

# 基于 Cordic 算法的载波同步方法

李小蓓<sup>1</sup>, 杨学兵<sup>2</sup>, 蒋华<sup>1</sup>, 孙璐<sup>1</sup>, 蒲浩<sup>1</sup>, 黄涛<sup>1</sup>, 吕晨<sup>3</sup>

(1. 空军工程大学电讯工程学院, 陕西 西安 710077; 2. 94170 部队, 陕西 西安 710082; 3. 93897 部队, 陕西 西安 710077)

**摘要** 在通信系统中, 相干检测或同步解调时, 往往会产生频率偏差。由于一帧数据内各个符号的抽样时刻不一致, 随着时间推移, 解调出的符号的相位误差会越来越大, 致使信号失真严重, 译码误码率很高。利用 Cordic 算法, 采用 LDPC 码高性能的译码特性, 提出了一种纠正上述频偏的载波同步方法。该方法首先用 Cordic 算法来求解频偏, 然后再用 Cordic 算法来修正各个接收信号中由频偏带来的相偏, 最后, 将修正好的码字送入基于 LDPC 码译码算法的译码器。仿真结果表明: 该方法不但变乘法操作为移位操作, 便于硬件实现, 而且可以保证 LDPC 编码系统的性能接近于精确同步情况下的性能。

**关键词** 低密度奇偶校验码; Cordic 算法; 置信传播译码算法; 载波同步

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.05.015

**中图分类号** TN911.22 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)05-0072-04

低密度码(LDPC)<sup>[1]</sup>是 Gallager 于 1962 年提出的一种纠错编码方案, 但是, 由于当时仿真分析工具的计算能力有限, 直到 1996 年 LDPC 码才被发现是一种可以逼近加性高斯白噪声信道容量的编码方案。近几年, LDPC 的理论和应用研究得到了国际上的广泛关注<sup>[2]</sup>。

在通信系统中, 当采用相干检测或同步解调时, 接收机需要提供一个发射端调制载波同频同相的相干载波<sup>[3]</sup>。如果接受信号和相干载波存在频率偏差, 会使接收信号产生相位偏移和幅度衰减<sup>[4]</sup>。由于各个符号的抽样时刻不一致, 一帧数据内各个符号的相位偏移不一致, 文献[1]利用 LDPC 码循环迭代的译码特性, 通过若干次迭代译码来修正各个符号的相位偏移。该方法的缺陷是计算量太大, 译码速度慢。本文在帧同步前提下, 随机地抽取两端长度一致, 间隔较大的 2 个码组, 进行相关运算, 得到两码组中对应码元的相位偏移, 计算频偏。该方法和文献[1]的 LDPC 译码算法相比较, 计算量更小, 译码速度更快, 并且当码组数据长度较大时, 频偏修正性能更好。由于通过非规则 Tanner 图构造的非规则 LDPC 码具有远好于规则 LDPC 码的性能, 尤其在码长比较大的情况下, 故本文只研究非规则 LDPC 码。

## 1 Cordic 算法

Cordic 算法<sup>[5]</sup>是一种以最小硬件代价来计算初等函数的方法, 执行的是一种旋转算法, 设矢量  $(X_i, Y_i) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ , 现将其旋转  $\theta$  角得到新矢量  $(X_j, Y_j) = (r \cos(\alpha + \theta), r \sin(\alpha + \theta))$ , 则有:

$$X_j = r \cos(\alpha + \theta) = r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta) = X_i \cos \theta - Y_i \sin \theta \quad (1)$$

$$Y_j = r \sin(\alpha + \theta) = r(\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) = Y_i \cos \theta + X_i \sin \theta \quad (2)$$

写成矩阵形式就是:

\* 收稿日期: 2010-10-25

基金项目: 空军工程大学电讯工程学院博士启动基金资助项目(KDYBSQDJJ1008)

作者简介: 李小蓓(1981-)女, 陕西西安人, 讲师, 博士, 主要从事抗干扰通信及信号处理研究。

E-mail: emmaxiaorul@yahoo.com.cn

$$\begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

为了旋转一个角度  $\theta$ ,我们可以用一个迭代的过程。将  $\theta$  分解为若干个微旋转,第  $n$  次旋转的角度为  $\theta_n$ ,则有:

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \cos \theta_n \begin{bmatrix} 1 & -\tan \theta_n \\ \tan \theta_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

进一步,如果限制  $\tan \theta_n = \pm 2^{-n}$ ,则可以将  $\tan \theta_n$  乘项的乘法操作变为移位操作,式(4)将只有一个乘积项  $\cos \theta_n$ 。

$$\theta_n = s_n \arctan 2^{-n}, s_n = \{-1, +1\} \quad (5)$$

当尚未旋转的角度  $\geq 0$  时,  $s_n$  取  $+1$ , 否则取  $-1$ 。

所有的叠加角度加在一起就是需要的旋转角度  $\theta$ :

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta_n \quad (6)$$

## 2 LDPC 码置信传播译码算法

低密度校验码(Low Density Parity - check Codes, LDPC)作为一种近年来被人们广泛关注的高性能线性分组码,具有非常稀疏的校验矩阵<sup>[6]</sup>,译码复杂度低,并且并行编译码算法有利于硬件实现<sup>[7]</sup>。LDPC 码的译码算法主要有和积(Sum - Product)算法<sup>[8]</sup>,最小和算法<sup>[8]</sup>以及对数似然比算法<sup>[8]</sup>,本文主要研究和积译码算法,该算法分为 3 个步骤:

**步骤 1 频偏修正:**本算法的频偏估计和频偏修正都用到 Cordic 算法,见图 1。设发送信号为  $s_n$ ,通频带信号为  $x_n$  的复基带模型为:

$$x_n = s_n e^{j2\pi f_{tx} n T} \quad (7)$$

式中:  $f_{tx}$  为发送载波频率;  $T$  为码元周期。在接收机用本振频率为  $f_{rx}$  的信号进行相关接受,接受的复基带信号  $r_n$  为:

$$r_n = y_n e^{j2\pi f_{tx} n T} \cdot e^{-j2\pi f_{rx} n T} = y_n e^{j2\pi f_{\Delta} n T} \quad (8)$$

式中:  $y_n$  为受噪声干扰的信号;  $f_{\Delta} = f_{tx} - f_{rx}$  为发送和接受载波的频差。

如果截取两端长度都为  $L$ ,间隔为  $D$  的码组,进行相关运算,和  $z$  为:

$$z = \sum_{n=0}^{L-1} r_n r_{n+D}^* = \sum_{n=0}^{L-1} y_n e^{j2\pi f_{\Delta} n T} (y_{n+D} e^{-j2\pi f_{\Delta} (n+D) T}) = e^{-j2\pi f_{\Delta} D T} \sum_{n=0}^{L-1} y_n y_{n+D} \quad (9)$$

用 Cordic 算法求得延迟相关和  $z$  的角度  $\theta$  为:

$$\theta = 2\pi f_{\Delta} D T \quad (10)$$

所以频偏  $f_{\Delta}$  为:

$$f_{\Delta} = \frac{\theta}{2\pi D T} \quad (11)$$

然后根据频偏  $f_{\Delta}$  确定各个符号的相偏,并且再次用 Cordic 算法修正各个符号的相位。

**步骤 2 初始化:**将初始消息  $f_j^a = P(x_j = a | y_j) = \alpha_j P(y_j | x_j = a)$  送入  $Q_{ij}^a, R_{ij}^a$  初始化为 1。初始化消息以前,对接收信号进行相位修正。首先在帧同步的前提下,在一帧数据内选取 2 个长度相同的码组,并且间隔较大,然后 Cordic 算法求出 2 码组对应码元的相偏,确定频率偏移,最后再次利用 Cordic 算法修正各个符号的由于频率偏移造成的相偏。

**步骤 3  $Q_{ij}^a$  和  $R_{ij}^a$  迭代更新信息:**

如图 2 所示,  $R_{ij}^a$  是校验节点  $z_i$  向变量节点  $x_j$  发送的校验消息,其在迭代译码中的更新等式为:

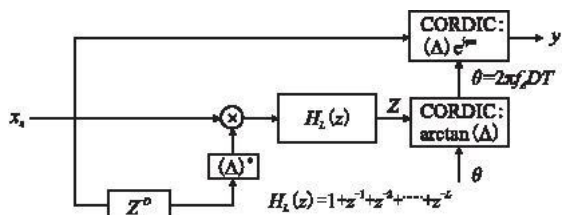


图 1 频偏估计和频偏修正图

Fig. 1 The estimation and correction of the frequency warp

$$R_{ij}^a = P(z_i | x_j = a) = \sum_{x: x_j = a} P(z_i | x) P(x | x_j = a) = \sum_{x: x_j = a} P(z_i | x) \prod_{k \in N(i) \setminus j} Q_{ik}^{x_k} \quad (12)$$

式中  $N(i) \setminus j$  表示与校验节点  $z_i$  相邻的变量节点集合, 不包括变量节点  $x_j$ 。

$Q_{ij}^a$  是变量节点  $x_j$  向校验节点  $z_i$  发送的变量消息, 其在迭代译码中的更新等式为:

$$Q_{ij}^a = P(x_j = a | y_j, \{z_k, k \neq i, k \in M(j)\}) = \frac{P(x_j = a | y_j) P(\{z_k, k \neq i, k \in M(j)\} | x_j = a, y_j)}{P(\{z_k, k \neq i, k \in M(j)\} | y_j)} = \alpha_{ij} f_j^a \prod_{k \in M(j) \setminus i} R_{kj}^a \quad (13)$$

$M(j) \setminus i$  表示与变量节点  $x_j$  相邻的校验节点集合,

不包括校验节点  $z_i$ ,  $\alpha_{ij}$  是归一化因子。

步骤4 译码尝试:

在步骤2完成  $Q_{ij}^a$  和  $R_{ij}^a$  的更新计算后, 可以对码字  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  进行译码尝试, 每个码字比特译码值为:

$$\hat{x}_j = \operatorname{argmax}_{a \in \{-1, +1\}} f_j^a \prod_{k \in M(j)} R_{kj}^a \quad (14)$$

如果满足  $H_{M \times N} \hat{x} = 0$ , 译码成功<sup>[8]</sup>, 否则回到步骤2进行新一轮的信息更新计算。

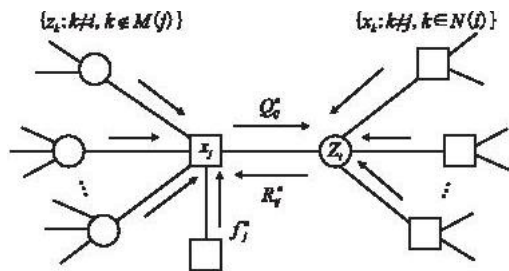


图2 中间变量消息传递图

Fig. 2 The transfer of the middle variable message

### 3 程序仿真

为了验证上述频偏校正算法的性能, 我们采用码长为 1 024, 度序列为  $\lambda(x) = 0.27684x + 0.28342x^2 + 0.43974x^3$  和  $\rho(x) = 0.01568x^5 + 0.85244x^6 + 0.13188x^7$ , 码率为 1/2 的非规则 LDPC 码进行计算机数值仿真。和积译码算法的最多迭代次数为 50, 每个信噪比下的统计分组为 10 000。

#### 3.1 频偏修正 LDPC 译码算法性能仿真域与分析

随机抽取两样值码组的长度为 100, 间隔为 200, 每码元周期的相位偏移为 0.006 rad, 则频偏修正的 LDPC 码译码算法仿真, 精确同步的 LDPC 译码算法仿真和频偏未修正的 LDPC 码译码算法仿真见图 3。

由图 3 可以看出: ① 频率偏移使得译码器译码失败, 原因是随着抽样时间的推移, 码元的相位偏移量不断增加, 当相位偏移量大于  $(2k-1)\pi$  小于  $2k\pi$  时, 码元硬判决失败, 其中  $k$  为整数; ② 用 Cordic 算法进行频偏估计和频偏修正的译码算法性能接近于精确同步下的性能; 原因是当迭代次数超过 7 次, 角度就精确到  $10^{-3}$ 。

#### 3.2 不同频偏量下频偏修正的 LDPC 码译码算法性能比较

由图 4 可以看出, 0.012 rad/T 频偏量曲线性能好于 0.006 rad/T 频偏量曲线, 其中  $T$  为码元周期。原因是第 1 次用 Cordic 算法求 2 码组的对应码元的相偏时, 频偏为 0.012 rad/T 的对应相偏较大, 在采用同一精度的 Cordic 算法下, 相对误差较小; 第 2 次采用 Cordic 算法修正各个符号的相偏时, 频偏量大的一组码字对应码元的相偏较大, 都采用同一算法的前提下, 绝对误差一致, 相对误差较小。

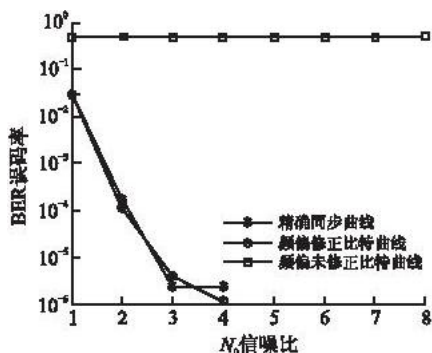


图3 译码算法性能图

Fig. 3 The performance of the decoding algorithm

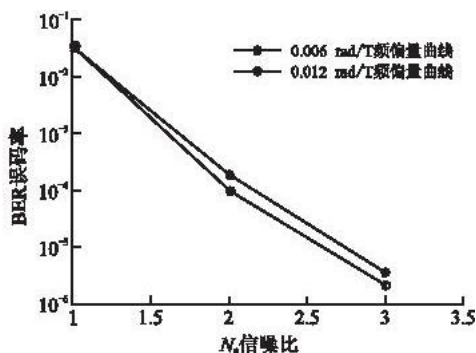


图4 频偏因素仿真图

Fig. 4 The simulation of the frequency warp

## 4 结束语

在通信系统中,当接收机采用相干检测或同步几条等方式接受信号时,接收端需要提供一个与发送信号同频同相的相干载波,对接受信号进行降频处理。当接收机的本振信号的频率与发送信号的载波频率不相等时,会产生频偏,致使接受信号的幅度衰减和相位偏移,译码失败。本文利用 Cordic 算法通过迭代移位和相加等操作精确逼近真实角度的特点,首先在一帧数据内选取 2 个长度相等,间隔较大的码组进行相关运算,产生一个由频率和码组间隔决定的角度,然后用 Cordic 算法求解此角度,确定频偏,最后再次用 Cordic 算法修正各个符号由频偏引起的相偏。由于 Cordic 算法只需简单移位和加法即可完成,所以便于硬件实现,同时,Cordic 算法在求解角度的精确性保证了该译码算法能过逼近精确同步的情况。

该算法是在复数域的环境下进行运算,如何将该算法建立在实数域有待进一步研究。

### 参考文献:

- [1] Gallager R G. Low density parity check codes. cambridge[M]. MA:MIT press,1963.
- [2] CHUNG S Y, PORNEY G D, RICHARDSOD T J, et al. On the design of low - density parity - check codes within 0.004 5 dB of the Shannon limit[J]. IEEE communication letter,2001,5(2):58 - 60.
- [3] 李铮. 基于 PN 序列的 OFDM 同步算法及 VLSI 实现研究[D]. 上海:复旦大学,2006.  
LI Zheng. OFDM Synchronization algorithm based on PN sequence and VLSI Implement study[D]. Shanghai: Fudan university, 2006. (in Chinese)
- [4] 何志斌. OFDM 同步算法及其仿真[D]. 北京:北京邮电大学,2006.  
HE Zhibing. OFDM synchronization algorithm and its simulation[D]. Beijing:Beijing post & telecommunication university,2006. (in Chinese).
- [5] 徐光辉,程东旭. 基于 FPGA 的嵌入式开发与应用[M]. 北京:电子工业出版社,2006.  
XU Guanghui, CHENG Dongxu. The embedded exploitation and application based on FPGA[M]. Beijing:Publishing house of electronics industry,2006. (in Chinese)
- [6] Seho Myung, Kyeongcheol. Lifting methods for quasi - cyclic LDPC codes[J]. IEEE commun lett, 2006,10(6):489 - 491.
- [7] Kelley Christine A, Sridhara Deepak, Rosenthal Joachim. Tree - based construction of LDPC codes having good pseudo - code-word weights[J]. IEEE trans inform theory,2007,53(4):1460 - 1478.
- [8] 马林华. 误码环境下的视频信源信道编码理论与技术研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2006.  
MA Linhua. Study on the source and channel coding theory and techniques of video communication in error - prone environments [D]. Xi'an:Xidian university,2006. (in Chinese)

(编辑:徐楠楠)

## Carrier Synchronization Method Based on Cordic Algorithm

LI Xiao - bei<sup>1</sup>, YANG Xue - bing<sup>2</sup>, JIANG Hua<sup>1</sup>, SUN Lu<sup>1</sup>, PU Hao<sup>1</sup>, HUANG Tao<sup>1</sup>, LÜ Chen<sup>3</sup>

(1. Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China; 2. Unit 94170, Xi'an 710082, China; 3. Unit 93897, Xi'an 710077, China)

**Abstract:** In communication system, frequency warp is often caused by the coherent detection or the synchronous demodulation. Because in one frame the sample time of each code is different from that of other codes, the phase error of the demodulated code and the decoding error would become larger and larger as time goes on. A carrier synchronization method, in which the Cordic algorithm and the efficacious LDPC decoding performance are adopted, is presented to solve the frequency warp. According to this algorithm, the frequency warp is figured out by using the Cordic algorithm, and then the phase error caused by the frequency warp in each receiving code is modified by using the Cordic algorithm again. Finally, the modified code is delivered to the decoder based on the LDPC decoding algorithm. Simulation results show that by using this method not only the multiplicative manipulation is substituted for the shift manipulation, but also the algorithm's performance is approaching to the precise synchronous performance.

**Key words:** lowdensity parity - check codes; the Cordic algorithm; belief propagation; carrier synchronization