色噪声背景下的正弦信号相位估计方法

宁 辉[1]， 石要武[2]
(1. 空军装备研究院 航空装备研究所，北京 100076;2. 吉林大学 通信工程学院，吉林 长春 130022)

摘 要:噪声背景下的正弦信号相位估计在雷达、导航、波达方向估计等领域有着广泛的应用。提出了一种基于互高阶累计量的正弦信号相位估计方法——奇异值分解法。这种方法通过对互高阶累积量矩阵进行奇异值分解,得到信号子空间和噪声子空间。由于信号子空间不包含噪声信息,因此是提取信号成分与抑制噪声意义下的最优解。信号的自高阶累积量矩阵是共轭对称矩阵,它的左、右奇异矢量是相同的,而两个幅值和频率都相同、只有相位不同的正弦信号的互高阶累积量矩阵却是非共轭对称矩阵,左右奇异矢量也不相同,这说明是谐波信号之间存在相位差导致了这一结果。因此,从这一点出发,证明了谐波信号的互高阶累积量矩阵左、右奇异矢量内积的相角等于正弦信号相位差这一重要定理。并根据这一定理推导出估计正弦信号相位差的奇异值分解法。仿真结果验证了这种方法的有效性。

关键词:互高阶累积量 ; 相位估计 ; 色噪声 ; 奇异值分解
中图分类号: TN911.23 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2008)03-0046-04

噪声背景下正弦信号参量估计不论在理论上还是实践中均有着特殊重要的意义。正弦信号,最主要的参数是它的幅值、频率和相位。然而多年来由于受自谱估计方法本身的限制,人们只能对正弦信号的频率和幅值进行估计,对于正弦信号的相位估计很少有人问津。

相位法不仅可以测量目标的距离,而且在波达方向估计问题中也有重要应用。本文的目的就是在频率已知的基础上,估计噪声背景下正弦信号的相位差。

鉴于目前国际上微弱正弦信号相位测量的现状及生产和科研上对微弱信号测量的迫切要求,确定了本论文所要达到的主要技术指标为:

1)鉴于目前的各种正弦信号参量估计方法中要求背景噪声为高斯色噪声或互不相关色噪声现状,因此研究背景噪声为谱密度未知的互不相关的任何噪声或高斯色噪声条件下的高分辨率、高稳定性方法;

2)相位估计与频率估计相比尚属新课题,因此要求信噪比工作门限达到0 dB即可。

1 基于互高阶累积量矩阵的奇异值分解法

设时间序列 $x(n)$、$y(n)$ 均为带有附加混合色噪声的复值正弦过程:

$$\begin{cases} x(n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \exp[\mathrm{j}(\omega_i n + \theta_{xi})] + \xi_x(n) + \eta_x(n) \\ y(n) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \exp[\mathrm{j}(\omega_i n + \theta_{yi})] + \xi_y(n) + \eta_y(n) \end{cases} \tag{1}$$

式中:α_i、$\beta_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为复数谐波信号的幅值(均为实数);θ_{xi}、$\theta_{yi}(i=1,2,\cdots,p)$ 为信号 $x(n)$、

收稿日期:2007-07-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(F010202-69872012)
作者简介:宁 辉(1971-),女,吉林长春人,工程师,主要从事信号处理、航空电气研究;
E-mail:ninghui1106@tom.com
石要武(1954-),男,吉林长春人,教授,博士生导师,主要从事信号处理、应用及检测研究.

$y(n)$ 各谐波分量的初相位；$\omega_i(i=1,2,\cdots,p)$ 为已知的谐波信号频率。因为本文主要讨论互高阶谱估计方法，因此这里规定 $x(n)$、$y(n)$ 的谐波频率是完全相同的。实际上，当 $x(n)$，$y(n)$ 相互存在不同频率谐波分量时，则由于不同频率的谐波是互不相关的，因此就高阶谱而言，它们也完全等效为文中这种模型。$\xi_x(n)$、$\xi_y(n)$、$\eta_x(n)$、$\eta_y(n)$ 均为附加的、谱密度未知的零均值色噪声，其中 $\xi_x(n)$、$\xi_y(n)$ 互不相关（高斯或非高斯噪声），$\eta_x(n)$、$\eta_y(n)$ 为相关高斯噪声，且 $\xi_x(n)$、$\xi_y(n)$ 分别独立于 $\eta_x(n)$、$\eta_y(n)$。

为了分析问题的方便，引入一个幅值为 1、初相位为零、频率为 ω_1 的参考信号 $z(n)$：

$$z(n)=\exp(\mathrm{j}\omega_1 n) \tag{2}$$

考虑到不同频率的谐波信号不相关、噪声与参考信号不相关以及高斯噪声的四阶累积量为零，$z(n)$ 与 $x(n)$、$y(n)$ 的互高阶累积量为

$$\begin{aligned}c_{zxxx}(m,0,0) &= \mathrm{cum}[z^*(n)x^*(n+m)x(n)x(n)] = \\ &E[z^*(n)x^*(n+m)x(n)x(n)] - E[z^*(n)x^*(n+m)]\cdot E[x(n)x(n)] - \\ &2E[z^*(n)x(n)]\cdot E[x^*(n+m)x(n)] = \\ &-\alpha_1^3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{x1}}\end{aligned} \tag{3}$$

同理可得

$$c_{zyyy}(m,0,0) = -\beta_1^3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{y1}} \tag{4}$$

将 $c_{zxxx}(m,0,0)$、$c_{zyyy}(m,0,0)$ 简写为 $c_{zxxx}(m)$、$c_{zyyy}(m)$，并将其代入 $q\times q$ 维（$q>p$）扩阶互高阶累积量矩阵：

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}=\begin{bmatrix} c_{zxxx}(0) & c_{zxxx}(-1) & \cdots & c_{zxxx}(-q+1) \\ c_{zxxx}(1) & c_{zxxx}(0) & \cdots & c_{zxxx}(-q+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{zxxx}(q-1) & c_{zxxx}(q-2) & \cdots & c_{zxxx}(0)\end{bmatrix} \tag{5}$$

可见，$\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 是非共轭对称矩阵，因此，$\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的奇异值分解式为

$$\boldsymbol{c}_{zxxx} = \boldsymbol{U}\sum \boldsymbol{V}^* \tag{6}$$

式中：$\sum = \mathrm{diag}[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_q]$，为矩阵 $\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的奇异值矩阵。

$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 分别称为矩阵 $\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的左、右奇异矢量，它们由下式定义：

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}\boldsymbol{c}_{zxxx}^* u_k = \sigma_k^2 u_k \quad , \quad 1\leqslant k\leqslant q \tag{7}$$

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}\boldsymbol{c}_{zxxx}^* v_k = \sigma_k^2 u_k \quad , \quad 1\leqslant k\leqslant q \tag{8}$$

所有奇异值按下列方式排列：$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_q$。

由于是用单正弦与观测值作互高阶累积量得到矩阵 $\boldsymbol{c}_{zxxx}$，所以 $\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的秩应为 1，根据矩阵的奇异值分解理论，$\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 仅有 1 个非零奇异值 σ_1，而另外 $q-1$ 个奇异值均为零。式(6) 可写成：

$$\boldsymbol{c}_{zxxx} = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{V}^* \tag{9}$$

将右奇异矢量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 分块成 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2]$，其中 $\boldsymbol{V}_1$ 是由 $\boldsymbol{V}$ 中第一个奇异矢量构成，$\boldsymbol{V}_2$ 是由 $\boldsymbol{V}$ 中后（$q-1$）个奇异矢量所构成，即 $\boldsymbol{V}_1=[\boldsymbol{v}_1]$，$\boldsymbol{V}_2=[\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\cdots,\boldsymbol{v}_q]$；同时将左奇异矢量矩阵 $\boldsymbol{U}$ 分块成 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2]$，其中 $\boldsymbol{U}_1=[\boldsymbol{u}_1]$，$\boldsymbol{U}_2=[\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\cdots,\boldsymbol{u}_q]$，将以上式子代入式(9)，得

$$\boldsymbol{c}_{zxxx} = [\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_1^*\\ \boldsymbol{V}_2^*\end{bmatrix} = \boldsymbol{u}_1\sigma_1\boldsymbol{v}_1^* \tag{10}$$

式中：$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{v}_1$ 为信号特征矢量，$\boldsymbol{U}_1$、$\boldsymbol{V}_1$ 所构成的空间为信号特征矢量空间，它对应于数据中的信号成分，只含有关信号的信息，不包含噪声信息；$\boldsymbol{u}_i$、$\boldsymbol{v}_i(i=2,3,\cdots,q)$ 为噪声特征矢量，$\boldsymbol{U}_2$、$\boldsymbol{V}_2$ 为噪声特征矢量空间，它对应于数据中的噪声成分，只含噪声信息，不包含信号信息。得到这种分解后，就只需在信号子空间寻找问题的解。因它并未丢失信号信息，故它可作为信号的良好估计。它所丢失的信息是有关噪声的。从另一角度看，这个解不反映噪声的变化，就是说，受噪声的影响很小，因此这个解是在提取信号成分与抑制噪声意义下的最优解。

信号的自高阶累积量矩阵是共轭对称矩阵，它的左、右奇异矢量是相同的。而两个幅值和频率都相同、只有相位不同的正弦信号的互高阶累积量矩阵却是非共轭对称矩阵，左、右奇异矢量也不相同。因此，我们

有理由认为这是谐波信号之间存在相位差的缘故,可以从左、右奇异矢量的关系中估计出相位差。

定理 1 设时间序列 $x(n)$ 、$z(n)$ 分别为

$$x(n)=\sum_{i=1}^{P}\alpha_i\exp[\mathrm{j}(\omega_i n+\theta_{xi})]+\eta_x(n) \tag{11}$$

$$z(n)=\exp(\mathrm{j}\omega_i n) \tag{12}$$

互高阶累积量矩阵的信号特征矢量为 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{v}_1$,则两向量 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_1$ 的内积的相角即为频率为 ω_1 的两谐波分量之间的相位差。

证明:为了分析问题的方便,取 $q=2$,则

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}=\begin{bmatrix} c_{zxxx}(0) & c_{zxxx}(-1) \\ c_{zxxx}(1) & c_{zxxx}(0) \end{bmatrix} \tag{13}$$

将式(3)代入式(13)中,得

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}=\begin{bmatrix} -\alpha_1^3 e^{\mathrm{j}\theta_{x1}} & -\alpha_1^3 e^{\mathrm{j}(\omega_1+\theta_{x1})} \\ -\alpha_1^3 e^{\mathrm{j}(-\omega_1+\theta_{x1})} & -\alpha_1^3 e^{\mathrm{j}\theta_{x1}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}^{*}=\begin{bmatrix} -\alpha_1^3 e^{\mathrm{j}\theta_{x1}} & -\alpha_1^3 e^{-\mathrm{j}-(\omega_1+\theta_{x1})} \\ -\alpha_1^3 e^{-\mathrm{j}(\omega_1+\theta_{x1})} & -\alpha_1^3 e^{-\mathrm{j}\theta_{x1}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{c}_{zxxx}^{*}\boldsymbol{c}_{zxxx}=\begin{bmatrix} 2\alpha_1^6 & 2\alpha_1^6 e^{\mathrm{j}(\omega_1)} \\ 2\alpha_1^6 e^{-\mathrm{j}\omega_1} & 2\alpha_1^6 \end{bmatrix} \tag{16}$$

求 $\boldsymbol{c}_{zxxx}^{*}\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的特征值 :

$$\begin{vmatrix} -\lambda-2\alpha_1^6 & -2\alpha_1^6 e^{\mathrm{j}\omega_1} \\ 2\alpha_1^6 e^{-\mathrm{j}\omega_1} & \lambda-2\alpha_1^6 \end{vmatrix}=0 \tag{17}$$

得 $\lambda_1=4\alpha_1^6$、$\lambda_2=0$,则 $\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt{\lambda_1}=2\alpha_1^3,\sigma_2=0$。

$\boldsymbol{c}_{zxxx}^{*}\boldsymbol{c}_{zxxx}$ 属于特征根 $\lambda_1=4\alpha_1^6$ 的标准正交特征向量为 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}\omega_1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,属于特征根 $\lambda_2=0$ 的标准正交特征向量为 $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{j}\omega_1}\end{pmatrix}$,则矩阵 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}\omega_1} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}\omega_1}\end{pmatrix}$,从而得出左奇异矢量 $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{C}_{zxxx}\boldsymbol{v}_1\sigma_1^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}(\omega_1+\theta_{x1})} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}\theta_{x1}}\end{pmatrix}$,左、右奇异矢量之间的内积为 $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1^{*}\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{j}\omega_1} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}(\omega_1+\theta_{x1})} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}\theta_{x1}}\end{pmatrix}$,即内积的相角恰好为 θ_{x1}。

证毕。

根据定理 1,就可以求出 θ_{x1},同样将 $z(n)$ 与 $y(n)$ 作互高阶累积量, 可得矩阵 $\boldsymbol{C}_{zyyy}$,得到 θ_{y1}。将二者相减,可得相位差。

2 仿真实验

为了说明本文提出的正弦信号相位差估计的奇异值分解法的稳定性,采用双正弦信号模型进行仿真:

$$x(n)=\alpha_1\exp[\mathrm{j}2\pi f_1 n]+\alpha_2\exp[\mathrm{j}2\pi f_2 n]+\xi_x(n)+\eta_x(n)$$

$$y(n)=\beta_1\exp[\mathrm{j}(2\pi f_1 n+\theta_1)]+\beta_2\exp[\mathrm{j}(2\pi f_2 n+\theta_2)]+\xi_y(n)+\eta_y(n)$$

其中,归一化频率 $f_1=0.17$,$f_2-0.19$,$\theta_1=-\frac{\pi}{4}$,$\theta_2=-\frac{\pi}{5}$ 。$\eta_x(n)$ 、$\eta_y(n)$ 为高斯色噪声, $\xi_x(n)$ 和 $\xi_y(n)$

为互不相关噪声。$\xi_y(n)$、$\xi_x(n)$ 是由方差为 1 的零均值白噪声通过一个四阶带通滤波器产生。该滤波器的传递函数为

$$H(z)=\frac{0.312(1-2z^{-2}+z^{-4})}{1-1.367z^{-1}+1.739z^{-2}-0.856z^{-3}+0.404z^{-4}} \tag{18}$$

取时间序列 $x(n)$、$y(n)$ 的数据长度均为 512, $x(n)$、$y(n)$ 中的正弦分量的信噪比 SNR 均为 0 dB。

采用奇异值分解法和文献[1]提出的相位重构法连续进行了 100 次仿真实验,得到相位差估计结果的统计值如表 1 所示。

表 1　正弦信号相位差估计的统计结果(SNR = 0 dB)

Tab. 1　Statistical result of sinusoidal signal phase difference estimation(SNR = 0 dB)

真实值	$\theta_1=-0.7854$		$\theta_2=0.6283$	
估计方法	估计均值	估计方差	估计均值	估计方差
奇异值分解法	-0.784 7	1.45E-02	0.623 1	1.21E-02
相位重构法	-0.783 6	6.57E+00	0.612 3	4.93E+00

表 2 为在上述实验中,将信噪比降至 -5 dB 时的正弦信号相位差估计结果。

表 2　正弦信号相位差估计的统计结果(SNR = -5 dB)

Tab. 2　Statistical result of sinusoidal signal phase difference estimation(SNR = -5 dB)

真实值	$\theta_1=-0.7854$		$\theta_2=0.6283$	
估计方法	估计均值	估计方差	估计均值	估计方差
奇异值分解法	-0.783 5	7.15E-02	0.621 9	4.84E-02
相位重构法	-0.774 5	9.48E+00	0.613 7	7.37E+00

比较以上实验结果可以看出,在混合色噪声和低信噪比条件下,本文提出的奇异值分解法的谱估计性能明显优于相位重构方法。

参考文献:

[1] 樊养余,李平安,孙进才. 基于双谱的谐波信号相位重构[J]. 信号处理,2000,16(1):1-4.
FAN Yangyu, LI Pingan, SUN Jincai. Accurate Phase Reconstruction of Measured Signals From Bispectrum[J]. Signal Processing, 2000, 16(1):1-4. (in Chinese)

[2] 石要武,戴逸松,宫文斌. 色噪声背景下正弦参量估计的互谱矩和 SVD 方法[J]. 电子科学学刊,1995,17(1):33-39.
SHI Yaowu, DAI Yisong, GONG Wenbin. Cross-spectral Moment and SVD Methods Estimating the Parameters of Close Sinusoids in Colored Noise[J]. Journal of Electronics, 1995, 17(1):13-19. (in Chinese)

[3] 喻　胜,陈光衸. 一种检测噪声中正弦信号的 SVD 方法[J]. 电子学报,2000,28(6):108-110.
YU Sheng, CHEN Guangyu. Detecting the Sinusoidal Signal in Noise by the SVD Method[J]. ACTA Electronica Sinica, 2000, 28(6):108-110. (in Chinese)

[4] 魏　红,何佩琨. 利用 ESPIT 方法实现信号频率、相位的联合估计[J]. 北京理工大学学报,1999,19(3):348-351.
WEI Hong, HE Peikun. Frequency/Phase Estimation of Signal Via Rotational Invarince Techniques[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1999, 19(3):348-351. (in Chinese)

[5] 邸书玉,石要武,孟亚男. 正弦信号相位差估计的时域方法[J]. 吉林化工学院学报,2001,18(4):53-56.
DI Shuyu, SHI Yaowu, MENG Yanan. Time Domain Method of the Sinusoidal Signal Phase Difference Estimation[J]. Journal of Jilin Institute of Chemical Technology, 2001, 18(4):53-56. (in Chinese)

[6] 张海涛,任开春,涂亚庆. 科室质量流量计相位差的一种高精度估计方法[J]. 传感器技术,2005,,24(3):68-70.
ZHANG Haitao, REN Kaichun, TU Yaqing. High-precision Method of Phase Difference Estimation in Coriolis Mass Flow Meter[J]. Journal of Transducer Technology, 2005, 24(3):68-70. (in Chinese)

[7] Ma Y, Eidenschink T. Motion Induced Signals of Coriolis Flowmeters [J]. Flow Measurement & Instrumentation, 2001, 12(3): 213-217.

[8] Alin Achim, Panagiontis Tsakalides, Anastasios Bezerianos. SAR Image Denoising Via Bayesian Wavelet Shrinkage Based on Heavy-tailed Modeling[J]. IEEE Transctions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(8):1773-1784.

[9] JIN Guoliang, TANG Dajun. Uncertaties of Differential Phase Estimation Associated with Interferometric Sonars[J]. IEEE J Oceanic Engineering, 1996, 21(1):53-63.

(下转第 86 页)

44: 1369 - 1387.

[10] Kschischang F R, Pasupathy S. Some Ternary and Quaternary Codes and Associated Sphere Packings[J]. IEEE Trans Inf Theory, 1992, 38: 227 - 246.

(编辑:田新华)

Quaternary Self - orthogonal Code Chains and Construction of Quantum Error - correcting Codes

MA Yue - na , WANG Lei , ZHAO Xue - jun, FENG You - qian

(Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: The method of constructing quantum error - correcting code by the quaternary self - orthogonal sub - code chains and L - chains are investigated in this paper. Random searching method is used to find quaternary self - orthogonal codes and these self - orthogonal codes could form some self - orthogonal code chains. By using combinatorial method, quantum error - correcting codes are constructed in light of L - chains which are constructed by dual of these self - orthogonal codes. The code chains of these self - orthogonal sub - codes and the L - chains which are obtained from the dual of these self - orthogonal sub - codes of length n between 20 and 36 and n = 40, 45, 50, 55, 60 and dual distance five and six are determined. Some quantum codes of distance five and six are constructed by the obtained L - chains, some quantum error - correcting codes are new.

Key words: self - orthogonal code; self - orthogonal code chain; L - chain; quantum error - correcting code

(上接第 49 页)

[10] Zhang X D, Liang Y C. Prefiltering - based ESPRIT for Estimating Parameter of Sinusoids in Non - gaussian Noise[J]. IEEE Trans On Signal Processing, 1995, 43: 349 - 353.

(编辑:田新华,徐楠楠)

Phase Estimation Method of Sinusoidal Signal in Colored Noise

NING Hui[1], SHI Yao - wu[2]

(1. Institute of Aviation Equipment Academy, Beijing 10076, China; 2. College of Communication Engineering, JiLin University, Changchun 130022, Jilin, China)

Abstract: The phase estimation of sinusoidal signal in noise environments is extensively adopted in the field of radar, navigation and DOA estimation, etc. A sinusoidal signal phase estimation method - - - Singular Value Decomposition (SVD), based on cross - high - order cumulant, is proposed. The signal and noise subspace are obtained using SVD of cross - high - order cumulant matrix. The signal subspace is the optimum solution for signal detection and noise suppression. The high - order cumulant matrix of signal is a conjugated symmetric matrix, its left singular vector is identical with the right one, their amplitudes and frequencies are also the same. The cross - high - order cumulant matrix of sinusoidal signals with different phases is a unconjugated symmetric matrix, its left and right singular vector are different because of the phase difference existing among the harmonic signals. A very important theorem is demonstrated in this article, i. e. the phase angle of the left and the right singular vector inner - product of harmonic signal cross - high - order cumulant matrix is equal to the phase difference of sinusoidal signals. Based on this theorem, the method of SVD for phase estimation of sinusoidal signal is deduced. The availability of the method is verified by simulation.

Key words: cross - high - order cumulant; phase estimation; colored noise; SVD