

# 非平稳时间序列的陀螺随机漂移数据处理方法

谢 聂, 朱家海, 胡炜涛  
(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:**以挠性陀螺的随机漂移为研究对象,采用非平稳时间序列分析法和基于小波分解的平稳时间序列分析法,建立相应的随机漂移模型。实验研究结果表明,论文采用的建模方法,具有建模精度高、符合陀螺随机漂移实际特性的特点。

**关键词:**陀螺;随机漂移;非平稳时间序列;小波分解

**中图分类号:** V241.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2008)01-0014-04

陀螺随机漂移的数据处理与分析方法有很多学者进行过研究<sup>[1-10]</sup>,从数理统计学的角度看,其漂移值在大多数情况下都属于非平稳时间序列<sup>[1]</sup>。建立陀螺随机漂移数学模型的基本方法一般有三种:一是采用平稳时间序列分析法<sup>[2]</sup>,由于陀螺随机漂移属于非平稳时间序列,故该方法在一般情况下会产生较大的建模误差;二是采用非平稳时间序列分析法<sup>[3]</sup>,但该方法建立的模型过于复杂,实际使用中还需根据应用背景进行必要的简化;三是基于小波分解的平稳时间序列分析法<sup>[4]</sup>,由于该法充分结合了小波分析和平稳时序分析的优点,故具有建模精度高,更符合陀螺随机漂移实际的特点。

## 1 基于 ARIMA 模型法的随机漂移数据处理

ARIMA 模型法是非平稳时间序列分析法中的传统建模方法之一,其基本思想是通过差分方法将采样数据的不确定性部分从非平稳时间序列中剔除,然后再建立 ARMA 模型<sup>[5]</sup>。

ARIMA( $n, d, m$ )模型的一般形式为

$$\varphi(B)(1-B)^d x_t = \theta(B) a_t \quad (1)$$

对非平稳时间序列 $\{x_t\}$  ( $t=1, 2, \dots, N$ ) 进行  $d$  阶差分,根据差分算子  $\nabla$  与后移算子  $B$  的关系( $\nabla = 1 - B$ ),可得差分序列:

$$\nabla^d x_t = (1-B)^d x_t \quad (t=d+1, d+2, \dots, N) \quad (2)$$

当得到的差分序列 $\{\nabla^d x_t\}$  是平稳时序时,则可对 $\{\nabla^d x_t\}$  建立 ARMA 模型,

$$\varphi(B) \nabla^d x_t = \theta(B) a_t \quad (3)$$

再将 $(\nabla = 1 - B)$  代入式(3)即可得到式(1)所示的 ARIMA( $n, d, m$ )模型。

ARIMA( $n, d, m$ )模型实际上是用二项式差分 $(1-B)^d$  消除了非平稳时序中的多项式趋向。从系统的角度来分析,就是分离出了系统中的  $d$  个相同的一阶环节,从而可按平稳时间序列分析法来建模。

对在实验室条件下,采用固定位置实验法得到的某型挠性陀螺随机漂移测试数据(图1)构成的陀螺随机漂移序列 $\{x_t\}$  进行一阶差分处理,得图2所示的差分结果。

对图2所示的差分序列 $\{(1-B)x_t\}$ ,进行平稳性和正态性检验,并进行零化处理,得到差分残差序列 $\{w_t\}$ 。由于 $\{w_t\}$  是平稳时间序列,故可用平稳时间序列分析法建立数学模型。根据文献[5]的方法,求得 $\{w_t\}$  的适用模型为 AR(15)模型,考虑到前面剔除的不确定性部分,将均值代入 AR(15)模型,从而可以得到原

收稿日期:2007-09-17

作者简介:谢 聂(1977-),男,湖北随州人,讲师,博士生,主要从事导航研究. E-mail:408lab@163.com  
朱家海(1962-),男,安徽马鞍山人,教授,主要从事航空仪表、惯性导航等研究.

始数据序列  $\{x_t\}$  的适用模型为 AR(16) 模型。

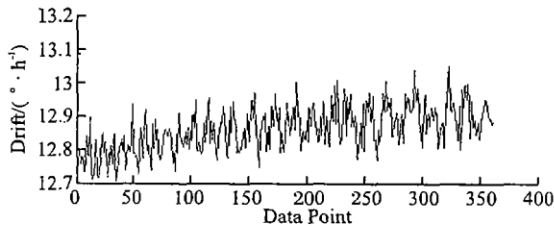


图 1 原始测试数据

Fig. 1 Raw measurement of gyroscope output

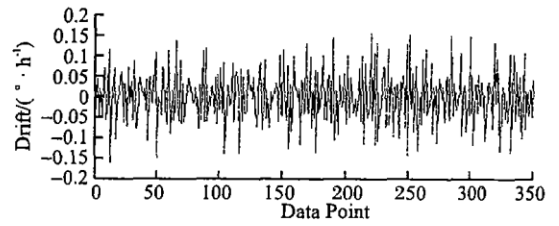


图 2 一阶差分结果

Fig. 2 1st order difference of gyroscope output

$$x_t = 0.0029 + 0.2997x_{t-1} + 0.14496x_{t-2} + 0.13799x_{t-3} - 0.10757x_{t-4} - 0.042046x_{t-5} + 0.020433x_{t-6} - 0.023312x_{t-7} + 0.016167x_{t-8} + 0.10329x_{t-9} + 0.077241x_{t-10} + 0.062641x_{t-11} + 0.027448x_{t-12} - 0.081581x_{t-13} + 0.15623x_{t-14} + 0.069783x_{t-15} + 0.13863x_{t-16} + a_t \quad (4)$$

用式(4)时序模型对陀螺漂移序列进行 10 步预测,得图 3 所示的预测曲线,图中的实线为实测结果,虚线为预测结果。图 4 为预测误差曲线。

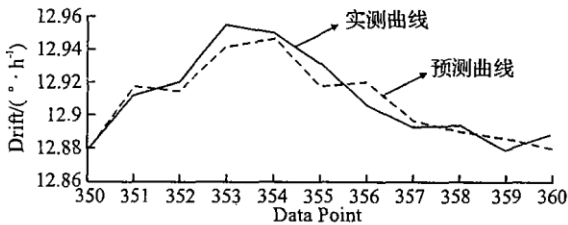


图 3 预测曲线和实测曲线  
Fig. 3 Raw and forecast curve

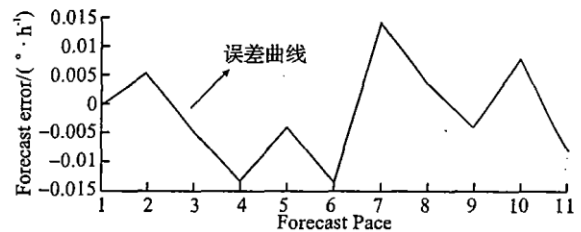


图 4 预测误差曲线  
Fig. 4 Forecast error curve

从图 3、图 4 可以看出,采用 ARIMA 模型法建立的 AR(16) 模型,其预测曲线与实测曲线的吻合较好。以预测误差的均方根值作为评价指标,AR(16) 模型的预测误差均方根值仅为  $2.78e-3$ 。上述研究说明,在考虑了陀螺随机漂移中包含的趋势项后,采用 ARIMA 模型法建立的陀螺随机漂移模型能准确反映陀螺随机漂移的特性。

## 2 基于小波分解和平稳时间序列分析法的陀螺随机漂移数据处理

小波分析是一种信号的时间-频率分析方法,具有多分辨率分析的特点,是现代信号处理技术中分析和处理非平稳信号的有力工具。根据小波分析理论,通过小波分解,可将非平稳时间序列分解为多层近似意义上的平稳时间序列,从而可用平稳时间序列分析法来处理。

### 2.1 信号的小波分解

信号的小波分解可通过 Mallat 算法来实现,Mallat 算法表述为<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} c_{j+1} = Hc_j \\ d_{j+1} = Gc_j \end{cases}, \quad j=0,1,2,\dots,J \quad (5)$$

式中:  $J$  为最大分解层数;  $H$  和  $G$  分别为低通滤波器和高通滤波器。

将  $c_0$  定义为原始信号  $X$ ,则通过式(5)可以将  $X$  分解为  $d_1, d_2, \dots, d_J$  和  $c_j, c_j, d_j$  分别为原始信号在分辨率  $2^{-j}$  下的逼近信号和细节信号。各层细节信号和逼近信号是原始信号  $X$  在相邻不同频率段上的成份,其非平稳性比原始信号大为降低,可以近似理解为平稳信号。因此,通过小波分解,可以将非平稳时间序列分解为多层近似的平稳时间序列,根据时间序列分析理论,对分解后得到的各层近似的平稳时间序列可以用 AR( $p$ ) 模型建模、预测。

采用 Mallat 算法进行小波分解,每一次分解后得到的细节信号和逼近信号比分解前的信号数量减少一倍,但经 Mallat 算法分解后的信号可以采用重构算法进行重构。

在小波分解算法中,分解层数越多,信号的频率段划分就越细,细节信号和逼近信号的平滑性和平稳性

也越好。但由于在分解过程中必然会存在计算上的误差,故分解层数越多,计算误差也会越大。因此在选择分解层数时,一般不宜过多,以3-5层为最佳。

## 2.2 基于小波分解的陀螺随机漂移数据处理

### 2.2.1 信息重构

令  $X: \{x_1, x_2, \dots\}$  是非平稳时间序列的陀螺随机漂移,对其进行小波分解,且对分解后的各层时间序列分别进行重构<sup>[7]</sup>,可得:

$$X = G_1 + G_2 + \dots + G_N + X_N \quad (6)$$

式中:  $G_1: \{g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, \dots\}$ ;  $G_2: \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, \dots\}$ ;  $\dots$ ;  $G_N: \{g_{N,1}, g_{N,2}, g_{N,3}, \dots\}$  分别为第一层、第二层...第  $N$  层细节信号的重构结果;  $X_N: \{x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dots\}$  为第  $N$  层逼近信号的重构结果。

### 2.2.2 信息预测

由式(6),可得:

$$x_i = g_{1,i} + g_{2,i} + \dots + g_{N,i} + x_{N,i} \quad (7)$$

若已知  $\{t_i | i \leq M\}$  时刻的  $x_i$  值,要预测  $k$  步以后的状态值  $x_{M+k}$ ,由式(7)可得:

$$x_{M+k} = g_{1,M+k} + g_{2,M+k} + \dots + g_{N,M+k} + x_{N,M+k} \quad (8)$$

由于  $G_1, G_2, \dots, G_N$  和  $X_N$  可视为平稳时间序列,故可建立相应的  $AR(p)$  模型,因此对  $g_{1,M+k}, g_{2,M+k}, \dots, g_{N,M+k}$  和  $x_{N,M+k}$  进行预测可按如下步骤进行:

- 1) 对  $G_j (1 \leq j \leq N)$  和  $X_N$  建立各自的  $AR(p)$  模型,用已知的  $g_{j,i}, x_{N,i} (j \leq N, i \leq M)$  对模型进行参数估计;
- 2) 对建立的  $AR(p)$  模型进行适用性检验;
- 3) 用  $AR(p)$  模型对  $g_{j,M+k}$  和  $x_{N,M+k}$  分别进行预测,得到相应的预测值  $\hat{g}_{j,M+k}$  和  $\hat{x}_{N,M+k}$ 。

设  $g_{1,M+k}, g_{2,M+k}, \dots, g_{N,M+k}$  和  $x_{N,M+k}$  的预测值分别为  $\hat{g}_{1,M+k}, \hat{g}_{2,M+k}, \dots, \hat{g}_{N,M+k}$  和  $\hat{x}_{N,M+k}$ ,则由式(8)可得原始时间序列  $X$  的预测值为

$$\hat{x}_{M+k} = \hat{g}_{1,M+k} + \hat{g}_{2,M+k} + \dots + \hat{g}_{N,M+k} + \hat{x}_{N,M+k} \quad (9)$$

### 2.2.3 实验分析

对在实验室条件下,采用固定位置实验法得到的某型挠性陀螺随机漂移测试数据(图5)用 db3 小波分析法进行4层小波分解,再对第4层逼近信号和各层细节信号进行重构,结果如图6所示。

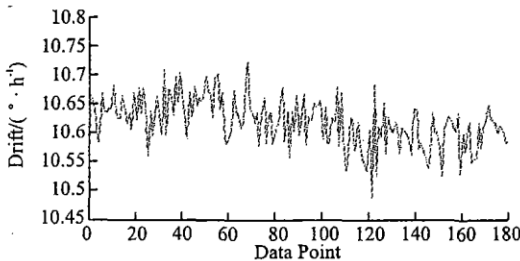


图5 原始测试数据

Fig. 5 Raw measurement of gyroscope output

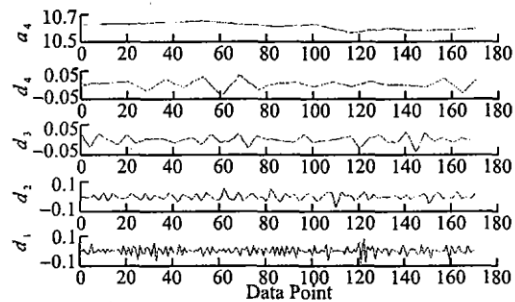


图6 分解后的逼近信号和细节信号

Fig. 6 Wavelet decomposition of gyroscope output

将第4层逼近信号  $a_4$  和各层细节信号  $d_4, d_3, d_2, d_1$  近似看作平稳时间序列,分别建立  $AR(3)$  模型,在确定模型阶次、参数估计和模型适用性检验后,分别进行预测,最后根据式(9)得原始时间序列的预测值。图7为10步预测曲线,其中实线为实测结果,虚线为预测结果。图8为预测误差曲线。

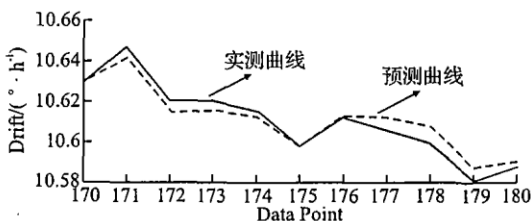


图7 预测曲线和实测曲线

Fig. 7 Raw and forecast curve

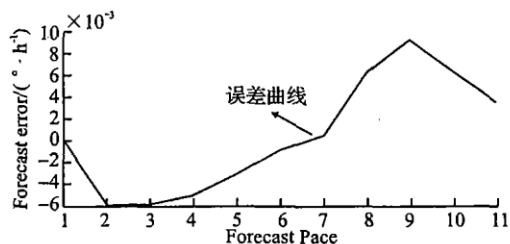


图8 预测误差曲线

Fig. 8 Forecast error curve

从图7和图8可以看出,采用小波分解法并结合平稳时间序列分析法对陀螺随机漂移进行建模、预测,其预测曲线与实测曲线能够很好地吻合。同样以预测误差的均方根值作为评价指标,采用小波分解法的预测误差均方根值为 $5.32e-4$ 。可见,用小波分析法研究具有非平稳时间序列特征的陀螺随机漂移,更能准确反映陀螺随机漂移的实际特性。需要注意的是:小波分析法的建模、预测精度与分解层数有关,分解层数越多,信号划分越细,细节信号和逼近信号的平滑性、平稳性越好,建模、预测精度就越高,但分解层数的增加必然带来更大的计算量和更多的计算误差。因此,合理选择小波分解层数是应用该方法的关键。

### 3 结论

本文分别采用非平稳时间序列分析法和基于小波分解的平稳时间序列分析法,对具有非平稳时间序列特征的陀螺随机漂移,进行建模和预测分析。实验结果表明,采用上述两种方法建立的陀螺漂移模型,具有建模、预测精度高,准确反映陀螺随机漂移特性的特点。另外,本文虽然是以挠性陀螺为研究对象得出的结论,但其方法仍不失一般性,可以用于其他类型陀螺的随机漂移建模和预测研究。

#### 参考文献:

- [1] Oravetz A S. Stationary and Nonstationary Characteristics of Gyro Drift Rate[J]. AIAA Journal, 1970, 10:1766 - 1772.
- [2] 周志杰,胡昌华,韩晓霞,等. 基于平稳时间序列分析的陀螺漂移性能预测的研究及实现[J]. 导弹与航天运载技术, 2004,27(5):43 - 47.  
ZHOU Zhijie, HU Changhua, HAN Xiaoxia, et al. Research on a Method for Forecasting Gyro's Drift Performance Based on Stationary Time Series Analysis[J]. Missiles And Space Vehicles, 2004, 27(5):43 - 47. (in Chinese)
- [3] 臧荣春,崔平远. 陀螺随机漂移时间序列建模方法研究[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(8):1845 - 1847.  
ZANG Rongchun, CUI Pingyuan. Research on Time Series Modeling Method for Gyroscope Random Bias[J]. Journal of System Simulation, 2005, 17(8):1845 - 1847. (in Chinese)
- [4] 徐丽娜,邓正隆. 小波分析用于陀螺仪漂移测试信号分析的研究[J]. 中国惯性技术学报,2003,11(1):49 - 53.  
XU Lina, DENG Zhenglong. Application of Wavelet Analysis in Measured Signal Analysis of Gyro Drift [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2003,11(1):49 - 53. (in Chinese)
- [5] 杨叔子,吴 雅. 时间序列分析的工程应用[M]. 武汉:华中理工大学出版社,1991.  
YANG Shuzi, WU Ya. Time Series Analysis in Engineering Application[M]. Wuhan:Huazhong University of Science and Technology Press,1991. (in Chinese)
- [6] Mallat S G A. A theory for multiresolution signal decomposition;The wavelet representation [J]. IEEE Tran on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1989,11(7):674 - 693.
- [7] 徐 科,徐金梧,班小娟. 基于小波分解的某些非平稳时间序列预测方法[J]. 电子学报, 2001, 29(4): 566 - 568  
XU Ke, XU Jinwu, BAN Xiaojuan. Forecasting of Some Non - Stationary Time Series Based on Wavelet Decomposition[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(4): 566 - 568. (in Chinese)
- [8] 朱家海. 挠性陀螺和激光陀螺测试与数据处理技术[D]. 西安:空军工程大学,2006.  
ZHU Jiahai. Research on Testin and data Processing of Flexible and Laser gyro[D]. Xi'an: Airforce Engineering University 2006. (in Chinese)
- [9] George E P Box, Gwilym M Jenkins, Gregory C Reinsel. Time Series Analysis Forecasting and Control[M]. Beijing:China Statistic Publishing Company,1997.
- [10] Jennifer Jackson, Walter McHargue,Neau Boehmer. Gyro automatic test station upgrade: twenty year old technology grows up [J]. IEEE Systems Readiness Technology Conference, 1999,(8):549 - 555.

(编辑:姚树峰)

## Research on Data Processing of Gyro Random Drift of Non - stationary Time Series

XIE Nie, ZHU Jia - hai, HU Wei - tao

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

**Abstract:** To build an appropriate mathematic model of the random drift of flexible gyro, two methods are discussed, using non - stationary time series analysis and using stationary time series analysis based on wavelet decomposition. The experimentation results indicate that the two methods are accurate and effective.

**Key words:** gyro; random drift; non - stationary time series; wavelet discomposition