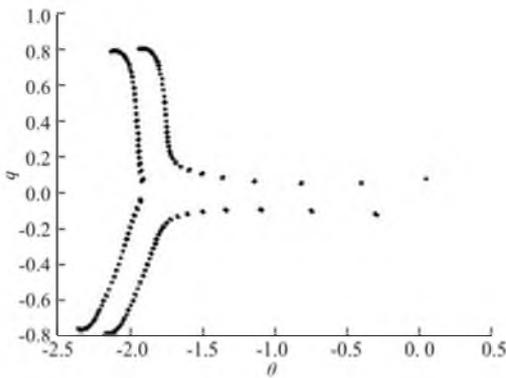


图 4 θ - q 平面庞加莱截面

Fig.4 θ - q flat poincare section

2.2 系统的平衡点及稳定性分析

根据式(5),得到方程平衡点有 3 个,考虑到 $\alpha_0 \in (-\pi, \pi], \theta_0 \in (-\pi, \pi]$,取平衡点为:

$$\alpha_0 = -4\delta_e + 6.283\ 185\ 3, \theta_0 = 1.570\ 796\ 3, q_0 = 0$$

在平衡点处,余弦函数的泰勒展开为:

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - (\theta - \theta_0)\sin\theta_0 - 0.5(\theta - \theta_0)^2\cos\theta_0,$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \alpha_0^2, \cos^3\alpha = 1 - 1.5\alpha_0^3,$$

$$\cos\alpha_t = 1 - 0.5(\alpha/4 + \delta_e)^2$$

利用坐标变换: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_0, \theta = \theta_1 + \theta_0, q = q_1 + q_0$ 将上述方程平衡点移动到原点,再经线性化可得:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \left[-\frac{1-(2\pi-4\delta_e)^2}{m}(35.145-369.9\delta_e^2-52.718\delta_e^4) \right] \alpha_1 - \\ &0.038\ 1[1-(2\pi-4\delta_e)^2]\theta_1 + [1-(2\pi-4\delta_e)^2]q_1 \\ \dot{\theta}_1 &= q_1 \\ \dot{q}_1 &= \frac{a_1}{m}(3\ 423.386-5\ 312.59\delta_e^2-30\ 810.476\delta_e^3+15\ 405.238\delta_e^4) - \\ &\frac{264.409}{m}q_1 \end{aligned} \quad (6)$$

并得到变换后系统的雅可比矩阵^[7]如下:

$$J = \begin{bmatrix} h & i & j \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$\text{式中: } h = \left[-\frac{1-(2\pi-4\delta_e)^2}{m}(35.145-369.9\delta_e^2-52.718\delta_e^4) \right],$$

$$i = -0.038\ 1[1-(2\pi-4\delta_e)^2], j = [1-(2\pi-4\delta_e)^2],$$

$$k = \frac{1}{m}(3\ 423.386-5\ 312.59\delta_e^2-30\ 810.476\delta_e^3+15\ 405.238\delta_e^4),$$

$$l = -\frac{264.409}{m}.$$

特征方程:

$$\lambda^3 - (h+l)\lambda^2 - (jk-hl)\lambda - ik = 0 \quad (7)$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, $\Delta_1 = -(h+l) > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -(h+l) & 1 \\ -ik & -(jk-hl) \end{vmatrix} > 0, \text{系统稳定域为:}$$

$$\delta_e \in \left(\frac{1\ 320.796\ 326}{m^4}, \frac{18\ 207.963\ 26}{m^5} \right) \text{且 } \delta_e \in$$

$$(0.352\ 468\ 395\ 1, 1.277\ 893\ 342)$$

在此稳定域内,飞机可以保持大攻角机动时的稳定飞行。否则,飞机则可能出现不可控现象,引发飞行事故。

2.3 通向混沌道路分析

根据中心流形定理^[8],设在中心流形 w_c 上系统的解为二维曲线 $\alpha_1 = h(q_1, \theta_1)$,令:

$$h(q_1, \theta_1) = a_1 q_1^2 + a_2 q_1 \sin\theta_1 + a_3 \sin^2\theta_1 \quad (8)$$

$$\text{易得 } h(0,0) = 0, \frac{\partial h(0,0)}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial h(0,0)}{\partial \theta_1} = 0,$$

在 w_c 上有: $\dot{\alpha}_1 = \dot{h}(q_1, \theta_1)$,即:

$$\frac{\partial h(q_1, \theta_1)}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial h(q_1, \theta_1)}{\partial \theta_1} \theta_1 = \dot{h}(q_1, \theta_1) \quad (9)$$

式(8)中,质量 $m \gg 264.409$,故略去第 1 项,将前面各式带入式(9)计算得到:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 \approx \frac{6\ 939.6}{m}$$

$$\text{所以, } \alpha_1 = h(q_1, \theta_1) \approx \frac{6\ 939.6}{m} \cos^2\theta_1 + o(q_1^3 + \theta_1^3)$$

则系统的二维约化方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= q_1 \\ \dot{q}_1 &= -\frac{1}{m} \left(3\ 423.386 \times \frac{6\ 939.6}{m} \cos^2\theta_1 - 641.885 \times \right. \\ &\left. (\cos^2\theta_1)^3 + 14\ 403.588\delta_e - 7\ 702.619 \times (\cos^2\theta_1) 2\delta_e - \right. \\ &\left. 30\ 810.476\delta_e^3 \times \frac{6\ 939.6}{m} \cos^2\theta_1 \right) \cos\left(0.25 \times \frac{6\ 939.6}{m} \times \right. \\ &\left. \cos^2\theta_1 + \delta_e \right) \end{aligned} \quad (10)$$

根据 Melnikov 方法,令 $\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \dot{\theta}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}$,

又有 $\cos\left(0.25 \times \frac{6\ 939.6}{m} \cos^2\theta_1 + \delta_e\right)$ 近似为 1,则:

$$H(q_1, \theta_1) = \frac{q_1^2}{2} - \frac{1}{m} (3\,423.386 \times \frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}) - 641.885 \times (\frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}))^3 + 14\,403.588\delta_e - 7\,702.619 \times (\frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}))^2 \cdot \delta_e - 30\,810.476\delta_e^3 \times \frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4})) \quad (11)$$

则其异宿轨道为:

$$q_1 = \pm 2 \left[\frac{1}{m} (3\,423.386 \times \frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}) - 641.885 \times (\frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}))^3 + 14\,403.588\delta_e - 7\,702.619 \times (\frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4}))^2 \delta_e - 30\,810.476 \times \delta_e^3 \times \frac{6\,939.6}{m} (0.5\theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{4})) \right]^{0.5} \quad (12)$$

设稳定流形和不稳定流形的距离为 D , 由 Melnikov 定理得到, 对于方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x, y) + u g_1(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x, y) + u g_2(x, y, t) \end{aligned}$$

有:

$$D = cu \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1) \Big|_{\substack{x=x(t-t_0) \\ y=y(t-t_0)}} dt + \sigma(u) \quad (13)$$

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 g_2 - f_2 g_1) \Big|_{\substack{x=x(t-t_0) \\ y=y(t-t_0)}} dt \quad (14)$$

由 S-B 定理: 对于所有的 t_0 , 若 $M(t_0) = 0$, 则对于所有的 u , 系统的稳定流形和不稳定流形相交。由此可知, 该系统在有限时间内会通过异宿轨道进入混沌运动状态, 见图 5, 此时飞机可能出现不稳定飞行状态。

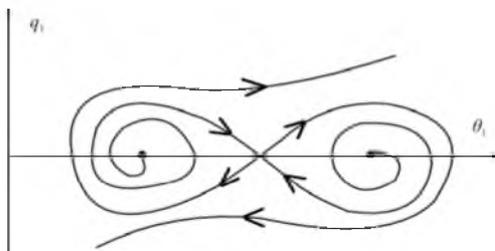


图 5 异宿轨道
Fig.5 Heteroclinic orbit

2.4 数值仿真

当 $m = 9\,773\text{ kg}$, $\delta_e = -0.069$ 时, 计算系统的 Lyapunov 指数, 结果见图 6~7。

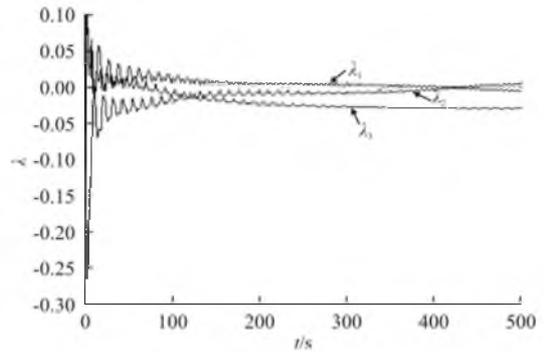


图 6 500 s 内的 Lyapunov 指数
Fig.6 Lyapunov index in 500 s

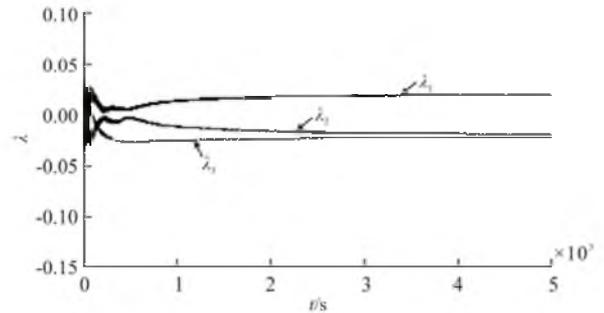


图 7 5000 s 内的 Lyapunov 指数
Fig.7 Lyapunov index in 5 000 s

Lyapunov 指数用来定量描述系统稳定性, 其值为一定迭代时间内平均值。由图 7 可知, 随着迭代时间增加, Lyapunov 指数趋于稳定。本系统的 3 个 Lyapunov 指数有一个大于 0, 由此可知系统进入混沌状态。

为研究飞行员操纵升降舵和飞机质量改变对大迎角机动飞行中飞机混沌运动的影响, 假设质量 m 恒定不变, 改变舵偏角大小观察 Lyapunov 指数的变化情况, 见图 8。选取质量分别为 $0.8m_0, 1.0m_0, 1.2m_0, 1.4m_0$ ($m_0 = m = 9\,773\text{ kg}$), 观察不同质量下最大 Lyapunov 指数随舵偏角的变化, 见图 9。其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 分别表示以上 4 个质量下的 Lyapunov 指数。

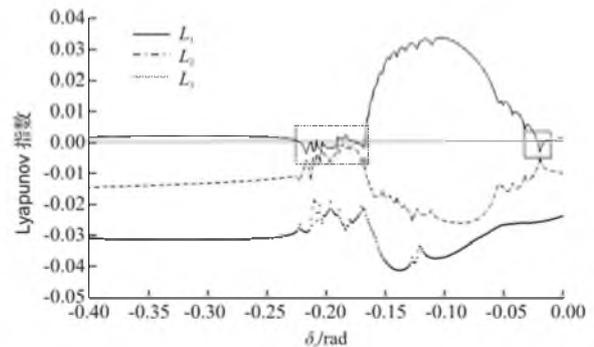


图 8 Lyapunov 指数随舵偏角的变化
Fig.8 Diversification of Lyapunov index in pace with rudder angle

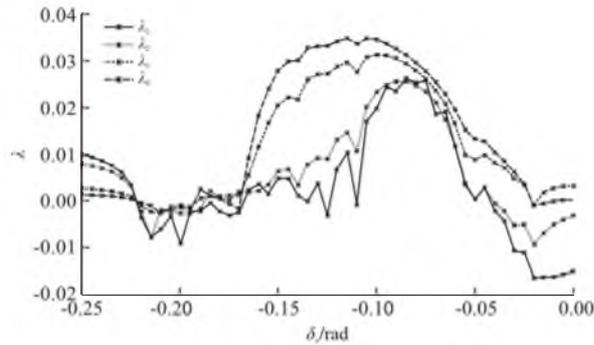


图9 不同质量下最大 Lyapunov 指数变化情况

Fig.9 Diversification of maximum Lyapunov index in different quality

计算质量、舵偏角都连续变化时系统的 Lyapunov 指数,见图 10。在质量和舵偏角都连续变化时, λ_2 、 λ_3 始终小于 0。当 $\delta_e \in (-0.025, -0.016)$, $m \in (0.8, 1.18)$ 时,和 $\delta_e \in (-0.224, -0.161)$, $m \in (1.1, 1.6)$ 时, λ_1 小于 0,其余情况下 λ_1 大于 0。由此可知,飞机大攻角机动过程中,极易出现进入混沌运动状态^[9],因此,飞机姿态控制显得非常重要。为避免飞机出现不可控状况,应尽量调节舵偏角,以释放燃油等方式调节质量,使飞机处于稳定状态^[10]。

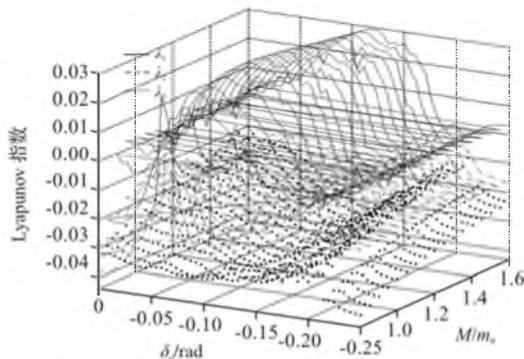


图10 质量、舵偏角都连续变化时的 Lyapunov 指数

Fig.10 Lyapunov index under continuously changing quality and rudder angle

3 结语

本文根据非线性动力学原理,对某型飞机纵向机动的动力学行为进行了比较全面细致的研究。基于飞机纵向机动的动力学模型,通过 Matlab 仿真,观察系统基本性质,进而分析了飞行稳定性,给出了飞机的纵向机动稳定域;应用 Melnikov 方法,得到系统异宿轨道,研究了飞机纵向机动混沌运动;以飞机质量和升降舵偏角为系统参量,通过计算不同参数匹配情况下 Lyapunov 指数。本文基于飞行速度标量不变进行研究,未考虑速度大小变化对飞行状态的影响,有一定的局限性,在今后的研究中将进一步深入分析。

参考文献(References):

- [1] 陆夕云,杨国伟.大攻角下有限振幅俯仰飞行的非线性动稳定性分析[J].空气动力学学报,1999,17(2):1815-1821.
LU Xiyun, YANG Guowei. Non-linear stable field analysis of aircraft limited amplitude flying at high angles of attack[J]. Journal of aerodynamics, 1999, 17(2): 1815-1821. (in Chinese)
- [2] 邹毅,姚宏.飞机大攻角俯仰角飞行的稳定域分析[J].空军工程大学学报:自然科学版,2006,7(4):92-94.
ZOU Yi, YAO Hong. Stable field analysis of aircraft flying at high angles of attack[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2006, 7(4): 92-94. (in Chinese)
- [3] 周义仓,靳祯.常微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,2009:15-32.
ZHOU Yicang, JIN Zhen. Qualitative theory of ordinary differential equations[M]. Beijing: Science press, 2009: 15-32. (in Chinese)
- [4] 马知恩,周义仓.常微分方程定性理论与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2011:26-53.
MA Zhi'en, ZHOU Yicang. Qualitative theory and stability method of ordinary differential equations[M]. Beijing: Science press, 2011: 26-53. (in Chinese)
- [5] Chauchung Song, Yewwen Liang. Two-parameter bifurcation analysis of longitudinal flight dynamics[J]. Transactions on aerospace and electronic systems, 2003, 39(3): 1103-1112.
- [6] 刘秉正,彭建华.非线性动力学[M].北京:高等教育出版社,2001:13-42.
LIU Bingzheng, PENG Jianhua. Nonlinear dynamics[M]. Beijing: China higher education press, 2001: 13-42. (in Chinese)
- [7] 董俊,张广军,姚宏.柔性结构桥梁在非定常气动力作用下的近似周期解[J].空军工程大学学报:自然科学版,2012,13(4):91-94.
DONG Jun, ZHANG Guangjun, YAO Hong. The periodic solution of flexible structural bridge under the unsteady aerodynamics[J]. Journal of air force engineering university: natural science edition, 2012, 13(4): 91-94. (in Chinese)
- [8] 姚宏,徐建学.多维磁浮柔性转子控制系统分叉域控制器设计[J].力学学报,2001,33(1):121-127.
YAO Hong, XU Jianxue. The bifurcation behaviors and controller's design for a multidimensional magnetic levitation flex-rotator control system. [J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2001, 33(1): 121-127. (in Chinese)
- [9] Liaw Song. Analysis of longitudinal flight dynamics: a bifurcation-theoretic approach[J]. Journal of guidance, control, and dynamics, 2010, 24(1): 109-116.
- [10] Gibson, Nichols, Litteboy. Bifurcation analysis of eigenstructure assignment control in a simple nonlinear aircraft model [J]. Journal of guidance, control and dynamics, 1998, 22(5): 792-798.

(编辑:徐敏)