

## 二维 MUSIC 算法分维处理及其阵列结构的研究

薛晓峰<sup>1,2</sup>, 王永良<sup>2</sup>, 张永顺<sup>1</sup>, 鲍拯<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800; 2. 空军雷达学院, 湖北 武汉 430019)

**摘要:**基于阵列接收信号相关矩阵特征结构的谱估计方法是信号参数测量的主要方法之一。随着应用研究的不断深入,对信号的二维参数进行测量的要求日益迫切。针对目前多信号环境下二维 DOA 参数测量问题,对二维 MUSIC 算法分维处理中的参数配对耦合问题进行了分析,得出了耦合阵列结构的特征,即二维 MUSIC 算法分维处理中,耦合的产生与否由阵列的横坐标矢量与纵坐标矢量的线性相关性决定。该特征表明,传统的平面阵列存在着较大的阵元冗余。在此基础上,提出了无冗余的配对阵列。同时,提出了解耦合的 F 型阵列结构和分维搜索方式,进一步减少二维参数测量的阵元冗余。与现有的二维 DOA 参数测量方法相比,在计算量、阵元利用率和测量精度等方面性能突出。通过仿真,表明了算法和阵列结构的有效性。

**关键词:**二维 DOA 估计; MUSIC 算法; 分维处理; 解耦合

**中图分类号:** TN 911.23    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1009-3516(2008)05-0033-05

自 Schmidt 提出 MUSIC 算法<sup>[1]</sup>以来,基于阵列接收信号相关矩阵特征结构的谱估计方法成为信号参数测量的主要方法之一。随着应用的不断深入,对信号的二维参数进行测量的需求日益迫切<sup>[2-3]</sup>,许多对二维参数进行测量的新算法得以提出,如二维 MUSIC 算法<sup>[4-5]</sup>以及各种 ESPRIT 算法<sup>[6-10]</sup>等。然而,传统二维 MUSIC 算法需要在整个参数平面上进行搜索,计算量巨大,无法应用于实际。虽然分维处理加配对方法的提出<sup>[6]</sup>避免了二维平面上的搜索,有效地减少了计算量,但是其所采用的阵列结构依然是平面阵列,硬件代价仍然十分昂贵。另一方面,DOA 矩阵法<sup>[9]</sup>充分挖掘了相关矩阵特征向量所包含的信息,能直接计算出二维 DOA 参数,无需谱峰搜索,计算量小,时空 DOA 矩阵法<sup>[10]</sup>进一步减少了冗余阵元,使其适用的阵列结构更加灵活。但是,这种算法性能有限,同时为保证测量的性能,必须使用均匀阵列,对阵列结构的要求仍然十分严格。不难看出,在二维 MUSIC 分维处理加配对的方法中,其阵列结构采用平面阵主要是配对的需要。而配对的依据反映为二维参数对在阵列结构中的唯一性,即阵列结构应避免不同参数对之间的耦合。

本文针对二维信号参数配对中出现的耦合现象进行了分析,得出了解耦合阵列结构的特征。该特征表明,传统的平面阵列存在着较大的阵元冗余。在此基础上,提出了无冗余的配对阵列。同时,提出了解耦合的 F 形阵列结构和分维搜索方式,进一步减少二维参数测量的阵元冗余。

### 1 分维处理中耦合问题的分析

MUSIC 算法是通过对阵列协方差矩阵的特征分解,利用其信号子空间与噪声子空间的正交性,通过搜索阵列流形与阵列协方差矩阵信号子空间的交点来完成对空间信号源波达方向的估计。而分维处理加配对的方式则是分别测量两维参数,在产生的所有参数对对应的阵列流形中进行与信号子空间交点的搜索,从而达到避免二维平面搜索的目的。

收稿日期:2008-02-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60601016;60502040)

作者简介:薛晓峰(1981-),男,山西运城人,博士,主要从事防空武器系统电子对抗、阵列信号处理研究;

E-mail: xuexiaofeng-fo-e@163.com

王永良(1965-),男,浙江嘉兴人,教授,博士生导师,主要从事雷达技术、阵列信号、自适应信号处理研究;

张永顺(1961-),男,陕西咸阳市人,教授,博士生导师,主要从事雷达信号处理、电子对抗研究。

显然,进行配对所用的阵列结构应该同时含有两维参数的信息。但是在多个信号存在的情况下,若阵列结构产生的阵列流形不具有两维参数对的唯一性,将会导致虚假信号的产生,此即耦合。以下对这一现象进行讨论。入射信号模型见图1。

记阵列中阵元坐标为  $(x_m, y_m), m = 1, 2, \dots, M$ 。设空间中  $P$  ( $P < M$ ) 个统计独立,中心频率同为  $\omega$  的窄带远场信号从二维到达方向  $(\alpha_i, \beta_i)$  ( $0 \leq \alpha_i, \beta_i \leq \pi; i = 1, 2, \dots, P$ ) 照射此阵列。阵元噪声  $u_m(t), m = 1, 2, \dots, M$  为零均值、时空统计独立的高斯白噪声,与信号不相关。

以阵元1为参考点,阵元  $m$  接收信号可写为

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) \exp(j\omega((x_m - x_1) \cos(\alpha_i)/C + (y_m - y_1) \cos(\beta_i)/C)) + u_m(t)$$

将其写成向量的形式,可得:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\mathbf{s}(t) + \mathbf{u}(t) \tag{1}$$

式中:  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \dots \ y_M(t)]^T$ , 为阵列接收信号矢量;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_p(t)]^T$ , 为信号的复幅度矢量;  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_M(t)]^T$ , 为接收阵元噪声矢量;  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  为关心的参量矩阵:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \exp(j\omega/C((x_2 - x_1) \cos(\alpha_1) + (y_2 - y_1) \cos(\beta_1))) & \dots & \exp(j\omega/C((x_2 - x_1) \cos(\alpha_p) + (y_2 - y_1) \cos(\beta_p))) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp(j\omega/C((x_M - x_{M-1}) \cos(\alpha_1) + (y_M - y_{M-1}) \cos(\beta_1))) & \dots & \exp(j\omega/C((x_M - x_{M-1}) \cos(\alpha_p) + (y_M - y_{M-1}) \cos(\beta_p))) \end{bmatrix}$$

式中:  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  是  $P$  个信号的角度参量向量对;  $C$  代表电磁波传播速度。

在所假定的条件下,  $\mathbf{y}(t)$  的协方差矩阵由式(2)给定:

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \tag{2}$$

式中:  $\mathbf{P}$  为  $\mathbf{s}(t)$  的协方差矩阵。利用矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{R}$  噪声子空间正交的特性,在由  $\mathbf{R}$  阵得到噪声子空间  $\mathbf{G}$  后,将  $P$  个  $\alpha_i$  值代入式(3),得  $f_i(\alpha_i, \beta)$ 。在  $\beta$  参数轴上搜索使  $f_i(\alpha_i, \beta)$  为最大的  $P$  个  $\beta$  值即可求得对第二维参数的估计,  $i = 1, 2, \dots, P$ 。

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\alpha, \beta)\mathbf{G}\|} \tag{3}$$

式中,  $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$  即为阵列2的阵列流型:

$$\mathbf{a}(\alpha, \beta) = [1 \ \exp(j\omega/C((x_2 - x_1) \cos(\alpha) + (y_2 - y_1) \cos(\beta))) \ \dots \ \exp(j\omega/C((x_M - x_{M-1}) \cos(\alpha) + (y_M - y_{M-1}) \cos(\beta)))]^T$$

特征结构方法测向,实际上是通过测量相位来实现的。这里,将上述阵列流型映射为以下相位矢量,该映射具有一一映射的性质:

$$\boldsymbol{\Phi}(\alpha, \beta) = [\Phi_1(\alpha, \beta) \ \Phi_2(\alpha, \beta) \ \dots \ \Phi_{m-1}(\alpha, \beta)]^T$$

$$\Phi_{m-1}(\alpha, \beta) = \omega/C((x_m - x_{m-1}) \cos(\alpha) + (y_m - y_{m-1}) \cos(\beta)) \quad m = 2, 3, \dots, M$$

进一步可写成:

$$\boldsymbol{\Phi}(\alpha, \beta) = \omega/C \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_M - x_{M-1} & y_M - y_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix} = \omega/C [x \ y] \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

在阵列覆盖区域内,参数对  $(\alpha_i, \beta_i)$  对应的相位矢量记为

$$\boldsymbol{\Phi}(\alpha_i, \beta_i) = \omega/C [x \ y] \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

设另一  $(\alpha_r, \beta_r)$  存在,其  $\boldsymbol{\Phi}(\alpha_r, \beta_r) = \boldsymbol{\Phi}(\alpha_i, \beta_i)$ , 有:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} \cos(\alpha_r) - \cos(\alpha_i) \\ \cos(\beta_r) - \cos(\beta_i) \end{bmatrix} = 0$$

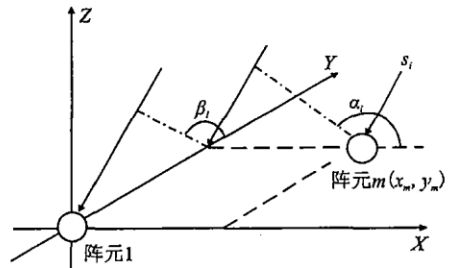


图1 入射信号模型

Fig.1 Incoming signal model

如果  $x, y$  线性相关,则存在不等于 0 的  $\cos(\alpha_i) - \cos(\alpha_j), \cos(\beta_i) - \cos(\beta_j)$ ,这表示阵列流形中存在模糊,在进行参数的测量时,就有产生耦合的可能;反之,则不存在耦合。

二维 MUSIC 算法分维处理中,耦合的产生与否由阵列的横坐标矢量与纵坐标矢量的线性相关性决定。

## 2 解耦合阵列结构及分维搜索算法

上述分析表明:在分别求得信号的二维参数以后,只需具有解耦合性质的阵列即可完成配对,而现有的平面阵列存在极大的阵元冗余,配对所需阵元数可大为减少。以下提出一种无冗余的配对阵列,如图 2 所示。该阵列阵元的位置矢量如下:

$$[x \ y] \begin{bmatrix} d & 2d & \cdots & (M-1)d \\ -(M-2)D & -(M-1)D & \cdots & -(M-1)D \end{bmatrix}^T$$

该配对阵列在两维参数的测量阵列外只增加了一个阵元,通过阵元的复用形成具有解耦合性质的配对阵列,其阵元利用率较高,称其为基于配对阵列的分维处理二维 MUSIC 方法。但是,这种方法仍需要两个独立的阵列对两维参数分别进行测量。如果在测得一维参数后,利用解耦合的配对阵列数据进行第二维参数的搜索,则不再需要阵列对第二维参数进行测量,阵元冗余还可进一步减小,此即分维搜索。

这里,提出一种 F 型阵列结构,如图 3 所示。该阵列包括  $M+2$  个阵元,阵列 1 由  $M$  个阵元组成,为均匀线阵,阵元间隔  $d$ ,用于测量一维参数。阵列 2 由坐标为  $(0, (M-1)D), (d, (M-1)D)$  的阵元 1,2 和阵列 1 中部分阵元 3,4, ...,  $M$  组成。 $d, D \leq \frac{1}{2}\lambda$ 。以阵元 1 为参考点,阵列 2 中其余阵元坐标矢量为

$$[x \ y] \begin{bmatrix} d & 2d & \cdots & (M-1)d \\ -D & -(M-1)D & \cdots & -(M-1)D \end{bmatrix}^T$$

取  $D = d$ ,该阵列结构即可提供相同的阵列孔径,也可根据实际需要调整,其可测量信号数为  $M-1$ 。

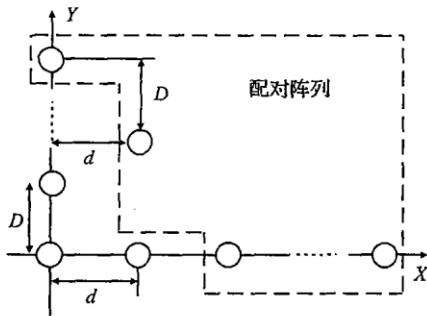


图 2 配对阵列

Fig. 2 Matching array

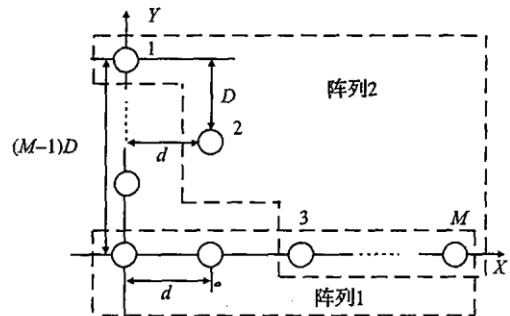


图 3 F 型阵列结构

Fig. 3 F shaped array structure

F 型阵列第二维阵列导向矩阵为

$$A(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j\omega/C(d\cos(\alpha_1) - D\cos(\beta_1))) & \cdots & \exp(j\omega/C(d\cos(\alpha_p) - D\cos(\beta_p))) \\ \exp(j\omega/C(2d\cos(\alpha_1) - (M-1)D\cos(\beta_1))) & \cdots & \exp(j\omega/C(2d\cos(\alpha_p) - (M-1)D\cos(\beta_p))) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp(j\omega/C(M-1)(d\cos(\alpha_1) - D\cos(\beta_1))) & \cdots & \exp(j\omega/C(M-1)(d\cos(\alpha_p) - D\cos(\beta_p))) \end{bmatrix}$$

在上述解耦合的阵列结构上,提出解耦合二维 MUSIC 算法具体如下:

- 1) 使用阵列 1 进行 MUSIC 角度估计,得到不同信号的角度  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ;
- 2) 用式(1)表示的信号模型,求得噪声特征向量组  $G$ ;
- 3) 将第一步求得的角度代入  $a(\alpha, \beta)$ ,得  $a(\alpha_1, \beta), a(\alpha_2, \beta), \dots, a(\alpha_p, \beta)$ ,搜索  $\beta$  轴,使  $\|a^H(\alpha_i, \beta_i)G\|$  为最小的  $\beta_i$  即为信号  $S_i$  的第二维方向参数。

### 3 计算机实验仿真结果

设信号归一化频率为 0.1, 传统分维处理方法的二维 MUSIC 分维处理采用  $6 \times 6$  的平面阵列, 解耦合分维处理则采用图 2 所示的  $5 + 6 + 1$  的解耦合配对阵列, 解耦合二维 MUSIC 算法采用  $6 + 2$  的 F 型阵列结构, 时空 DOA 矩阵法阵列结构为  $5 + 6$  的 L 型阵列。阵元间距均取半波长。对上述算法及结构, 用 Matlab 进行 100 次仿真实验。

1) 解耦合阵列结构的解耦合效果。设 3 个等功率的信号, 其二维参数分别为  $(45^\circ, 30^\circ)$ 、 $(107^\circ, 117^\circ)$  和  $(120^\circ, 51^\circ)$ , 在图 2 所示阵列结构中的配对阵列上使用 MUSIC 算法, 在整个二维参数平面上进行搜索, 信噪比为 9 dB, 快拍数 128, 得到信号对数谱图如图 4(a) 所示。SNR 为 -10 dB, 快拍数 64 时信号对数谱图见图 4(b)。

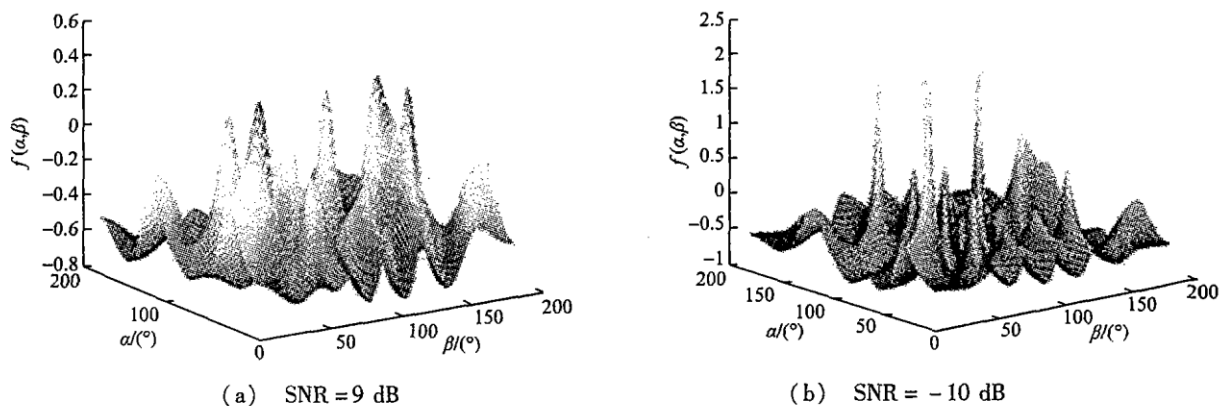


图 4 解耦合效果

Fig. 4 Decoupling effect

可见, 信噪比过低时, 解耦合的阵列结构可能失效。

2) 不同信噪比和快拍数情况下上述算法的性能。信号参数为  $(80^\circ, 85^\circ)$ 。图 5(a)、图 5(b) 分别为不同快拍数和不同信噪比情况下两种算法的偏差。

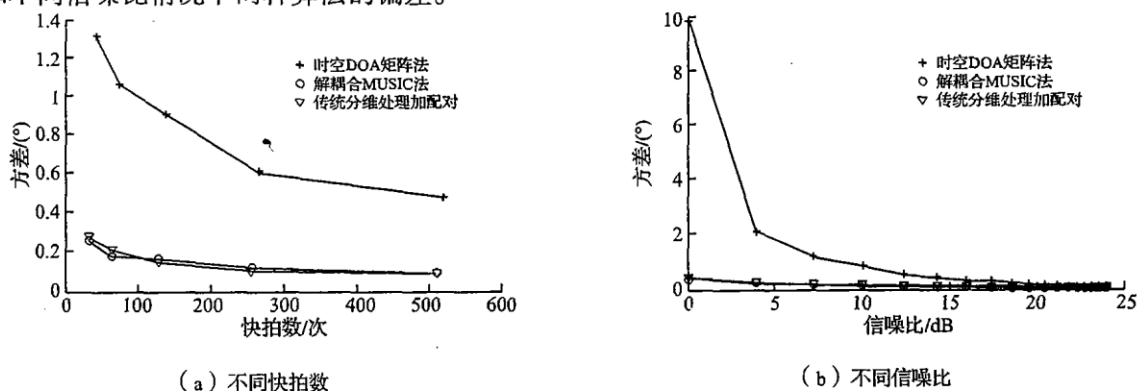


图 5 算法的性能

Fig. 5 Algorithm performance

### 4 结论

仿真结果表明, 基于配对阵元的分维处理二维 MUSIC 方法能以较少的阵元完成二维参数的配对, 并且由于配对阵列不参与参数的估计, 其性能和传统分维处理二维 MUSIC 方法相同; 采用 F 型阵列的解耦合二维 MUSIC 算法进一步减小了阵元冗余, 其估计性能也与传统分维处理二维 MUSIC 法相同。前者计算量较小而阵元利用率不高, 后者的阵元利用率较高, 但其计算量会随着信号数的增多线性增长, 而且在信噪比过低时, 解耦合的阵列结构可能失效。二者的测量性能较 DOA 矩阵法高, 计算量也较大。值得注意的是, 这两种算法均可在信号方位参数大致知道的前提下, 通过解耦合的阵列结构实现二维参数的联合搜索, 这样, 在

计算量增加不大的情况下可进一步提高测量的性能。另外,该方法不存在兼并现象,并与现有大多数改进的谱估计算法兼容,与这些改进算法相结合,其测量性能还可提高。

#### 参考文献:

- [ 1 ] Schmidt R. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation[J]. IEEE Trans on AP, 1986,34(3):276-280.
- [ 2 ] 王永良,陈辉,彭应宁,等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.  
WANG Yongliang, CHEN Hui, PENG Yingning, et al. Spatial Spectrum Estimation Theory and Algorithm[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [ 3 ] 鲍拯. 多维阵列信号处理技术研究[D]. 西安:空军工程大学,2006.  
BAO Zheng. Multi-dimension Array Signal Processing Technology Research[D]. Xi'an: Air Force Engineering University, 2006. (in Chinese)
- [ 4 ] Wax M, Shan T J, Kailath T. Spatial-temporal Spectral Analysis by Eigenstructure Methods[J]. IEEE Trans ASSP, 1984, 32(4):827-828.
- [ 5 ] Mathews C P, Zoltowski M D. Eigenstructure Techniques for 2-D Angle Estimation with Uniform Circular Array[J]. IEEE trans on Spr, 1994, 42(9): 2395-2404.
- [ 6 ] Chien Chung Yen, Ju Hong Lee, Yin Min Chen. Estimating Two-dimensional Angles of Arrival in Coherent Source Environment[J]. IEEE Trans ASSP, 1989, 37(1):22-25.
- [ 7 ] Zhang X D. High Resolution Two-dimensional ARMA Spectral Estimation[J]. IEEE Trans SP, 1991, 39(3):765-770.
- [ 8 ] 刘全,魏急波. 二维虚拟 ESPRIT 算法[J]. 信号处理, 2001, 17(3):247-251.  
LIU Quan, WEI Jibo. 2-D Virtue ESPRIT Algorithm[J]. Signal Processing, 2001, 17(3): 247-251. (in Chinese)
- [ 9 ] 殷勤业,邹理和. 一种高分辨率二维信号参量估计方法-波达方向矩阵法[J]. 通信学报, 1991, 12(4):1-7  
YIN Qinye, ZOU Lihe. A High Resolution 2-D Signal Parameters Estimation Method - direction of Arrival Matrix [J]. Journal on Communications, 1991, 12(4): 1-7. (in Chinese)
- [ 10 ] 金梁,殷勤业. 时空 DOA 矩阵方法[J]. 电子学报, 2000, 28(6): 8-11.  
JING Liang, YIN Qinye. Space-time DOA Matrix Method[J]. Chinese Journal of Electronics, 2000, 28(6): 8-11. (in Chinese)

(编辑:田新华)

## A Study of Decoupling 2D - MUSIC Algorithm and Array Structure

XUE Xiao-feng<sup>1,2</sup>, WANG Yong-liang<sup>2</sup>, ZHANG Yong-shun<sup>1</sup>, BAO Zheng<sup>2</sup>

(1. Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, Shaanxi, China; 2. Air Force Radar Academy, Wuhan 430019, Hubei, China)

**Abstract:** The spectrum estimation method which is based on the eigenstructure of array signal correlation matrix is one of the main parameter estimation methods. With the deep-going research in application, the requirement for two dimensions parameters estimations becomes more and more urgent. In this paper, the dimension-separated coupling problem in 2D - MUSIC algorithm is discussed. Though the discussion, the characteristic of coupling array which is decided by the linear correlation between horizontal axis vector and vertical axis vector of array is obtained. And the characteristic shows that larger sensor redundancy exists in the traditional planar array. On the basis of this, An F-shaped array for 2D - DOA estimation is presented, with which, the decoupling 2D - MUSIC algorithm in the dimension-separated manner is implemented. Though analysis and simulation, and in comparison with other algorithms, this algorithm is less in computation load, higher in precision and sensor utilization rate.

**Key words:** 2D - DOA estimation; MUSIC algorithm; dimension-separated searching; decoupling algorithm