

# 一种改进的多进制 LDPC 码的译码算法

吴晓丽, 孟 涛, 李 云, 王晓玉

(空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

**摘 要:**提出了一种多进制 LDPC 码基于 EMS 的改进算法,从译码效率的角度分析计算复杂度。利用变量节点的可靠程度随迭代次数的增加而增加的特点,采用每个变量节点的非法校验值结合变量节点的最大伪后验概率来判断变量节点的可靠性,通过判断准则让一部分节点提前终止迭代,减少迭代过程中不必要的校验节点和变量节点的更新,从而降低复杂度,提高译码效率。对该算法在加性高斯白噪声信道,基于 GF(4)有限域,码率 0.5 的规则 LDPC 码(8 192,3,6)进行了仿真,结果显示:改进的 EMS 译码算法相对传统的 EMS 译码算法,在误码性能上的损失极小(当误码率  $10^{-4}$  时,信噪比损失大约 0.05 dB),而且随着信道条件的改善,这种损失进一步减少,但计算复杂度大大降低,译码效率大大提高。

**关键词:**多进制 LDPC 码;EMS 译码算法;译码效率;计算复杂度

**DOI:**10.3969/j.issn.1009-3516.2010.04.015

**中图分类号:** TN911.22    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2010)04-0073-05

低密度校验码(Low-density Parity Check Codes, LDPC Codes)<sup>[1]</sup>以接近香农限的性能、较小的平底效应和较低的译码复杂度正在被广泛应用。研究发现,在同样的码长和码率下,非二进制 LDPC 码的纠错性能优于二进制 LDPC 码<sup>[2-5]</sup>,尤其是在突发信道,非二进制 LDPC 码纠错的能力甚至优于采用软判决译码的 RS 码的性能<sup>[6]</sup>,而且,与二进制码相比,非二进制 LDPC 码更适合于高阶调制<sup>[7-9]</sup>。但非二进制 LDPC 高的译码复杂度大大限制了它的应用范围,要能够实际应用,就必须降低其译码复杂度。已经有多种方法,包括最小和算法 Mini-Sum, MS)<sup>[10]</sup>、扩展的最小和算法(Expanded Mini-Sum, EMS)<sup>[11-12]</sup>,但这些算法都是基于每一个变量节点和校验节点所做的近似计算,而每一次迭代计算都要计算每一个变量节点和校验节点的每一个数值,实际上,随着迭代次数的增加,大部分变量节点和校验节点的值都已经接近实际值,不需要再计算了。因此,借助于二进制 LDPC 码的改进算法<sup>[13]</sup>,本文提出了一种非二进制 LDPC 码基于 EMS 的改进算法,利用变量节点的可靠程度随迭代次数的增加而增加的特点,采用每个变量节点的非法校验值结合变量节点的最大伪后验概率来判断变量节点的可靠性,通过判断准则让一部分节点提前终止迭代,减少迭代过程中不必要的校验节点和变量节点的更新,从而降低复杂度,提高译码效率。

## 1 EMS 的改进算法

EMS 算法的基本思想是对计算的  $q$  值改为计算  $n_m$  值( $n_m \leq q$ ),虽然降低了复杂度,但在每一次的迭代中,都要计算全部的变量节点和校验节点的  $n_m$  个信息值,文献研究发现<sup>[13]</sup>,对于二进制 LDPC 码的 BP 译码算法而言,随着迭代次数的增加,每次迭代过程中纠正的比特数越来越少,但每次迭代都需要计算每一个比特。实际上,对于多进制 LDPC 码也存在同样的情况,每次迭代过程中纠正的符号数越来越少,但每次迭代都需要每一个符号。

\* 收稿日期:2010-01-22

作者简介:吴晓丽(1964-),女,陕西铜川人,副教授,博士,主要从事信道编码技术研究。

E-mail:wuli88992001@sohu.com

定义译码效率为:  $\eta = S_l / C_{Nu}$  (1)

式中:  $S_l$  为第  $l$  次迭代所纠正的符号数;  $C_{Nu}$  为总的计算量。

从图 1 可以看出, 只有前 4 次迭代纠正的符号数超过了符号数的 15%, 其他次迭代纠正的符号数有的甚至不超过 1%, 但每次计算量却完全相同, 这样, 随着迭代次数的增加, 译码效率会越来越低。借助于二进制 LDPC 码的改进算法, 我们将该算法扩展到多进制 LDPC 码, 采用每个变量节点的非合法校验值结合变量节点的最大伪后验概率来判断变量节点的可靠性, 通过判断准则让一部分节点提前终止迭代, 减少迭代过程中不必要的校验节点和变量节点的更新, 从而降低复杂度, 提高译码效率。

### 1.1 基本原理

对于一个码长为  $N$ , 信息位长为  $K$  的多进制 LDPC 码来说, 校验方程的个数为  $M = N - K$ , 则译码输出的每一个码字  $c = (c_0, c_0, \dots, c_{N-1})$ , 满足:

$$h_{m,0}c_0 + h_{m,1}c_1 + \dots + h_{m,N-1}c_{N-1} = 0, \quad m = (0, 1, \dots, M-1) \quad (2)$$

式中  $h_{m,n}$  为多进制 LDPC 码的校验矩阵  $\mathbf{H}_{M \times N}$  中第  $m$  行, 第  $n$  列的元素,  $h_{m,n} \in \text{GF}(q)$ 。

假设规则 LDPC 码的度分布为  $\lambda(x) = x^{j-1}$ ,  $\rho(x) = x^{k-1}$ , 则存在  $N_j/k$  个校验集合, 每个校验集合由  $k$  个符号组成, 每个符号属于  $j$  个校验集合。若一个校验集合中的  $k$  个符号满足:

$$(\mathbf{H}_{M \times N} \cdot t) \pmod q = 0 \quad (3)$$

则称  $t$  为一个合法码字。

设信道模型为加性高斯白噪声信道, 编码器编的码字为  $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]$ , 则在接收端, 接收信息  $y = c + n$ ,  $n$  表示加性噪声, 对  $y$  作如下运算:

$$(\mathbf{H} \cdot y) \pmod q = \mathbf{H} \cdot (c + n) \pmod q = (\mathbf{H} \cdot c + \mathbf{H} \cdot n) \pmod q = [\mathbf{H} \cdot n] \pmod q \quad (4)$$

记  $[\mathbf{H} \cdot n] \pmod q = \psi$ , 则向量  $\psi$  为非合法校验。

### 1.2 参数计算

#### 1.2.1 计算每一次迭代的非法校验值 $\Xi$

$$\Xi^T = [(\mathbf{H} \cdot y)^T \pmod q \cdot \mathbf{H}] \pmod q = (\psi^T \cdot \mathbf{H}) \pmod q \quad (5)$$

式中向量  $\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_N)$  的每一个分量对应每一个变量节点的非法校验值。

#### 1.2.2 伪后验概率提供的符号可靠信息

在获取了每一个变量节点的非法校验值后, 译码器可以根据非法校验值来判断变量节点的可靠程度, 可以认为  $\Xi_k (k = 1, 2, \dots, N)$  为 0 的变量节点可靠程度比较高。然而, 仅仅  $\Xi_k$  为 0 并不能保证第  $k$  个变量节点的绝对可靠, 由于与  $k$  连接的校验点, 以及相邻的变量节点的可靠性不能得到保证, 在 EMS 译码算法中, 每次变量节点更新后都要计算  $q$  个伪后验概率  $Q_n^a$ 。

令  $S^a(k)$  表示接收到的伪后验概率提供的第  $k$  个变量节点可靠性信息, 则对于多进制 LDPC 码而言,  $S^a(k)$  定义如下:

$$S^a(k) = \min_{a_s \in \text{GF}(q)} |Q_k^a - Q_k^{a_s}|, \quad a_s = (0, 1, \dots, q-1) \quad (6)$$

当  $\Xi_k = 0$ , 且  $S^a(k)$  取值最小时, 认为变量点  $k$  取值为  $a$  的可靠程度比较高。

### 1.3 改进 EMS 算法的实现步骤

记每一次不需要迭代的变量点的集合为  $\Phi$ 。

步骤 1 初始化:  $f_n^a = \ln \frac{p(x_n = a/y_n)}{p(x_n = 0/y_n)}$ ,  $Q_{n,m}^a(x_n) = f_n^a(x_n)$ ,  $R_{n,m}^a(x_n) = 0$ ,  $\Phi = \emptyset$

步骤 2 计算每一个变量节点的非法校验值  $\Xi$ :

$$\Xi^T = [(\mathbf{H} \cdot y)^T \pmod q \cdot \mathbf{H}] \pmod q = (\psi^T \cdot \mathbf{H}) \pmod q$$

步骤 3 校验点更新:  $R_{m,n}^a = \prod_{n' \in N(m) \setminus n} \text{sign}[Q_{n',m}^a(x_{n'})] \cdot \min_{n' \in N(m) \setminus n} (|Q_{n',m}^a(x_{n'})|)$

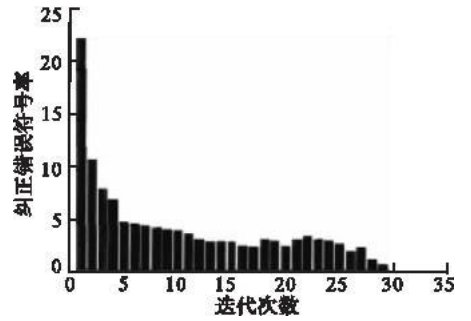


图 1 EMS 算法每一次迭代所纠正的错误符号的百分比

Fig. 1 Percent of correcting error in every iterative by EMS algorithm

步骤 4 更新变量节点:  $Q_n^a(x_n) = f_{n,m}^a(x_n) + \sum_{m \in M(n)} R_{m,n}^a(x_n)$

步骤 5 更新伪后验概率:  $Q_n^a = \arg \max_a Q_n^a(x_n)$

步骤 6 计算接收到的变量节点  $k$  的后验概率提供的可靠性信息:  $S^a(k) = \min_{a_s \in GF(q)} |Q_k^a - Q_k^{a_s}|, a_s = (0, 1, \dots, q - 1)$

步骤 7 记录下次迭代过程中不需要更新的变量点  $k$  满足  $\Xi_k = 0, S^a(k) < \delta$  ( $\delta$  为给定的一个小的数值), 则把  $k$  加入集合  $\Phi$ 。

步骤 8 符号判决:  $\hat{x}_n = \arg \max_a Q_n^a(x_n), n = (1, 2, \dots, N)$ 。

若  $\mathbf{H}^T \hat{x} = 0$  或者迭代次数到达预设的迭代次数, 则结束,  $\hat{x} = \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{N-1}$  作为译码输出; 否则转步骤 2 继续迭代。

## 2 算法的性能仿真

### 2.1 误码率

图 2 为改进的 EMS 算法和 EMS 算法的性能仿真图, 仿真参数采用基于 GF(4) 有限域, 码率 0.5 的规则 LDPC 码(8 192, 3, 6), 信道模型为高斯白噪声。从图 2 可以看到改进的 EMS 译码算法相对传统的 EMS 译码算法, 在误码性能上的损失极小(当误码率  $10^{-4}$  时, 信噪比损失大约 0.05 dB), 而且随着信道条件的改善, 这种损失进一步减少。这是因为, 随着信道环境的改善在每次迭代过程中伪后验概率的准确性加强。

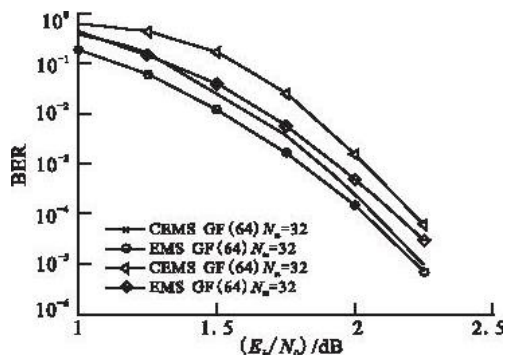


图 2 改进的 EMS 算法和 EMS 算法的性能比较  
ig. 2 Comparison between Updating EMS and EMS algorithm

### 2.2 计算复杂度

采用基于 GF(4) 有限域, 码率 0.5 的规则 LDPC 码(8 192, 3, 6), 信道模型为高斯白噪声, 信道信噪比  $E_b/N_0 = 1.2$  dB, 每种译码算法中迭代次数都是 30 次。图 3、图 4 分别给出了传统的 EMS 译码算法和改进 EMS 译码算法每次迭代过程中的计算量比较, 图中的纵坐标为归一化的计算量, 即设每次迭代的计算量为 1。从图中可明显地看出, 随着迭代次数的增加, 改进的 EMS 译码算法在每次迭代中的计算量明显下降。

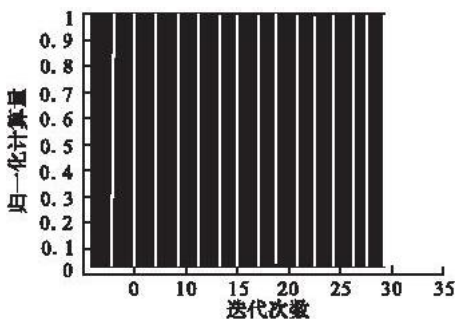


图 3 EMS 算法每次迭代过程中的计算量 ( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

Fig. 3 Calculation number of EMS algorithm in every iterative

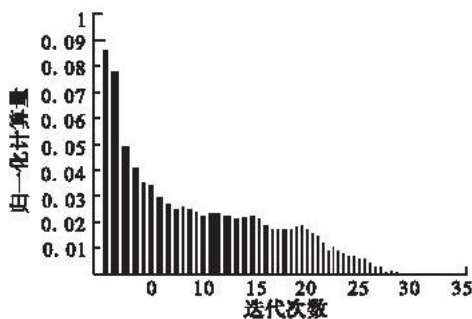


图 4 改进的 EMS 算法每次迭代过程中的计算量 ( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

Fig. 4 Calculation number of updating EMS algorithm in every iterative

图 5、图 6 分别给出了 EMS 译码算法和改进的 EMS 译码算法的译码效率图。图中的纵坐标是每次纠正符号的个数与运算量的比值的归一化值, 即保证总的译码效率为 1。可以看到随着迭代次数的增加, 纠正的错误符号越来越少, 而每次迭代中的计算量完全一样, 因此, 译码效率随着迭代次数的增加而显著下降。改进算法虽然随着迭代次数的增加纠正的符号数越来越少, 但是每次迭代的运算量也同样会随着迭代次数的增加而减少, 而两者比值的下降程度则明显放缓。

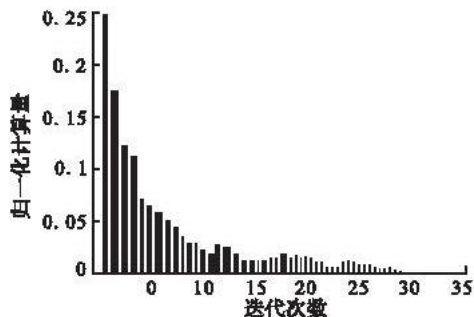


图5 EMS 算法每次迭代过程  
译码效率( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

Fig. 5 Decoding efficiency of EMS  
algorithm in every iterative( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

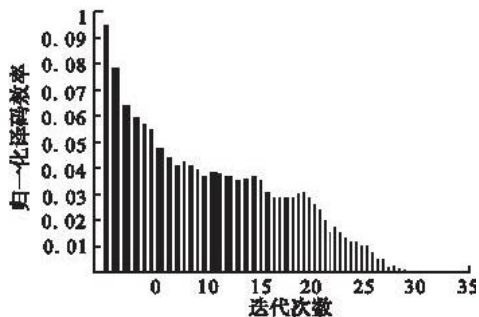


图6 改进的 EMS 算法每次迭代过程  
译码效率( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

Fig. 6 Decoding efficiency of updating EMS  
algorithm in every iterative( $E_b/N_0 = 1.2$  dB)

图7、图8 分别给出了信道信噪比  $E_b/N_0 = 1.8$  dB 时,改进 EMS 译码算法每次迭代过程中的计算量和译码效率。从图中可明显地看出,随着信噪比的增大,改进的 EMS 算法的计算量更小,译码效率更高。是因为信噪比增大,伪后验概率的准确性加强,每个符号的可信度增强,因此可纠正的符号数更少。

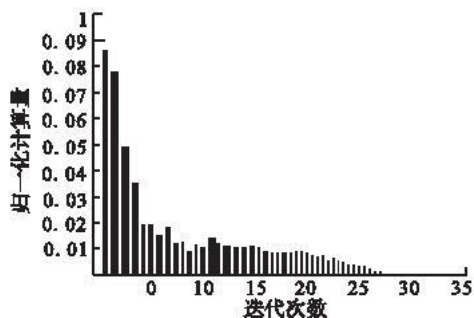


图7 改进的 EMS 算法每次迭代过程中  
的计算量( $E_b/N_0 = 1.8$  dB,  $\delta = 0.1$ )

Fig. 7 Calculation number of updating EMS algorithm  
in every iterative( $E_b/N_0 = 1.8$  dB,  $\delta = 0.1$ )

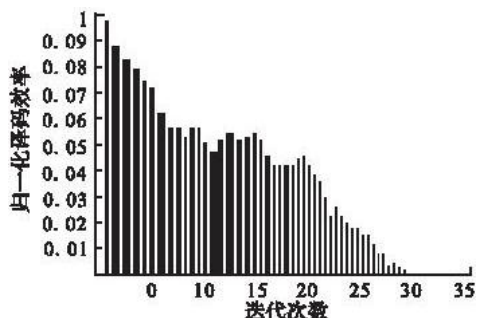


图8 改进的 EMS 算法每次迭代过程  
译码效率( $E_b/N_0 = 1.8$  dB)

Fig. 8 Decoding efficiency of updating EMS  
algorithm in every iterative( $E_b/N_0 = 1.8$  dB)

### 3 结束语

本文提出的 EMS 的改进算法,从计算效率的角度分析译码复杂度,利用变量节点的可靠程度随迭代次数的增加而增加的特点,采用每个变量节点的非法校验值结合变量节点的最大伪后验概率来判断变量节点的可靠性,通过判断准则让一部分节点提前终止迭代,减少迭代过程中不必要的校验节点和变量节点的更新,从而降低了译码复杂度,提高了译码效率,对于非二进制的实用化提供了理论依据。

#### 参考文献:

- [1] Gallager R G. Low - Density Parity - Check Codes[M]. Cambridge MA: MIT Press, 1963.
- [2] Davey D, MacKay D. Low - density Parity Check Codes Over GF (q) [J]. IEEE Communications Letters, 1988, 2(6): 165 - 167.
- [3] Wymeersch H, Steendam H, Moeneclaey M. Computational Complexity and Quantization Effects of Decoding Algorithms for Non - binary LDPC Codes[C]//IEEE International Conference on Speech and Signal Processing. Montreal Canada: IEEE, 2004: 669 - 672.
- [4] David Declercq, Marc Fossorier. Decoding Algorithms for Non binary LDPC Codes over GF(q) [J]. IEEE J Selec Areas in Comm, 2006, 19(4): 1 - 27.
- [5] Rathi V, Urbanke R. Density Evolution, Thresholds and the Stability Condition for Non - binary LDPC codes [J]. IEEE Proc

Commun,2005,152(6):1069-1074.

- [6] Chen J, Wang L, Li Y. Performance Comparison Between Non-binary LDPC Codes and Reed-Solomon Codes over Noise Bursts Channels[C]//Proc ICCAS2005. Hongkong:IEEE Press,2005:1-4.
- [7] Bennatan A, David Burshtein. Design and Analysis of Non-binary LDPC Codes for Arbitrary Discrete-Memoryless Channels[J]. IEEE Trans on Inform Theory,2006,52(2):549-583.
- [8] Bennatan A, Burshtein D. On the Application of LDPC Codes to Arbitrary Discrete-memoryless Channels[J], IEEE Trans Inform Theory,2004,50:417-438.
- [9] Li Ge, Fair Ivan J, Krzymien Witold A. Low-density Parity-Check Codes for Space-Time Wireless Transmission[J], IEEE Transactions on Wireless Communications,2006,5(2):312-322.
- [10] Wymeersch H, Steendam H, Moeneclaey M. Log-domain Decoding of LDPC Codes over  $GF(q)$  [C]//in Proc IEEE Int Conf Communications. Paris, France:IEEE,2004:772-776.
- [11] Fossorier Declercq D. Extended Minsum Algorithm for Decoding LDPC Codes Over  $GF(q)$  [C]//Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Adelaide, SA:IEEE Press,2005:464-468.
- [12] Voicila Adrian, Declercq D, Verdier F, et al. Low Complexity, Low Memory EMS Algorithm for Non-binary LDPC Codes[C]//IEEE International Conference on Communications, ICC'07. Glasgow, UK:IEEE Press,2007:671-676.
- [13] Guo Rui, Liu Jilin. New Low Complexity Belief Propagation Decoding of Low Density Parity Check Codes[J]. Journal of Zhejiang University:Engineering Science,2008,42(3):450-455.

(编辑:徐楠楠)

## An Updating Decoding Algorithm of Non-binary LDPC Codes

WU Xiao-li, MENG Tao, LI Yun, WANG Xiao-yu

(Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

**Abstract:** This paper presents an improved decoding algorithm of non-binary LDPC codes based on the Expanded Min-Sum algorithm, analyzes the complexity of the algorithm in decoding efficiency. According to the fact that the reliability of variable node is increased with the increase of the iterative number, the reliability of the variable nodes is estimated by the maximum post probability of variable nodes and illegal parity-check values. By the estimation rule, the iterative calculations or some variable nodes are stopped, the number of calculation for updating variable and parity-check nodes is reduced, thus the decoding complexity is decreased and the decoding efficiency is improved. A simulation is made using regular non-binary LDPC codes under White Gaussian Noise channel based on  $GF(4)$ , the result shows that the performance decreases by about 0.05 dB when BER (Bit Error Rate) is , but the decoding complexity is reduced and the decoding efficiency is improved significantly.

**Key words:** Non binary LDPC codes; Expanded Min-Sum algorithm; decoding efficiency; complexity