

柔性结构桥梁在非定常气动力作用下的近似周期解

张广军, 董俊, 姚宏, 邓涛, 王相波¹

(空军工程大学理学院, 陕西西安, 710051)

摘要 以 Tacoma 大桥为例, 针对工程中一类柔性结构桥梁在非定常气动力作用下的非线性动力学模型, 在对其奇点类型和其周期运动存在性进行定性分析的基础上, 利用谐波平衡法进行了定量分析, 得到了该系统稳态的近似周期解。最后, 通过数值仿真对理论结果进行了验证。结果表明, 当风速在某一个区域内时, 所得到的解析结果和数值结果非常接近, 且与定性分析的结论一致。此时, 由于长时间的周期振动会造成结构疲劳破坏, 甚至可能会严重影响桥梁结构的安全, 本文的研究结果在振动工程计算和理论设计中具有一定的指导意义。

关键词 非线性动力学; 周期解; 谐波平衡法; 柔性结构桥梁

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2012.04.018

中图分类号 O322 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2012)04-0091-04

桥梁空气动力学是 20 世纪 60 年代发展起来的研究大跨度桥梁对自然气流反应的新兴科学^[1-2]。颤振稳定性分析是大跨度桥梁抗风设计中最重要内容之一。颤振中的非线性问题, 尤其是由于耦合作用而产生的非线性气动问题, 往往被忽略掉或进行线性化处理^[3-9], 这对以往跨度不太大、刚度较大的桥梁是满足工程需求的。但是, 随着桥梁跨度的增大、柔性的增加以及风与结构的相互作用增强, 非线性耦合项对颤振问题的分析越来越重要, 需要重新考虑。为此, Scanlan^[7] 在 Bohm^[4] 已给出的完整的柔性结构节段力学模型的基础上, 以 Tacoma 大桥为例, 考虑扭矩系数为瞬时攻角和转速的函数, 推导出结构与风耦合作用的非线性气动力项, 建立了新的非线性气动力模型。同时, 他给出了非线性失稳的临界速度, 并在时域内给出了扭转位移和时程曲线。但其定性分析比较简单, 仅给出了特定参数下周期运动的数值仿真。Xu^[10] 虽然进行了奇点类型分析, 讨论了其周期运动的存在性和 Hopf 分岔、全局分岔等问题, 但是没有给出其周期解的解析表达式, 仅给出了数值计算结果。为此, 本文研究了一个工程中的非线性动力学模型, 运用常微分方程几何理论对其进行动力学特性分析, 并进行了数值仿真。

1 柔性桥梁系统的非线性气动力学模型及其特性分析

1.1 非线性气动力学模型

本文以 Tacoma 大桥为例, 桥梁的气动力模型如下^[7,10]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\left(\xi_\alpha \omega_\alpha - S_3 u^2 - \frac{S_4}{U} x_2^2\right)x_2 - (\omega_\alpha^2 - s_1 U^2 - s_2 U^2 x_1^2)x_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $s_1 = \frac{0.11\rho b^2 L}{I_1}$, $s_2 = \frac{5.1\rho b^2 L}{16I_1}$, $s_3 = \frac{0.33\rho b^5 L}{64I_1}$, $s_4 = \frac{495\rho b^5 L}{64I_1}$ 。文中涉及的基本参数为^[7,10]: 桥宽 $b = 2.8$

¹ 收稿日期: 2012-03-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10872156); 陕西省自然科学基金资助项目(2007014)

作者简介: 张广军(1967-), 男, 河南商丘人, 教授, 博士后, 主要从事非线性动力学研究。

E-mail: zhanggj@126.com

m, 桥长 $L=853.44$ m, 单位长度质量 $u=8\,500$ kg/m, 回转半径 $r=4.92$ m, 一阶圆频率 $\omega_\alpha=1.105$ r/s, 阻尼比 $\xi_\alpha=0.05$, 空气密度 $\rho=1.2$ kg/m³, U 为 Tacama 大桥的风速, I_1 为广义转动惯量, $I_1=\frac{2ur^2L}{\pi}$ 。

1.2 非线性动力学特性分析

1) 通过分析可知系统(1)含有3个奇点: $R_1(\sqrt{(\omega_\alpha^2-s_1U^2)/s_2U^2}, 0)$, $R_2(-\sqrt{(\omega_\alpha^2-s_1U^2)/s_2U^2}, 0)$, $O(0,0)$, 其中 R_1 和 R_2 是鞍点。

2) 令 $T=s_3U^2-\xi_\alpha\omega_\alpha$, $D=\omega_\alpha^2-s_1U^2$, $\Delta=T^2-4D$ 。在 $U>0$ 的情况下, 关于点 O 有下列结果: ①当 $U\in(0, 40.80)$ 时, $T<0$, $D>0$, $\Delta<0$, 点 $O(0,0)$ 是稳定的焦点; ②当 $U\in(0, 40.80, 290.681)$ 时, $T<0$, $D>0$, $\Delta<0$, 点 $O(0,0)$ 是不稳定的焦点; ③当 $U=290.681$ 时, $D>0$, $\Delta=0$, 点 $O(0,0)$ 是临界结点; ④当 $U\in(290.681, \infty)$ 时, $D>0$, $\Delta>0$, 点 $O(0,0)$ 是稳定(不稳定)的结点。

3) 根据该模型的 Hopf 分岔分析和极限环的存在性定理, 当 $0<U-40.80\ll 1$ 时, 系统(1)还存在唯一的稳定的极限环^[11], 且极限环的频率为: $\omega^2=\omega_\alpha^2-40.80s_1$ 。本文将重点对存在极限环的参数区间的周期振动给出近似解析解。

2 柔性桥梁气动力模型的近似解析解

一般借助于各种近似方法来对非线性问题进行求解, 本文采用谐波平衡法^[12]来求解非线性振动问题近似解析解。方程(1)也可以改写为方程(2):

$$\ddot{x} + \xi_\alpha\omega_\alpha\dot{x} - s_2U^2\ddot{x} - \frac{s_4}{U}\dot{x} + \omega_\alpha^2x - s_1U^2x - s_2U^2x^3 = 0 \quad (2)$$

设方程(2)的一阶谐波平衡解为:

$$x = A\cos\theta + B\sin\theta, \quad \theta = \omega t \quad (3)$$

为了简化计算, 将一阶谐波平衡解的基准频率以动力学特性分析中极限环的频率来代替, 高阶谐波的频率是该频率的整数倍。通过分析, 将式(3)代入式(2)并略去高阶谐波可得:

$$\begin{aligned} & (-A\omega^2 + \xi_\alpha\omega_\alpha B\omega - s_3U^2B\omega - \frac{3s_4B^3\omega^3}{4U} - \frac{3s_4A^2B\omega^3}{4U} + \omega_\alpha^2A - s_1U^2A - \frac{3}{4}s_2A^3U^2 - \frac{3}{4}s_2U^2AB^2) \cos\theta + (-B\omega^2 - \\ & \xi_\alpha\omega_\alpha A\omega + s_3U^2A\omega + \frac{3s_4A^3\omega^3}{4U} + \frac{3s_4A^3\omega^3}{4U}\omega_\alpha^2B - s_1U^2B - \frac{3}{4}s_2U^2A^2B) \sin\theta + \text{HOH} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式中 HOH 表示高阶谐波。略去高阶谐波, 令 $\cos\theta, \sin\theta$ 的系数等于零。得:

$$\begin{cases} A\omega^2 + \xi_\alpha\omega_\alpha B\omega - s_3U^2B\omega - \frac{3s_4B^3\omega^3}{4U} - \frac{3s_4A^2B\omega^3}{4U} + \omega_\alpha^2A - s_1U^2A - \frac{3s_2U^2A^3}{4} - \frac{3}{4}s_2U^2AB^2 = 0 \\ -B\omega^2 - \xi_\alpha\omega_\alpha A\omega + s_3U^2A\omega + \frac{3s_4A^3\omega^3}{4U} + \frac{3s_4AB^2\omega^3}{4U} + \omega_\alpha^2B - s_1U^2B - \frac{3s_2U^2B^3}{4} - \frac{3}{4}s_2U^2A^2B = 0 \end{cases} \quad (5)$$

求解方程组(5)得:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3s_2U^3 - 3s_4\omega^3} \sqrt{-(6s_2U^3 - s_4U^3)(s_1U^2 - \omega_\alpha^2 - s_3U^2\omega + \xi_\alpha\omega_\alpha\omega + \omega^2)U} \\ B = \frac{-1}{3s_2U^3 - 3s_4\omega^3} \sqrt{-(6s_2U^3 - s_4U^3)(s_1U^2 - \omega_\alpha^2 - s_3U^2\omega + \xi_\alpha\omega_\alpha\omega + \omega^2)U} \end{cases}$$

由此可得柔性桥梁气动力模型的近似解析解:

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{3s_2U^3 - 3s_4\omega^3} \sqrt{-(6s_2U^3 - s_4U^3)(s_1U^2 - \omega_\alpha^2 - s_3U^2\omega + \xi_\alpha\omega_\alpha\omega + \omega^2)U} \cos\omega t + \\ & \frac{-1}{3s_2U^3 - 3s_4\omega^3} \sqrt{-(6s_2U^3 - s_4U^3)(s_1U^2 - \omega_\alpha^2 - s_3U^2\omega + \xi_\alpha\omega_\alpha\omega + \omega^2)U} \sin\omega t \end{aligned} \quad (6)$$

定性分析式(6)后可得:

当 $U\in(40.801, 40.816)$, 近似解的相图为椭圆, 系统将处于周期振动状态, 近似解即为系统的周期解。系统动力学特性分析表明, 当 $U\in(40.801, 40.816)$ 时存在唯一稳定的极限环, 该近似解符合定性分析。

当 $U \in (6, 40.80)$, 近似解为一逐渐衰减的周期振动, 并且逐渐衰减为静止状态。系统动力学特性分析表明, 当 $U \in (0, 40.80)$ 时系统收敛于焦点 $O(0, 0)$, 该近似解与该参数区间的振动状态定性一致。

当 $U \in (0, 6)$, 近似解曲线相图远离稳定焦点 $O(0, 0)$, 理论表明: 系统将处于不稳定状态, 与动力学特性分析中 $U \in (0, 40.80)$ 系统处于稳定状态相矛盾, 不符合定性分析。这时风速较小, 近似解析解不适合风速较小时的情况, 但此时几乎不会影响桥梁的结构稳定性。

3 数值模拟试验分析

以 Tacoma 大桥为例, 利用龙格—库塔法对系统(1)在某些参数区域下进行数值模拟, 初步验证本文中的近似解。在 $U \in (40.801, 40.816)$ 时, 分岔参数风速选取步长为 0.001, 验证该参数区域下系统的近似解析解与数值模拟解, 发现每一组中两条封闭的轨线都吻合较好, 其中误差最大的一组轨线误差为 6.54%。

以风速 $U = 40.80481$ 和风速 $U = 40.8068$ 为例, 初始值为 $(x_1, x_2) = (-0.2078, 0.2655)$ 时, 根据系统的近似解析解与数值模拟解, 分别画出系统(1)在 2 个参数情况下的相平面图, 结果见图 1-2。图中虚线是数值模拟得到的相图; 实线是近似解曲线得到的相图。图中, 两条封闭的轨线非常接近, 表明本文求得的近似周期解是比较精确的, 证实了该一阶谐波平衡解在该参数区域内的有效性和适用性。

在 $U \in (6, 40.80)$ 时, 分岔参数风速选取步长为 0.001, 对该参数区域下系统的近似解析解与数值模拟解进行验证, 发现该近似解与该参数区间的振动状态基本一致。以风速 $U = 20.0$ 为例, 初始值为 $(x_1, x_2) = (-3.096, 3.541)$ 时, 根据系统的近似解析解与数值模拟解分别画出系统(1)在该参数情况下的相平面图, 结果见图 3-4。其中图 4 是图 3 的局部放大图。图中近似解析解与数值模拟解基本重合, 说明近似解析解不但在定性上与实际振动状态一致, 而且在定量上也非常接近, 误差比参数 $U \in (40.801, 40.816)$ 时更小。证实了该一阶谐波平衡解在该参数区域内的有效性和适用性。

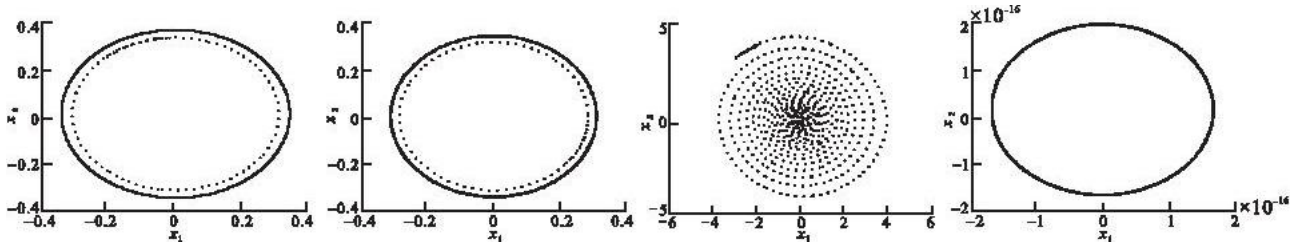


图 1 在 $U = 40.80481$ 时的相图

图 2 在 $U = 40.8068$ 时相图

图 3 在 $U = 20$ 时的相图

图 4 图 3 的局部放大图

Fig.1 The phase diagram when $U = 40.80481$

Fig.2 The phase diagram when $U = 40.8068$

Fig.3 The phase diagram when $U = 20$

Fig.4 Partially zooming - in of Fig.3

4 结论

本文以 Tacoma 大桥为例, 利用理论分析和数值模拟的方法对柔性桥梁二维非线性耦合气动力模型进行了分析。初步得到以下结论:

1) 通过谐波平衡法解析分析, 该系统在 $U \in (40.801, 40.816)$ 时, 得到其周期解的近似表达式, 并通过数值模拟进行比较验证, 所得到的解析结果和数值结果非常接近。

2) 在 $U \in (6, 40.80)$ 时, 虽然系统的实际运动状态为逐渐衰减的振动, 但是近似解析解与数值模拟解几乎重合, 说明近似解析解在定性和定量上与实际振动状态一致, 误差比参数 $U \in (40.801, 40.816)$ 时更小。

3) 由此可以看出, 针对 Tacoma 大桥, 本文得到的近似解析结果和定性分析的结果在绝大多数情况下基本一致, 在以上 2 个参数区域内, 所得结果可为该类柔性结构桥梁的振动研究提供理论参考。但在 $U \in (0, 6)$ 时, 不符合定性分析。但这种情况下风速小, 几乎不会影响桥梁的结构稳定性。由于长时间的周期振动会造成结构疲劳破坏, 甚至可能会严重影响桥梁结构的安全, 因此在工程中通过改变系统的其他参数或者对其进行振动控制来避免桥梁在 $U \in (40.801, 40.816)$ 时发生周期振动。

参考文献(References):

- [1] Leonard G A. Foundation engineer[M]. New york: Mc Graw - Hill co,1962.
- [2] Shirley Smith H. The world's great bridges[M]. London: Hayur and row publications, 1964.
- [3] 陈艾荣, 项海帆, 何宪飞, 等. 桥梁断面 18 个颤振导数自由振动识别[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2002, 30(5): 544 - 550.
CHEN Airong, XIANG Haifan, HE Xianfei, et al. Identification of 18 flutter derivatives of bridge decks[J]. Journal of tongji university: natural science edition, 2002, 30(5): 544 - 550. (in Chinese)
- [4] Bohm V F. Berechnung nichtlinearer aerodynamisch erregter schwingungen von Hangebrücken[J]. Der Stahlbau, 1967, 38(7): 207 - 215.
- [5] 郭健. 柔性悬索桥维修加固后静载试验及承载力评估[J]. 施工技术, 2011, 40(8): 89 - 92.
GUO Jian. Static load test and bearing capacity assessment of repaired and strengthened flexible suspension bridge[J]. Construction technology, 2011, 40(8): 89 - 92. (in Chinese)
- [6] Brito J L V, Rjera J D. Aerodynamic instability of cylindrical bluff bodies in non - homogenous flow[J]. J of WEIA, 1995, 57(1): 81 - 96.
- [7] Scanlan R H, Tomko J J. Airfoil and bridge deck flutter derivatives[J]. J eng mech of ASCE, 1971, 97(6): 1717 - 1737.
- [8] 徐旭. 柔性桥梁颤振导数间的相互关系的参数分析(I)[J]. 应用数学和力学, 2009, 30(2): 229 - 237.
XU Xu. Parametric studies on the relationships of flutter derivatives of slender bridge(I) [J]. Applied mathematics and mechanics, 2009, 30(2): 229 - 237. (in Chinese)
- [9] 徐旭. 柔性桥梁颤振导数间的相互关系的参数分析(II)[J]. 应用数学和力学, 2009, 30(3): 318 - 324.
XU Xu. Parametric studies on the relationships of flutter derivatives of slender bridge(II) [J]. Applied mathematics and mechanics, 2009, 30(3): 318 - 324. (in Chinese)
- [10] 徐旭, 曹志远. 气动耦合扭转非线性振动的稳定性分析[J]. 非线性动力学学报, 1999, 6(3): 228 - 234.
XU Xu, CAO Zhiyuan. Stability of a relative - rotation nonlinear vibrations with aerodynamics coupled terms[J]. Journal of nonlinear dynamics, 1999, 6(3): 228 - 234. (in Chinese)
- [11] 李群宏, 陈良, 梁海花, 等. 一个非线性气动力模型的分岔研究[J]. 广西大学学报, 2004, 29(4): 297 - 305.
LI Qunhong, CHEN Liang, LIANG Haihua, et al. Bifurcation of a nonlinear aerodynamic forces model[J]. Journal of Guangxi university: natural science edition, 2004, 29(4): 297 - 305. (in Chinese)
- [12] Hong Yao, Tao Deng, Guangjun Zhang. Periodicity for strongly nonlinear bifurcation system of muscular blood vessel[J]. Non-linear science letters D, 2011, 2: 87 - 93.

(编辑: 徐敏)

The Periodic Solution of Flexible Structural Bridge under the Unsteady Aerodynamics

ZHANG Guang - jun, DONG Jun, YAO Hong, DENG Tao, WANG Xiang - bo
(School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: In this paper, a nonlinear dynamic model derived from engineering is investigated. The dynamic characteristic is analyzed by using the geometrical theory of ordinary differential equations. The Tacoma bridge is taken for example, the quantitative analysis of the nonlinear dynamical model of a flexible structural bridge under the unsteady aerodynamics from engineering by harmonic balance method is made based on the qualitative analysis of the types of fixed points and the existence of periodic motion. And the approximate periodic solution is obtained. Finally, the approximate analytical results are verified by numerical simulation. The results show that the analytic results are close to the numerical ones in accord with the qualitative analysis when the wind speed is in a certain region of parameter. Here, the results in this paper are valuable in the calculation of vibration engineering and theoretical design, since the long - time periodic oscillation is likely to cause the fatigue of structure, even probably effect severely the structural safety of bridge.

Key words: nonlinear dynamics; periodic solution; harmonic balance method; flexible structural bridge