

一类带有阶段结构的传染病模型定性分析

王伟, 李建全, 杨亚莉, 王国正
(空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘要:根据染病者在不同阶段具有不同的传染力以及不同阶段的染病者可以转化的特性,建立了一类带有阶段结构的传染病传播模型。借助再生矩阵求得了所建模型的基本再生数,并应用极限系统理论证得:当基本再生数不超过1时,模型仅存在全局稳定的无病平衡点;当基本再生数大于1时,无病平衡点不稳定,而且存在渐近稳定的地方病平衡点,当不考虑因病死亡率时,地方病平衡点是全局渐近稳定的。

关键词:传染病模型;基本再生数;稳定性;阶段结构

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2008)01-0086-03

在现实生活中,传染病广泛存在。通过对传染病的传播过程建立数学模型并进行分析,已是应用数学的一个主要研究方向。近年来,非线性传染率、病龄结构、年龄结构以及防控措施等^[1-5]都被引入模型之中,使得所建模型更加完善和贴近实际情形。对于染病周期较长的一些疾病,如艾滋病、肺结核和淋病等,在染病后的不同阶段往往具有不同的传染力,文献[6-7]等对此进行了相关的研究。但是,由于易感者个体的差异,他们在被感染后,不仅会有不同的染病能力,而且随着疾病的发展染病能力也会变化,这正是本文要讨论的问题。

1 模型与基本再生数

本文将总种群分为3个群体:易感者群体 S 和两类染病者群体 I_1 和 I_2 。假设易感者群体中的个体与两类染病者接触并被传染后,按一定的比例进入种群 I_1 和 I_2 ,同时由于病情的发展, I_1 群体中的染病者可向 I_2 群体转化。并假设群体 I_1 中的个体不会因染病而死亡,而群体 I_2 中的个体则会因染病死亡。当两类染病群体中的个体被治愈,均不具有免疫力,因此被治愈的染病者都重新进入易感者群体 S 。并假设所有新进人员都是易感者。在上述假设下,可得如下模型:

$$\begin{cases} S' = \mu A - \mu S - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ I_1' = pS(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - (\mu + \gamma_1 + \varepsilon) I_1 \\ I_2' = pS(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - (\mu + \gamma_2 + \alpha) I_2 + \varepsilon I_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: μA 表示易感者的输入率; μ 表示个体的自然死亡率; $\beta_i (i=1, 2)$ 表示染病者群体 I_i 的传染率; γ_i 表示染病者群体 I_i 的治愈率(或恢复率); p, q 分别表示易感者染病后向染病者群体 I_1 和 I_2 转化的概率, $p+q=1$; ε 表示染病者群体 I_1 向染病者群体 I_2 的转化率; α 表示染病者群体 I_2 的因病死亡率。除参数 α 非负外,其余参数均为正的。由系统式(1)易得: $\lim_{t \rightarrow \infty} (S + I_1 + I_2) \leq A$, 所以区域

$$\Omega = \{(S + I_1 + I_2) : S > 0, I_1 \geq 0, I_2 \geq 0, S + I_1 + I_2 \leq A\}$$

是系统式(1)的正不变集。因此,以下仅在集合 Ω 上讨论系统式(1)的动力学行为。

收稿日期:2007-01-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671209, 30670486)

作者简介:王伟(1983-),女,江苏徐州人,硕士生,主要从事生物数学及微分方程定性理论研究. E-mail: wangli0504@126.com

李建全(1965-),男,山西万荣人,教授,主要从事生物数学及微分方程定性理论研究.

为简单起见,记 $m = \mu + \gamma_1 + \varepsilon, n = \mu + \gamma_2 + \alpha$, 则系统式(1)就变成

$$\begin{cases} S' = \mu A - \mu S - S(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 \\ I_1' = pS(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - m I_1 \\ I_2' = qS(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - n I_2 + \varepsilon I_1 \end{cases} \quad (2)$$

应用文献[8]介绍的方法,利用再生矩阵可求得系统(2)的基本再生数 $R_0 = \frac{A[\beta_1 pn + \beta_2(qm + p\varepsilon)]}{mn}$ 。

2 模型的定性分析

令系统(2)中的方程为 0, 直接计算可得:

定理 1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 系统(2)在 Ω 上仅存在唯一的平衡点(无病平衡点) $P_0 = (A, 0, 0)$; 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)除无病平衡点 P_0 外还存在一个唯一的地方病平衡点 $P^* (S^*, I_1^*, I_2^*)$, 其中 $S^* = \frac{A}{R_0}, I_1^* = \frac{p\mu An}{mn - pn\gamma_1 - qm\gamma_2 - p\varepsilon\gamma_2} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), I_2^* = \frac{qm + p\varepsilon}{pn} I_1^*$ 。

由系统的 Jacobi 行列式及其特征方程可知系统的特征根均具有负实部, 再根据 Hurwitz 判据可得系统的局部稳定性定理:

定理 2 对于系统(2), 无病平衡点 P_0 当 $R_0 < 1$ 时局部渐近稳定, $R_0 > 1$ 时不稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的。

定理 3 当 $R_0 \leq 1$ 时, 系统(2)的无病平衡点 P_0 在 Ω 上全局稳定; 当 $R_0 > 1$ 且 $\alpha = 0$ 时, 系统(2)的地方病平衡点 P^* 在 Ω 内全局稳定。

证明 令 $V = \frac{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}{mn} I_1 + \frac{\beta_2}{n} I_2$, 则 $V'|_{(2)} = \left(\frac{R_0}{A} S - 1\right) (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)$, 因为 $S \leq A$ 所以有

$$V'|_{(2)} \leq (R_0 - 1) (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2)$$

当 $R_0 < 1$ 时, 有 $V'|_{(2)} \leq \rho (R_0 - 1) V$, 其中 $\rho = \min \left\{ \frac{\beta_1 mn}{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}, n \right\}$, 所以 $V(t) \leq V_0 e^{\rho(R_0 - 1)t}$ (其中 $V_0 = \frac{\beta_1 n + \beta_2 \varepsilon}{mn} I_1(0) + \frac{\beta_2}{n} I_2(0)$), 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ 。再根据 P_0 的局部稳定性知当 $R_0 < 1$ 时, P_0 在 Ω 上全局渐近稳定。

当 $R_0 = 1$ 时, $V'|_{(2)} = \left(\frac{S}{A} - 1\right) (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) \leq 0$ 。因为 $V'|_{(2)} = 0$ 等价于 $S = A$ 或 $\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2 = 0$ 所以在 Ω 上包含于 $\{(S, I_1, I_2) : V' = 0\}$ 的最大不变集是单点集 $\{P_0\}$ 。故当 $R_0 = 1$ 时, P_0 在 Ω 上也是全局渐近稳定的^[9]。

当 $\alpha = 0$ 时, 对于系统(2)有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S + I_1 + S_2) = A$ 。于是, 系统(2)的极限系统为

$$\begin{cases} I_1' = p(A - I_1 - I_2) (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - (\mu + \gamma_1 + \varepsilon) I_1 = P(I_1, I_2) \\ I_2' = q(A - I_1 - I_2) (\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) - (\mu + \gamma_2 + \varepsilon) I_2 + \varepsilon I_1 = Q(I_1, I_2) \end{cases} \quad (3)$$

取 Dulac 函数 $B = 1/(I_1 I_2)$, 则有

$$\frac{\partial(BP)}{\partial I_1} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I_2} = -\left(\frac{\beta_1}{I_2} + \frac{\beta_2}{I_1}\right) - (A - I_1 - I_2) \left(\frac{p\beta_2}{I_1^2} + \frac{q\beta_1}{I_2^2}\right) - \frac{\varepsilon}{I_2^2}$$

对于 $0 < I_1 + I_2 \leq A$, 有 $\frac{\partial(BP)}{\partial I_1} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I_2} < 0$ 。因此, 极限系统(3)在区域 $\{(I_1, I_2) : I_1 > 0, I_2 > 0, I_1 + I_2 \leq A\}$ 内不存在周期解^[10], 这说明当 $\alpha = 0$ 时系统(2)在 Ω 内也不存在周期解, 因此结合 P^* 的局部稳定性可知 P^* 在 Ω 内是全局渐近稳定的。

定理 3 的结论说明在疾病不致命的情形下, 地方病平衡点只要存在就全局稳定。对于疾病致命的情形, 数值模型显示地方病平衡点仍然是全局稳定的, 其理论证明需要构造适当的 Liapunov 函数。这留作以后进行。

3 结束语

本文通过分析一类带有两阶段的传染病模型,得出了疾病是否灭绝的阈值,以及无病平衡点全局稳定的充要条件,并就疾病不致命情形下,得到了地方病全局稳定的充要条件。但对疾病致命情形,仅得到局部结果,对其全局性结果有待进一步研究。

参考文献:

- [1] 马知恩,周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社,2004.
 MA Zhien, ZHOU Yicang. Mathematical Modeling and Research of Epidemic Dynamics[M]. Beijing: Scientific Press, 2004. (in Chinese)
- [2] Li X, Gupur G, Zhu G. Mathematical Theory of Age - Structured Epidemic Dynamics [M]. Hertfordshire: Research Information Ltd, 2002.
- [3] Wang Wendi, Ma Zhien. Global Dynamics of an Epidemic Model With Delay [J]. Nonlinear Analysis: Real world and Applications, 2002, 3(4): 809 - 834.
- [4] Zhang J, Ma Z. Global Dynamics of an SEIR Epidemic Model With Saturating Contact rate [J]. Math Biosci, 2003, 185(1): 15 - 32.
- [5] 李建全,王拉娣,杨友社. 两类含非线性传染率的传染病模型的定性分析[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2004, 5(1):84 - 88.
 LI Jianquan, WANG Ladi, YANG Youshe. Qualitative Analysis of two Epidemic Models With Non - Linear Infectivity [J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Scientific Edition, 2004, 5(1):84 - 88. (in Chinese)
- [6] Hyman J M, Li J, Stanley E A. The Differential Infectivity and Staged Progression Models for the Transmission of HIV [J]. Math Biosci, 1999, 155(1):77 - 109.
- [7] Ma Z, Liu J, Li J. Stability Analysis for Differential Infectivity Epidemic models[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4(4):841 - 856.
- [8] Driessche P, Watmough J. Reproduction Numbers and Sub - Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. Math Biosci, 2002, 18(1): 29 - 48.
- [9] LaSalle J P. The Stability of Dynamical Systems [M]. Philadelphia: SIAM, 1976.
- [10] Thieme H R. Convergence Results and a Poincare - Bendixson Trichomy for Asymptotically autonomous Differential Equations [J]. J Math Biol, 1992, 30(3):755 - 763.

(编辑:田新华)

Qualitative Analysis of an Epidemic Model with Stage Structure

WANG Wei, LI Jian - quan, YANG Ya - li, WANG Guo - zheng
 (The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: According to the specialty of infection transmission that infected individuals have different infectivities in different stages and that infected individuals can move from a stage into the other stage with the development of infection, an epidemic model with stage is established. The basic reproduction number is found by means of the next generation matrix. By applying the theory of asymptotically autonomous systems, the following results are obtained: the disease - free equilibrium is globally asymptotically stable when the basic reproduction number is not greater than 1; the endemic equilibrium is locally asymptotically stable when the basic reproduction number is greater than 1. When the disease is not fatal, the endemic equilibrium is globally asymptotically stable if it exists.

Key words: epidemic model; basic reproduction number; stability; stage structure