求解最优控制问题的微分变换方法

李炳杰, 张国华, 吕 园
(空军工程大学理学院,陕西 西安 710051)

摘要 针对无约束最优控制问题,建立求其近似解析解的微分变换法。对哈密顿正则方程组中状态方程、协态方程和控制方程构造基于初值的微分变换形式或基于终端的微分变换形式,将最优性条件化为相应的代数方程,得到最优控制问题的近似解析解。在特定条件下,对结构复杂的非线性最优控制问题,依据插值逼近原理,结合微分变换法,可构建离散型代数方程组得到其近似解析解。利用微分变换法将微分方程初边值问题和泛函优化问题构成的复杂系统化为易于求解的代数方程形式,简单可行,易于实现。最后,通过算例验证方法的有效性。

关键词 最优控制;极大值原理;微分变换法

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2011.01.020

中图分类号 O232 **文献标识码** A **文章编号** 1009-3516(2011)01-0090-05

微分变换法已广泛应用于求解常微分方程和偏微分方程初边值问题[1-4]。微分变换法能有效的得到微分方程的近似解,甚至是解析解。一般而言,微分变换法针对初值问题或初边值问题比较有效,特别对求解高阶线性微分方程最有效。对一般的最优控制问题,在一定条件下,通过庞特里亚金最大值原理可得到最优控制问题的最优性条件[5-6],利用最优性条件可得到局部最优解或全局最优解。尽管微分变换法已广泛应用于求解微分方程问题或微分方程组[7-8],但利用微分变换法求解最优控制问题的方法,还未见公开发表的文献,本文试图将微分变换法应用于求解最优控制问题。我们发现,利用微分变换法求解最优控制问题时由于最优性方程组包含初值条件和末值条件,在终端状态自由时给微分变换法的实施带来困难,但可利用状态方程和伴随方程的不同微分变换形式克服这一困难。然而,如果最优控制问题是复杂的非线性形式,直接利用常规微分变换法无法得到近似解析解。目前对于非线性情形的微分变换法都是针对特殊情形构造特殊方法[1,9],例如,文献[1]针对具有奇异初边值条件的Lane-Emden方程提出了微分变换法,文献[9]针对Klein-Gordon方程提出了基于差分法的微分变换法,受上述文献以及最优逼近理论和多项式插值逼近思想的启发,我们提出微分变换法的离散代数方程格式,在特定条件下,这种离散格式对求解非线性最优控制的近似解析解仍然有效。

1 微分变换法

定义1 设函数$f(x)$的定义域为D,令$x=x_0$为D中的任意一点,函数$f(x)$的k阶导数在x_0处的微分变换为:

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x=x_0} \tag{1}$$

式中:$f(x)$是原函数;$F(k)$是变换后的函数。

定义2 微分变换$F(k)$的逆变换定义如下:

* **收稿日期**:2010-05-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60871027)
作者简介:李炳杰(1963-),男,甘肃会宁人,教授,主要从事最优控制数值算法研究.E-mail:kgdzgh@163.com

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F(k) \tag{2}$$

综合定义 1 和定义 2 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \tag{3}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F(k) \tag{4}$$

对充分大的 N,可忽略截断项 $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0}$。

微分变换法具有一些固有的基本性质[3],利用这些性质,可将微分方程化为代数方程,进一步得到问题的近似解,甚至解析解。

2　无约束最优控制问题的微分变换法

考虑无约束最优控制系统,其状态方程为:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是状态变量,记为 $x \in R^n$;$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t)]^{\mathrm{T}}$ 是控制变量,$t \in [t_0, t_f]$。设波尔扎(Bolza)型性能指标为:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}(t)) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{L}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \mathrm{d}t \tag{6}$$

求控制函数 $\boldsymbol{u}(t)$ 使得性能指标达到极小。假设 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{L}$ 关于各分量连续可微,引入协态(或共态)向量函数 $\lambda(t)$,定义哈密顿(Hamilton)函数为:

$$\boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \lambda(t)) = -\boldsymbol{L}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) + \lambda^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \tag{7}$$

原问题可归结为求解未知函数 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \lambda(t)$ 的哈密顿正则方程:

$$\begin{cases} \lambda'(t) = -\partial \boldsymbol{H} / \partial x & \lambda(t_f) = -\partial \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) / \partial x \\ \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) & \boldsymbol{x}(t_0) = x_0 \\ \partial \boldsymbol{H} / \partial u = 0 & \end{cases} \tag{8}$$

通过求解(8)得到最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和最优轨线 $\boldsymbol{x}^*(t)$,一般情况下求解最优性系统(8)是比较困难的或烦琐的。下面介绍求其数值解的微分变换法。

根据微分变换法,对最优性方程组式(8)实施微分变换,设 $\partial \boldsymbol{H} / \partial \boldsymbol{u}(t) = q(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \lambda(t)) = 0$,$\lambda'(t) = -\partial \boldsymbol{H} / \partial x(t) = g(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \lambda(t))$,$\lambda(t_f) = -\partial \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) / \partial x(t) = \widetilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)$,构造状态函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 的基于初值的微分变换:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{k=0}^{N} (t - t_0)^k \boldsymbol{X}(k) \tag{9}$$

以及协态函数 $\lambda(t)$ 的基于终端的微分变换:

$$\tilde{\lambda}(t) = \sum_{k=0}^{N} (t - t_f)^k \Lambda(k) \tag{10}$$

式中:

$$\boldsymbol{X}(k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^{(k)} \boldsymbol{x}(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_0} \tag{11}$$

$$\Lambda(k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^{(k)} \lambda(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_f} \tag{12}$$

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \sum_{k=0}^{N} (t - t_0)^k \boldsymbol{U}(k) \tag{13}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}'(t) = \sum_{k=1}^{N+1} k (t - t_0)^{k-1} \boldsymbol{X}(k) \tag{14}$$

$$\tilde{\lambda}'(t) = \sum_{k=1}^{N+1} k (t - t_f)^{k-1} \Lambda(k) \tag{15}$$

将式(9)-(15)代入最优性方程组(8)得近似最优性方程组:

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{N+1}k(t-t_0)^{k-1}\boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{f}\left(\sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),t\right)\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{x}_0\\ \sum_{k=1}^{N+1}k(t-t_f)^{k-1}\Lambda(k)=\boldsymbol{g}\left(\sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t-t_f)^k\Lambda(k),\ t\right)\\ \Lambda(0)=\widetilde{\boldsymbol{K}}\left(\sum_{k=0}^{N}(t_f-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ t_f\right)\\ \boldsymbol{q}\left(\sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t-t_f)^k\Lambda(k),\ t\right)=0\end{cases}\tag{16}$$

要求得最优控制问题的近似最优解,只需通过式(16)确定出$\boldsymbol{X}(k)$、$\Lambda(k)$、$\boldsymbol{U}(k)$等即可。如果泛函$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{q}$, $\widetilde{\boldsymbol{K}}$等关于$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\lambda(t)$是线性的或多项式形式,可通过常规微分变换法比较(16)式中t的各次幂系数确定出$\boldsymbol{X}(k)$、$\Lambda(k)$、$\boldsymbol{U}(k)$的代数方程组,解此代数方程组,并回代(9)、(10)和(13),可得到状态函数、协态函数、控制函数的近似解表达式(N次截断式)。N值越大,精确程度越高。如果泛函$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{q}$, $\widetilde{\boldsymbol{K}}$等关于$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\lambda(t)$是非线性的(不包括多项式形式),则常规微分变换法不可直接使用,目前对于非线性情形的微分变换法都是针对特殊情形构造特殊方法[1, 9-10],并无一般结论。本文试图针对一般情形的非线性问题,提出微分变换法。

从式(16)可以看出,需要待定的微分变换系数$\boldsymbol{X}(k)$、$\Lambda(k)$、$\boldsymbol{U}(k)$共有$n(2N+2)+r(N+1)$个,为获得这些系数,将时间区域$[t_0,t_f]$划分为$N+2$个子区域(一般等分即可),节点为$t_0,t_1,\cdots,t_{N+1},t_f$,将中间节点$t_1,t_2,\cdots,t_{N+1}$代入式(16)得到如下代数方程组:

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{N+1}k(t_j-t_0)^{k-1}\boldsymbol{X}(k)=\boldsymbol{f}\left(\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),t_j\right)\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{x}_0\\ \sum_{k=1}^{N+1}k(t_j-t_f)^{k-1}\Lambda(k)=\boldsymbol{g}\left(\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t_j-t_f)^k\Lambda(k),\ t_j\right)\\ \Lambda(0)=\widetilde{K}\left(\sum_{k=0}^{N}(t_f-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ t_f\right)\\ \boldsymbol{q}\left(\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{X}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\boldsymbol{U}(k),\ \sum_{k=0}^{N}(t_j-t_f)^k\Lambda(k),\ t_j\right)=0\\ j=1,2,\cdots,N+1\end{cases}\tag{17}$$

求解式17)可得到$\boldsymbol{X}(k)$、$\Lambda(k)$、$\boldsymbol{U}(k)$。

定理1 若最优控制问题中,函数$\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{K}$关于各分量的一阶偏导数连续,近似最优性方程组(16)的解唯一,则代数方程组(17)的解与近似最优性方程组(16)的解等价。

证明 为方便起见,不妨设最优控制问题中$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)\in R^1$。$\forall\ t\in[t_0,t_f]$,式(16)的解$\boldsymbol{X}(k)$、$\Lambda(k)$、$\boldsymbol{U}(k)$也是式(17)的解是显然的。

设$\bar{\boldsymbol{X}}(k)$、$\bar{\Lambda}(k)$、$\bar{\boldsymbol{U}}(k)$是代数方程组式(17)的解,令$\bar{\boldsymbol{x}}_j=\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\bar{\boldsymbol{X}}(k)$,$\bar{\lambda}_j=\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_f)^k\bar{\Lambda}(k)$,$\bar{\boldsymbol{u}}_j=\sum_{k=0}^{N}(t_j-t_0)^k\bar{\boldsymbol{U}}(k)$,$j=0,1,\cdots,N$,分别以$(t_j,\bar{\boldsymbol{x}}_j)$,$(t_j,\bar{\lambda}_j)$,$(t_j,\bar{\boldsymbol{u}}_j)$为节点作 Lagrange 插值函数,由于不大于$N$次的多项式的$N$次 Lagrange 插值函数就是其自身,因此可得相应的插值函数分别为$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\bar{\boldsymbol{X}}(k)$,$\bar{\lambda}(t)=\sum_{k=0}^{N}(t-t_f)^k\bar{\Lambda}(k)$,$\bar{\boldsymbol{u}}(t)=\sum_{k=0}^{N}(t-t_0)^k\bar{\boldsymbol{U}}(k)$。

由于函数$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{K}$关于各分量的一阶偏导数连续,故函数$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\widetilde{\boldsymbol{K}}$, $\boldsymbol{q}$等关于各分量连续,$\bar{\boldsymbol{x}}_j$,$\bar{\lambda}_j$,$\bar{\boldsymbol{u}}_j$,$j=0,1,\cdots,N$,满足近似最优性方程组(16)。由式(16)解的唯一性以及 Lagrange 插值函数的惟一性,显然$\bar{\boldsymbol{x}}(t)$,$\bar{\lambda}(t)$,$\bar{\boldsymbol{u}}(t)$满足近似最优性方程组(16)。

注1:对$\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)$, $\lambda(t)$使用基于同一点(初始点或终端)的微分变换也可,只不过式(16)的形式需

做相应的改变。该方法容易推广到约束型问题的数值求解中，并且不必引入协态函数。

注 2：如果最优控制问题的解或近似最优性方程组(16)的解不惟一，对非线性情形，利用代数方程组(17)得到的微分变换系数不一定满足式(16)，即其近似解不一定是原最优控制问题的近似解，这也是利用微分变换法处理非线性最优控制问题的缺陷之一。

3　数值例子

考虑无约束最优控制问题：

$$x'(t) = -x(t) + u(t),\quad x(0) = 1; J(u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)\,\mathrm{d}t$$

构造哈密顿函数：$H(t,x,u,\lambda) = -1/2(x^2 + u^2) + \lambda(t)(-x+u)$，运用极大值原理得到方程组如下：$\lambda'(t) = x + \lambda,\ \lambda(1) = 0, x'(t) = -x + \lambda,\ x(0) = 1, \partial \boldsymbol{H}/\partial u = -u + \lambda = 0$。

方程组的解析解为 $u(t) = \lambda(t)$，其中：$x(t) = [(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} + (1+\sqrt{2})e^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}t}]/[(\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1]$，$\lambda(t) = [e^{\sqrt{2}t} - e^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}t}]/[(\sqrt{2}+1)e^{2\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1]$。

运用 $x(t)$，$\lambda(t)$ 的基于初始点微分变换法，可将问题归结为(16)式的形式：$\begin{cases}(k+1)\Lambda(k+1) = X(k) + \Lambda(k)\\(k+1)X(k+1) = -X(k) + \Lambda(k)\end{cases}$。此处取 $N=8$，把 $x(0)=1$，$\lambda(1)=0$ 代入得到微分变换系数(精度为 10^{-4})见表 1。

表 1　微分变换系数 $X(k)$ 和 $\Lambda(k)$

Tab. 1　The DTM coefficient $X(k)$ and $\Lambda(k)$

序号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$X(k)$	1	−1.385 8	1	−0.461 9	0.366 7	−0.046 2	0.011 1	−0.002 2	0.000 4	0
$\Lambda(k)$	−0.385 8	0.614 2	−0.385 8	0.204 7	−0.064 3	0.020 5	−0.004 3	0.000 9	0.000 1	0

$$\tilde{x}(t) = 1 - 1.385\,8t + t^2 - 0.461\,9t^3 + 0.366\,7t^4 - 0.046\,2t^5 + 0.011\,1t^6 - 0.002\,2t^7 + 0.000\,4t^8$$

$$\tilde{\lambda}(t) = -0.385\,8 + 0.614\,2t - 0.385\,8t^2 + 0.204\,7t^3 - 0.064\,3t^4 + 0.020\,5t^5 - 0.004\,3t^6 + 0.000\,9t^7 - 0.000\,153t^8$$

将状态函数和协态函数(这里也是控制函数)的解析解和近似解分别在同一坐标系中，见图 1－2。

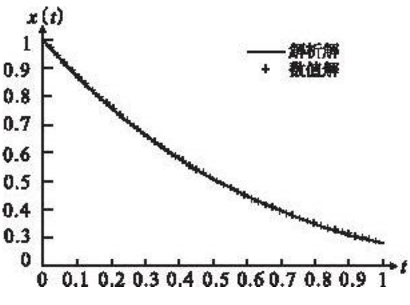

图 1　状态函数的近似解与解析解

Fig. 1　The analytic and numerical solution of state function

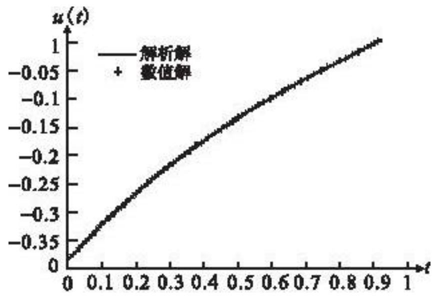

图 2　控制函数的近似解与解析解

Fig. 2　The analytic and numerical solution of state function

从图中可以看出，解析解和近似解之间的误差非常小，本例中，当 N 趋向于无穷大时，其近似解趋于解析解。如果将问题归结为式(17)的形式，也可得到类似结果。

4　结束语

本文研究了利用微分变换法求最优控制问题近似解析解的方法，对线性问题或线性二次(LQ)问题可利用常规微分变换法得到开环控制的近似解析解，逼近效果非常理想。对形式不太复杂的非线性问题也可利用常规微分变换法得到近似解析解，逼近效果理想。对形式较复杂的非线性问题，在特定条件下，可通过微

分变换法的离散形式得到逼近效果理想的近似解析解。运用微分变换法可方便快捷地求解最优控制问题,随着逼近次幂的增大,误差越来越小。但需强调指出,对形式很复杂的非线性情形,或控制受约束的最优控制问题(例如开关控制,特别是多开关问题),运用微分变换法效果并不理想,要么求解困难,要么误差较大。这也是微分变换法的缺陷之一。事实上,微分变换法对高阶线性问题最有效,如何将微分变换法更好地运用于求解一般的非线性控制问题中,还有待进一步研究。

参考文献:

[1] Vedatu Suatu Hrturk. Differential transformation method for solving differential equation of lane – emden type [J]. Mathematical and computational applications, 2007,12 (3): 135 – 139.

[2] Vedat Suat Erturk. Application of differential transformation method to linear sixth – order boundary value problems [J]. Applied mathematical sciences, 2007, 1 (2): 51 – 58.

[3] Jafar Husni Ahmad. Efficiency of differential transformation method for ggnesio system [J]. Journal of mathematics and statistics, 2009, 5 (2): 93 – 96.

[4] Patrcio M F, Rosa P M. The differential transform method for advection – diffusion problems[J]. World academy of science, engineering and technology, 2007,33: 218 – 222.

[5] 王朝珠,秦化淑. 最优控制理论[M]. 北京:科学出版社,2003.
WANG chaozhu, QIN huashu. Optimal control theory[M]. Beijing:Science press,2003. (in Chinese)

[6] 张洪钺,王青. 最优控制理论与应用[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
ZHANG Hongyue, WANG Qing. Optimal control theory and application[M]. Beijing:High education press,2006. (in Chinese)

[7] Chen C L, Liu Y C. Solution of two – point boundary – value problems vsing the differential transformation method [J]. Journal of optimizationand applications, 1998, 99 (1): 23 – 35.

[8] Aytac Arikoglo, Lbranim Ozkol. Solution of difference equation by using differential transform method [J]. Applied mathematics and computation, 2006,174(2):1216 – 1228.

[9] Attilio Maccari. Solitons trapping for the nonlinear klein – gordon equation with an external excitation chaos[J]. Solitons and fractals, 2003, 17: 145 – 154.

[10] Vedat Suat Erturk. Shaher Momani. Differential transform technique for solving fifth order boundary value problems [J]. Mathematical and computational applications, 2008, 13(2): 113 – 121.

(编辑:田新华)

The Differential Transform Method for Solving Optimal Control Problems

LI Bing – jie, ZHANG Guo – hua, LÜ Yuan
(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi′an 710051, China)

Abstract: The differential transform method used for solving the approximation analytic solution of the unconstrained optimal control problem is established. According to the state equation, costate equation and governing equation in the set of Hamilton regular equations, we first construct the differential transform form based on initial value or terminal station, by which the optimality condition is transformed into a corresponding algebraic equation, furthermore, the approximation analytic solution of the optimal control problem is obtained. In addition, to the nonlinear optimal control problem which is complex in structure, in particular condition, the discreteness set of algebraic equations can be constructed in light of the principle of approximation by interpolation and the differential transform method to obtain its approximation analytic solution. By using this method, the initial – boundary value problem of the differential equation and the complex system of the functional optimization problems are converted into algebraic equations which facilitate getting the solution, also are simple, feasible and easy to realize. Finally, the effectiveness of this method is verified by numerical examples.

Key words: optimal control; maximum principle; differential transform method