

自适应交叉近似算法在矩量法中的应用

吴君辉¹, 曹祥玉¹, 袁浩波², 封同安¹

(1. 空军工程大学信息与导航学院, 陕西西安, 710077;
2. 西安电子科技大学天线与微波技术国防重点实验室, 陕西西安, 710071)

摘要 矩量法(Method of Moment, MoM)计算电大目标辐射与散射问题时消耗计算机资源巨大。采用自适应交叉近似算法(Adaptive Cross Approximation Algorithm, ACA)降低了MoM计算电大问题时的内存需求与计算复杂度,借助NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)建模方法设计了形状规则且边界清晰的ACA三维分组方法,从而实现了基于矩量法的ACA算法。通过算例证明该方法在不损失MOM的计算精度的前提下有效地降低了存储空间和计算量,并通过与商业软件计算结果对比,验证了算法准确有效。

关键词 自适应交叉近似算法;矩量法;NURBS建模

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2013.05.018

中图分类号 TN011 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2013)05-0076-04

The Application of Adaptive Cross Approximation Algorithm for Method of Moment

WU Jun-hui¹, CAO Xiang-yu¹, YUAN Hao-bo², FENG Tong-an¹

(1. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China;
2. Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Method of moment (MoM) expends large computer resource when calculating radiation and scattering problem of large target. The adaptive cross approximation (ACA) algorithm is applied to compress the distant field rank-deficient sub-matrices of the impedance matrix through linear algebra manipulations, which reduces memory needs and calculation complexity in MoM when computing electrically large problem. The RWG (Rao-Wilton-Glisson) triangle spaces are grouped according to the Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) spaces by means of NURBS modeling method. The grouping method is designed to realize the ACA algorithm based on MOM, which could make the subgroups more regular and clearer on the boundary line. Numerical examples are performed, the results show that this method can be the same with MoM in computation precision, and simultaneously the memory and compute time are reduced by this method. RCS (Radar Cross Section) of electrically large metal missile calculated by using this method is in good agreement with the result calculated by the commercial software, which shows that the algorithm is accurate and effective.

Key words: adaptive cross approximation algorithm; method of moment; NURBS modeling

矩量法(Method of Moment, MoM)是一种数值模拟分析任意形状天线和散射体问题的十分有效

收稿日期:2013-05-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60671001;61072018;61271100);陕西省自然科学基金资助项目(2010JZ010;2012JM8003);空军工程大学信息与导航学院博士创新基金资助项目(2011006)

作者简介:吴君辉(1985-),女,湖南常德人,博士生,主要从事电磁数值计算研究。E-mail:wjhyouxiang@163.com

的方法。它作为一种严格的数值方法,具有计算精度高的优点,但同时存在计算复杂度高和内存需求大的问题。自20世纪90年代以来,针对传统MoM存在的缺点,出现了多种快速计算方法,包括快速多极子(Fast Multipole Method, FMM)^[1]、多层快速多极子(Multilevel Fast Multipole Algorithm, MLFMA)^[2]、自适应积分方法(Adaptive Integral Method, AIM)^[3]、快速傅里叶变换法(Fast Fourier Transform, FFT)^[4]等,大大减少了存储空间和计算成本,使MoM成为求解目标电磁特性的主要方法。FMM及MLFMA可以将存储量由 $O(N^2)$ 降到 $O(N^{1.5})$,计算量由直接解的 $O(N^3)$ 降到 $O(N \log N)$,但它依赖于加法定理对格林函数的展开,因此其公式的推导、执行及运算往往需要预先已知格林函数。AIM、FFT可以在傅里叶空间完成矩量法求解中的矩阵向量乘,从而避免将阻抗矩阵元素直接存储,所需内存可降为 $O(N)$,计算复杂度降低为 $O(kN \log N)$,但它更适用于体积分方程,表面积分方程效果稍差。

自适应交叉近似算法(Adaptive Cross Approximation Algorithm, ACA)由Bebendorf在2000年提出^[5],它用纯数学方法来分析方程矩阵,通过矩阵压缩可将存储量和计算量降为 $O(N \log N)$ 。2005年K. Zhao将ACA算法引入矩量法,用于分析电磁辐射与散射^[6]。它是利用远场组所形成的阻抗矩阵具有低秩特性,对其进行分解,用一对具有低秩特性的矩阵块来代表矩量法中的远场相互作用,从而有效地对矩阵块进行压缩。2011年,Tamayo更将ACA拓展到MLACA(Multilevel Adaptive Cross Approximation, MLACA)的概念^[7]。ACA的优点在于它的是一种纯数学方法,通过对阻抗矩阵进行线性代数操作来提高计算速度,不依赖于格林函数展开及积分方程、基函数,更加容易应用到矩量法计算中。

1 自适应交叉近似算法

ACA的数学原理是利用线性相关性来对低秩矩阵进行压缩。

1.1 MOM矩阵的低秩特性

矩量法是通过基函数和权函数表达场点与源点间的相互作用组成阻抗矩阵,阻抗矩阵中对角线上的元素表示自阻抗,非对角线元素表示互阻抗^[8]。当场点源点距离越近,根据格林函数表示式,其相互作用所对应的元素值就相对越大;而当2点距离越远,其对应元素值就越小。换言之,当经过分组,2

个远场组间的相互作用元素的子矩阵块所包涵的信息要少于近场组的子矩阵块,则前者是低秩的,它能够通过数个简化的行和列向量来精确表示,可以运用ACA算法进行有效压缩。

1.2 ACA算法概述

$\mathbf{Z}^{m \times n}$ 代表矩量法中2个远场组的互阻抗,ACA算法即采用2个满秩矩阵乘积的形式构造 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 来近似表达 $\mathbf{Z}^{m \times n}$,即:

$$\mathbf{Z}^{m \times n} \approx \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n} = \mathbf{U}^{m \times r} \mathbf{V}^{r \times n} = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i^{m \times 1} \mathbf{v}_i^{1 \times n} \quad (1)$$

式中: r 为矩阵 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 的有效秩; $\mathbf{U}^{m \times r}$ 和 $\mathbf{V}^{r \times n}$ 为2个满秩矩阵。秩 r 的选取由下式得到^[9]:

$$\|\mathbf{R}^{m \times n}\| = \|\mathbf{Z}^{m \times n} - \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n}\| \leq \epsilon \|\mathbf{Z}^{m \times n}\| \quad (2)$$

式中: ϵ 为误差迭代门限; \mathbf{R} 为误差矩阵; $\|\cdot\|$ 是矩阵的Frobenius范数。

当 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 用 $\mathbf{U}^{m \times r}$ 和 $\mathbf{V}^{r \times n}$ 2个矩阵表示时,存储量由 $m \times n$ 变为 $r \times (m+n)$ 。若 $r \times (m+n) < m \times n$ (通常 $r \ll \min(m, n)$),则ACA算法只需保存 $\mathbf{U}^{m \times r}$ 和 $\mathbf{V}^{r \times n}$ 这2个规模较小的矩阵,从而实现了矩阵的压缩。

ACA算法的实现流程可分为初始化部分和第 k 次迭代^[6]。

1.2.1 初始化部分

- 1)初始化行的标号 $I_1=1$,初始化 $\tilde{\mathbf{Z}}=0$;
- 2)初始化误差矩阵的 I_1 行: $\mathbf{R}(I_1, :)=\mathbf{Z}(I_1, :)$;
- 3)寻找第1列的标号 J_1 使得: $|\mathbf{R}(I_1, J_1)| = \max_j |\mathbf{R}(I_1, j)|$;
- 4) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(I_1, :)/\mathbf{R}(I_1, J_1)$;
- 5)初始化误差矩阵的第1列 $\mathbf{R}(:, J_1) = \mathbf{Z}(:, J_1)$;
- 6) $\mathbf{u} = \mathbf{R}(:, J_1)$;
- 7) $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(0)}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}_1\|^2$;
- 8)寻找第2行的标号 I_2 : $|\mathbf{R}(I_2, J_1)| = \max_i |\mathbf{R}(i, J_1)|, i \neq I_1$

1.2.2 第 k 次迭代

- 1)更新误差矩阵的 I_k 行: $|\mathbf{R}(I_k, :)| = \mathbf{Z}(I_k, :)-\sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{u}_l)_{I_k} \mathbf{v}_l$;
- 2)寻找第 k 个列的标号 J_k 使得: $|\mathbf{R}(I_k, J_k)| = \max_j |\mathbf{R}(I_k, j)|, j \neq J_1, J_2, \dots, J_k$;
- 3) $\mathbf{v}_k = \mathbf{R}(I_k, :)/\mathbf{R}(I_k, J_k)$;
- 4)更新误差矩阵的 J_k 列: $|\mathbf{R}(:, J_k)| = \mathbf{Z}(:, J_k)-\sum_{l=1}^{k-1} (\mathbf{v}_l)_{J_k} \mathbf{u}_l$;
- 5) $\mathbf{u}_k = \mathbf{R}(:, J_k)$;
- 6) $\|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k)}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Z}}^{(k-1)}\|^2 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} |\mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k| |\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_k| +$

$$\| \mathbf{u}_k \|^2 \| \mathbf{v}_k \|^2 ;$$

7)如果 $\| \mathbf{u}_k \| \| \mathbf{v}_k \| \leq \epsilon \| \tilde{\mathbf{Z}}^{(k)} \|$ 则迭代终止; 否则继续下一步;

8)寻找下一行的标号 $I_{k+1} : |R(I_{k+1}, J_k)| = \max_i |R(i, J_k)|, i \neq I_1, I_2, \dots, I_k$ 。

其中7)的终止条件是根据秩 r 的选取条件由 $\| \mathbf{R}^{m \times n} \| = \| \mathbf{Z}^{m \times n} - \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n} \| \approx \| \mathbf{u}_k \| \| \mathbf{v}_k \|$ 所得。

2 ACA 分组方法

ACA 算法是将矩阵分块进行压缩,MoM 阻抗矩阵分块子矩阵低秩特性的必要条件是子矩阵块互作用的源点和场点距离较远。因此基函数的分组至关重要,需要通过对计算模型进行区域分组,使同一个区域的基函数对应到阻抗矩阵的同一个分组中。文献[10]中设计了一种“铺砖”的分组方法,以一个点为原点,将某个半径内的三角形面片都归为一组。但采用此方法可能造成每个组的形状和大小相差很大,不利于开展并行计算;并且 RWG (Rao-Wilton-Glisson)方法的基函数是三角形面片对,若只考虑单个面片,在分组的边界上很容易出现错误。

本文设计了一种“NURBS 分组”方法。非均匀有理 B 样条 (Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)是一种常见的建模方法,由于它是曲面建模,使它的面片可以很大,一个 NURBS 面片可能需要成百上千个三角形面片才能精确表示。因此,根据 NURBS 面片进行分组,以 NURBS 面片数作为分组数,不仅可以使分组的形状大小合理、规则,而且分组的边界清晰明了。分组方法简单易行,以一个平板模型分组为例,图 1 为 RWG 建模,图 2 为按照 NURBS 面片对 RWG 三角形面片进行分组,共分为 9 组。首先依次求出每个 RWG 基函数公共边中点与各个 NURBS 面片的最小距离。接着通过比较,将该公共边归入距离最近的那个 NURBS 面片的分组。循环完毕,即可获得 ACA 算法所需的分组。以公共边分组是为了与阻抗矩阵所相应的未知量相呼应,使分组边界更加清晰。

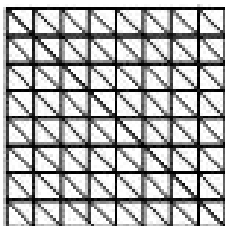


图 1 RWG 建模
Fig.1 RWG modeling

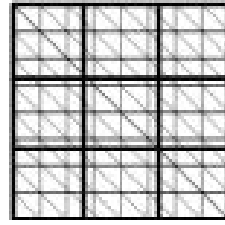


图 2 RWG 建模的 NURBS 分组
Fig.2 NURBS grouping of RWG modeling

3 计算实例

首先通过计算导体圆球的 RCS 验证算法的正确性。图 3 为球半径 1 m,剖分为 17 334 个三角形面片,96 个 NURBS 面片。激励平面波的波长为 0.5 m,由 $-z$ 方向入射,沿 x 方向极化。图 4 为球体存储量变化曲线。

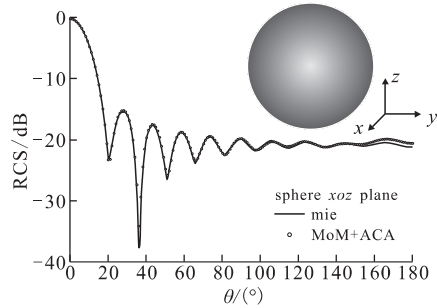


图 3 球体 xoz 面上归一化 RCS
Fig.3 Normalized RCS of sphere in xoz plane

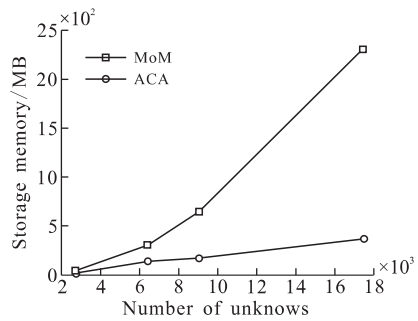


图 4 球体存储量变化曲线
Fig.4 Change profile of sphere storage

从图 3 可见,使用 ACA 算法压缩的 MOM 计算结果与 Mie 级数解吻合良好,说明 ACA 对矩阵的压缩并未影响计算精度。

表 1 体现了当剖分细度不同,产生不同未知量数目时运算过程所占内存和矩阵填充时间的变化趋势。从图 4 可以看出,矩量法的存储量增加趋势为 $O(N^2)$,而交叉近似算法对内存要求的表现为 $O(N \log N)$ 。由于 ACA 不需填充全部阻抗矩阵,所用时间也小于 MOM。当矩阵规模增大时,ACA 优势显现。通过以上计算实例说明,ACA 算法的运用

可以大大减小计算的存储空间,提高计算速度,并且不影响 MoM 的计算精度。

表 1 球体 RCS 求解所需内存和矩阵填充时间

Tab. 1 The storage and matrix filling time of solving sphere RCS

未知量/个	MOM 占用	ACA 占用	MOM 矩阵	ACA 矩阵
	内存/MB	内存/MB	填充时间/min	填充时间/min
2 724	57	26	8	6
6 390	312	145	31	19
8 990	648	177	75	28
17 334	2292	367	377	55

为验证算法求解电大问题稳定性,设计计算一金属导弹模型,模型长 7 m,剖分为 28 500 个三角形面片,190 个 NURBS 面片。激励平面波的波长为 1 m,由 $-z$ 方向入射,沿 x 方向极化。MOM 理论需内存 6.2 GB,超过普通计算机物理内存,采用 ACA 算法可以成功求解该问题,占用内存 822 MB,求解时间约为 65 h。导弹 xoz 面 RCS 与商业软件 ansoft 对比见图 5,说明 ACA 算法可取得准确的计算结果。

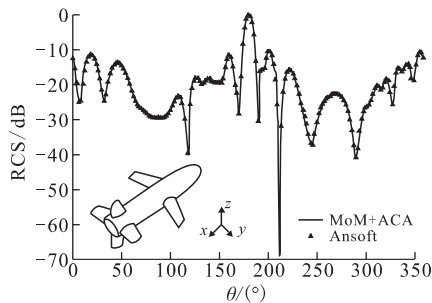


图 5 金属导弹 xoz 面 RCS

Fig. 5 RCS of missile in xoz plane

4 结语

ACA 算法可以有效地压缩阻抗矩阵,加速矩阵填充和矩阵向量乘。借助 NURBS 建模方法设计了简单的 ACA 算法阻抗矩阵分组方法,在基于 RWG 基函数的矩量法中加入了 ACA 算法,大大降低了计算的存储量和计算复杂度。计算结果表明:该方法有效地降低了 MOM 所需内存空间和计算量,并依然可保证计算精度。

参考文献(References):

- [1] Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classic potential theory [J]. Comput phys, 1985, 60 (1): 187-207.
- [2] Lu C C, Chew W C. A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation of wave scattering

[J]. Microwave and optical technology letters, 1994, 7 (10): 466-470.

- [3] Bleszynski E, Bleszynski M, Jaroszewicz T. AIM: adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems [J]. Radio science, 1996 (31): 1225-1251.
- [4] Cooley J W, Tukey J W. Algorithm for the machine computation of complex Fourier series [J]. Math comp, 1965 (19): 297-301.
- [5] Bebendorf M. Approximation of boundary element matrices [J]. Numer math 2000, 86 (4): 565-589.
- [6] Zhao K, Vouvakis M N, Lee J F. The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems [J]. IEEE trans EMC, 2005, 47 (4): 763-773.
- [7] Tamayo Joé M, Heldring Alexander, Rius Juan M. Multilevel adaptive cross approximation (MLACA) [J]. Antennas and propagation, 2011, 59 (12): 4600-4608.
- [8] YAN Ying, ZHANG Yu, ZHAO Xunwang. Time-domain method of moments accelerated by adaptive cross approximation algorithm [J]. APSURSI, 2012, 8 (14): 1-2.
- [9] Guo Han, Hu Jun, Nie Zaiping. Accelerating Calderon multiplicative preconditioner with multi-grade adaptive cross approximation algorithm [J]. APSURSI, 2011, 3 (8): 201-204.
- [10] Shaeffer J. Direct solve of electrically large integral equations for problem size to 1m unknowns [J]. Antennas and propagation, 2008, 56 (8): 2306-2313.

(编辑:徐楠楠)