第 11 卷第 3 期 空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版) Vol. 11 No. 3
2010 年 6 月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Jun. 2010

多维二态联合概率分布及信息传输理论

刘进忙[1], 张娅珣[1], 袁修久[2], 花 俊[3]
(1. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800;2. 空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051;3. 中国人民解放军驻 149 厂军代室, 上海 200245)

摘 要:根据只取 2 个值(二态)的 2 个随机变量统计独立与(线性)不相关等价的原理,推导出 2 个随机变量只取 2 个值的联合概率分布的完整表达形式,将其原理推广到多维二态联合概率分布的情况,给出了一个多维描述方法。当给出各边缘分布,可计算出各相关系数的取值范围,再确定联合分布列;经过仿真验证了此方法的有效性。将得到的表示形式应用在数据信道通信的分析中,用信道两端的相关系数来描述输入输出的信息耦合,对信息理论是一个很好的补充。该方法与信息论中的平均互信息、数据处理定理相对应,得到非常美观的公式及非常理想的特性。

关键词:相关系数;联合概率分布;信道矩阵

DOI:10. 3969/j. issn. 1009 -3516. 2010. 03. 018

中图分类号: TP274;O21 **文献标识码**:A **文章编号**:1009 -3516(2010)03 -0080 -04

根据文献[1 -3],在随机变量的数字特征分析中,可用两维随机变量的线性相关系数 r_{XY},或用 2 个随机变量的协方差 cov(X,Y)来描述。只取 2 个值(二态)的 2 个随机变量统计独立与线性不相关等价。而后未做进一步研究。基于这一等价原理,根据文献[4]得到了二维二态联合概率分布列的描述方法,经过仿真验证了此方法的有效性,并推广得到三维、四维二态随机变量联合概率分布列的描述。将这一原理应用于数据通信中的级联信道描述方法,得到了非常好的结论。

1 二维二态随机变量的联合概率密度

定理 1 设随机变量 X 的概率空间为$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$,$p_1+p_2=1, p_1>0, p_2>0$;随机变量 Y 的概率空间为$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$,$q_1+q_2=1, q_1>0, q_2>0$;记 X、Y 之间的(线性)相关系数为 r, $-1\leqslant r\leqslant 1$。

若将 XY 用矩阵$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$表示,行表示随机变量 X 的(按大小顺序)取值,列表示随机变量 Y 的取值(按大小顺序),矩阵元素 f_{ij} 为 $f_{XY}(x_i,y_j)$,其 f_{ij} 的约束关系为:

$$f_{ij}\geqslant 0,\ \sum_{ij}f_{ij}=1,\ \sum_i f_{ij}=q_j,\ \sum_j f_{ij}=p_i,\ i,j=1,2 \tag{1}$$

根据文献[4],

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}(q_1 \quad q_2)+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{cov}(X,Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}(q_1 \quad q_2)+r\sqrt{p_1p_2q_1q_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

收稿日期:2009 -09 -23
基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2010JM8013)
作者简介:刘进忙(1958 -),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要从事信号与信息处理研究.
E -mail:cathyqueencn@ yahoo. com. cn

或: $f_{ij}=p_iq_j+(-1)^{i+j}r\sqrt{p_1p_2q_1q_2}\quad i,j=1,2$ (3)

约束: $-\min\left\{\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{p_2q_2}},\sqrt{\dfrac{p_2q_2}{p_1q_1}}\right\}\leqslant r\leqslant\min\left\{\sqrt{\dfrac{p_1q_2}{p_2q_1}},\sqrt{\dfrac{p_2q_1}{p_1q_2}}\right\}$ (4)

证明思路:设f_{ij},根据相关系数定义解之,其过程略。

推论:根据式(3),当给定2个边缘分布及任一点的概率值,可计算出(线性)相关系数。

由式(4)可知,当任一边缘等概率分布时,r 取值范围正负对称;当两边缘等概率分布时,可取 $|r|\leqslant1$。若有一维边缘概率分布有一值为零时,即二维分布退化为一维分布,只能取 $r=0$。

若给定两边缘分布及任一点的概率值,快速求取(线性)相关系数的方法为:

$$r_{XY}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}/\sqrt{p_1p_2q_1q_2} \tag{5}$$

MATLAB 仿真验证了以上公式的正确性和严密性。

2 三维二态随机变量的联合概率分布列

设 X,Y,Z 各取2个值(二态),且给出边缘分布,需要给出的相关系数的个数为:$2\times2\times2-1-3\times(2-1)=4$,这4个元素为:$r_{XY},r_{XZ},r_{YZ},r_{XYZ}$,可不加证明地给出:

定理2 设二态随机变量 X、Y、Z,各自的边缘分布给定,三维联合分布列为:

$$\begin{aligned}f_{ijk}=&p_iq_js_k+(-1)^{i+j}r_{XY}s_k\sqrt{p_1p_2q_1q_2}+(-1)^{i+k}r_{XZ}q_j\sqrt{p_1p_2s_1s_2}+\\&(-1)^{j+k}r_{YZ}p_i\sqrt{q_1q_2s_1s_2}+(-1)^{i+j+k}r_{XYZ}\sqrt{p_1p_2q_1q_2s_1s_2}\qquad i,j,k=1,2\end{aligned} \tag{6}$$

或: $f_{ijk}=f_{ij\cdot}f_{\cdot\cdot k}+f_{i\cdot k}f_{\cdot j\cdot}+f_{\cdot jk}f_{i\cdot\cdot}-2f_{i\cdot\cdot}f_{\cdot j\cdot}f_{\cdot\cdot k}+(-1)^{i+j+k}r_{XYZ}\sqrt{q_1q_2s_1s_2}\quad i,j,k=1,2$ (7)

式中带点的函数为边缘分布。显然,$r_{XY},r_{XZ},r_{YZ},r_{XYZ}$同时为零,即满足两两不相关($r_{XY},r_{XZ},r_{YZ}=0$)且3个变量不相关($r_{XYZ}=0$)时,3个随机变量独立。但即使两两不相关,也不能保证3个变量间不相关。

当给定3个一维边缘分布列时,计算对 $r_{XY},r_{XZ},r_{YZ},r_{XYZ}$的限制范围,以构成联合分布列。

3 应用信息传输理论

3.1 信道输入输出相关系数极值分析

根据文献[5-6],有$\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar b_1 & b_1\\ b_2 & \bar b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar b'_1 & b'_2\\ b'_1 & \bar b'_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & 0\\ 0 & q_2\end{bmatrix}$成立,设 $\boldsymbol B_{XY}=\begin{bmatrix}\bar b_1 & b_1\\ b_2 & \bar b_2\end{bmatrix}$为二元离散无记忆信道概率传递矩阵;$\bar b_1+b_1=1,\bar b_2+b_2=1$, $b_1,b_2\geqslant0$,满足:$[p_1\quad p_2]\boldsymbol B_{XY}=[q_1\quad q_1]$;设 $\boldsymbol B_{YX}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\bar b'_1 & b'_1\\ b'_2 & \bar b'_2\end{bmatrix}$为反向信道概率传递矩阵。

当$|\boldsymbol B_{XY}|=\bar b_1\bar b_2-b_1b_2=0$ 时,$r_{XY}=0$,信道没有信息传递,即信道前后变量联合统计独立;

$r_{XY}{}^2=|B_{XY}|^2p_1p_2/q_1q_2$,改变 p_1、p_2 可使 $r_{XY}{}^2$ 达到最大值。可以证明,当 $p_1=\sqrt{b_2\bar b_2}/(\sqrt{b_1\bar b_1}+\sqrt{b_2\bar b_2})$,$p_2=\sqrt{b_1\bar b_1}/(\sqrt{b_1\bar b_1}+\sqrt{b_2\bar b_2})$时,有 $r_{XY_{\max}}=\sqrt{\bar b_1\bar b_2}-\sqrt{b_1b_2}$,即:$|r_{XY}|\leqslant|\sqrt{\bar b_1\bar b_2}-\sqrt{b_1b_2}|$。

而此时 $\sqrt{q_1q_2/p_1p_2}=\sqrt{\bar b_1\bar b_2}+\sqrt{b_1b_2}$,$r_{XY_{\max}}$相当于信道能够传输的最大的相关系数值,这时输入分布达到与信道的匹配,可与信息论中的信道容量所对应。r_{XY}具有输入分布的极大值,最差信道的极小值($|B_{XY}|=0$)。

若信道对称,$b_1=b_2=b$ 时,最大的输入输出耦合系数 $r_{XY_{\max}}=\bar b-b$。当 $b=0$,$r_{XY}=1$。它的特点类似于平均互信息的极值性;但比平均互信息的(非线性)计算简单得多,易于理解,且概念非常清楚。其结论非常相似,由于二元数据通信的普遍性,其结论具有重要意义。

3.2 级联信道相关性分析

若级联离散二元无记忆信道构成马尔可夫链[7],有级联关系:$X\rightarrow[\boldsymbol B_{XY}]\rightarrow Y\rightarrow[\boldsymbol B_{YZ}]\rightarrow Z\rightarrow[\boldsymbol B_{ZW}]\rightarrow W$,则:$\boldsymbol B_{XZ}=\boldsymbol B_{XY}\boldsymbol B_{YZ}$,$\boldsymbol B_{XW}=\boldsymbol B_{XY}\boldsymbol B_{YZ}\boldsymbol B_{ZW}$。

由于 $|\boldsymbol{B}_{XZ}| = r_{XZ}\sqrt{s_1s_2/p_1p_2} = |\boldsymbol{B}_{XY}\boldsymbol{B}_{YZ}| = |\boldsymbol{B}_{XY}||\boldsymbol{B}_{YZ}| = r_{XZ}\sqrt{q_1q_2/p_1p_2}\,r_{XZ}\sqrt{s_1s_2/q_1q_2}$,则有:$r_{XZ} = r_{XY}r_{YZ}$,同理有: $r_{XW} = r_{XY}r_{YZ}r_{ZW}$。它很好地反映了数据处理定理的重要性质:级联信道只会丢失更多的信息。线性相关系数越级联越小,反映了级联信息的丢失。

3.3 信道传输前后相关性变换分析

设信道传输前端输入平稳随机过程,两时刻的一维分布分别为$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$,相关系数为 r_{12};给定二元离散无记忆信道为 $\boldsymbol{B}_{XY} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & b_1 \\ b_2 & \bar{b}_2 \end{bmatrix}$[8],则有:$r_{XY} = |\boldsymbol{B}_{XY}|\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{q_1q_2}}$;信道传输后对应的两时刻的一维分布分别为$\begin{pmatrix} y_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} y_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$,相关系数为 r'_{12},根据应用 3.2 节,$Y_1 \to Y_2$ 相当于 $Y_1 \to X_1 \to X_2 \to Y_2$,故有:$r'_{12} = r_{Y_1X_1}\, r_{X_1X_2}\, r_{X_2Y_2}$,由于 $r_{Y_1X_1} = r_{X_2Y_2} = r_{XY}$,有:$r'_{12} = r_{YX}^2\, r_{12}$。

结论:通过信道之后,输出 2 个时刻的相关信息只小不大。当 $r_{12} = 0$(相当于输入随机过程 2 个时刻统计独立)或 $r_{XY} = 0$(相当于信道断开),有 $r'_{12} = 0$。其物理意义明确且易于理解。

3.4 二级联信道 3 个变量的相关性分析

根据马尔可夫链的定义[9],可知:

$$f_{XYZ}(x,y,z) = f_{XY}(x,y)f_{Z|XY}(z|xy) = f_{XY}(x,y)f_{Z|Y}(z|y) = f_{XY}(x,y)f_{YZ}(y,z)/f_Y(y) \tag{8}$$

代入式(3),可得:

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= p_iq_js_k + (-1)^{j+k}r_{YZ}\sqrt{q_1q_2s_1s_2}\,p_i + (-1)^{i+j}r_{XY}\sqrt{p_1p_2q_1q_2}\;s_k + (-1)^{i+k}r_{XY}r_{YZ}\sqrt{p_1p_2s_1s_2}\,q_1q_2/q_j = \\ & p_iq_js_k + (-1)^{j+k}r_{YZ}\sqrt{q_1q_2s_1s_2}\,p_i + (-1)^{i+j}r_{XY}\sqrt{p_1p_2q_1q_2}\;s_k + (-1)^{i+k}r_{XZ}\sqrt{p_1p_2s_1s_2}\,q_1q_2/q_j \quad i,j,k=1,2 \end{aligned} \tag{9}$$

比较式(6),可得:$r_{XYZ} = r_{XZ}(q_1 - q_2)/\sqrt{q_1q_2}$;当 $q_1 = q_2$ 时,$r_{XYZ} = 0$。

3.5 三级联信道 4 个变量的相关性分析

根据马尔可夫链的定义[10],可知:

$$f_{XYZT}(x,y,z,t) = f_{XY}(x,y)f_{YZ}(y,z)f_{ZT}(z,t)/[f_Y(y)f_Z(z)] \tag{10}$$

可推导出下式:

$$\begin{aligned} f_{ijkl} &= p_iq_js_kt_l + (-1)^{j+k}r_{YZ}\sqrt{q_1q_2s_1s_2}\,p_it_l + (-1)^{i+j}r_{XY}\sqrt{p_1p_2q_1q_2}\;s_kt_l + (-1)^{k+l}r_{ZT}\sqrt{s_1s_2t_1t_2}\,p_iq_j + \\ & (-1)^{i+k}r_{XZ}\sqrt{p_1p_2s_1s_2}\frac{q_1q_2}{q_j}t_l + (-1)^{j+l}r_{YT}\sqrt{q_1q_2t_1t_2}\;p_i\frac{s_1s_2}{s_k} + (-1)^{i+l}r_{XT}\sqrt{p_1p_2t_1t_2}\;\frac{q_1q_2s_1s_2}{q_js_k} + \\ & (-1)^{i+j+k+l}r_{XY}r_{ZT}\sqrt{p_1p_2q_1q_2s_1s_2t_1t_2} \qquad i,j,\;k,l=1,2 \end{aligned} \tag{11}$$

经过与四维二态概率分布的表示形式进行详细的分析与比较可得:$r_{XYZ} = r_{XZ}(q_1 - q_2)/\sqrt{q_1q_2}$,$r_{YZT} = r_{XT}(s_1 - s_2)/\sqrt{s_1s_2}$,$r_{XYT} = r_{XT}(q_1 - q_2)/\sqrt{q_1q_2}$, $r_{XZT} = r_{XT}(s_1 - s_2)/\sqrt{s_1s_2}$,且有: $r_{XYZT} = r_{XY}r_{ZT}$。

当 $q_1 = q_2$ 时,$r_{XYZ} = r_{XYT} = 0$;当 $s_1 = s_2$ 时,$r_{YZT} = r_{XZT} = 0$;且有:$r_{XYZT} = r_{XT}/r_{YZ}$。

4 结束语

本文根据二维二态随机变量线性相关系数为零与统计独立等价概念,推导出二维二态随机变量的联合概率分布列的 3 种表达形式,并给出已知概率分布求相关系数的简捷方法,以及边缘分布求组成联合分布的相关系数的范围,再推广到三、四维二态随机变量的联合概率分布列的描述形式。所有的重要结论都经过细致的仿真验证,由于篇幅所限未列出其结果。将得到的表示形式应用在数据信道通信的分析中,用信道两端的相关系数来描述输入输出的信息耦合,对信息理论是一个很好的补充。该方法与信息论中的平均互信息、数据处理定理相对应,得到非常美观的公式及非常理想的特性。

参考文献:

[1] 谢兴武,李宏伟. 概率统计释难解疑[M]. 北京:科学出版社,2007.
XIE Xingwu, LI Hongwei. The Solution to Possibility and Statistics[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)

[2] 陈俊雅,王秀英.概率论与数理统计中的反例[M].天津:天津科学技术出版社,1993.
CHEN Junya, WANG Xiuying. Counterexamples of Possibility and Mathematical Statistics[M]. Tianjin: Tianjin Science and Technology Publishing Company, 1993. (in Chinese)
[3] 朱华,黄辉宁.随机信号分析[M].北京:北京理工大学出版社,2002.
ZHU Hua, HUANG Huining. Random Signal Analysis[M]. Beijing: Beijing Science University Press, 2002. (in Chinese)
[4] 刘进忙,张娅珣,袁修久.二维多态联合概率分布及信息传输理论研究[J].空军工程大学学报:自然科学版,2010,11(2):73-77.
LIU Jinmang, ZHANG Yaxun, YUAN Xiujiu. Two Dimensional Joint Probability Distribution of Multi-states and the Research on the Information Transfers[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2010, 11(2): 73-77. (in Chinese)
[5] 傅祖芸.信息论——基础理论与应用[M].北京:电子工业出版社,2001.
FU Zuyun. The Information: Basic Theory and Application[M]. Beijing: Electronics Industry Press, 2001. (in Chinese)
[6] 郑阿奇.MATLAB实用教程[M].北京:电子工业出版社,2004.
ZHENG Aqi. MATLAB Tutorial[M]. Beijing: Electronics Industry Press, 2004. (in Chinese)
[7] IEEE 1109.01-2007. The $\alpha-\mu$ Distribution: A Physical Fading Model for the Stacy Distribution[S].
[8] IEEE 1109.03-2007. Performance Analysis of MIMO-MRC in Double-Correlated Rayleigh Environments[S].
[9] IEEE 1109.07-2008. On the Mutual Information Distribution of OFDM-Based Spatial Multiplexing: Exact Variance and Outage Approximation[S].
[10] IEEE 1109.2007. On the Multivariate Weibull Fading Model with Arbitrary Correlation Matrix[S].

(编辑:徐敏)

The Description of Multidimensional Joint Probability Distribution of Two States and the Research on the Information Transfers of Data Communication

LIU Jin-mang[1], ZHANG Ya-xun[1], YUAN Xiu-jiu[2], HUA Jun[3]

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Sciences Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China; 3. People's Liberation Army Military Representative Office of 149 Factory, Shanghai 200245, China)

Abstract: According to the theory of the equivalence between the independence and the uncorrelation of two random variables, which only need two values, a joint probability distribution's integrated expressive form is found. Through extending the theory to multidimensional joint probability distribution of two states, a multidimensional description is multidimensional is discovered. If marginal distributions of all random variables are written down, the range of each correlative coefficient can be calculated and then the joint distributed matrix can be found. The validity of this method is verified through simulations. By the way, this is applied to the description of joint channel from data communications and a highly fine conclusion is achieved.

Key words: correlative coefficient; joint probability distribution; channel matrix