

FitzHugh — Nagumo 神经元模型非阈下响应的随机共振

张广军^{1,2}, 徐健学¹, 王相波², 姚宏²

(1. 西安交通大学 航天航空学院机械结构强度和振动国家重点实验室, 陕西 西安 710049; 2 空军工程大学 理学院, 陕西 西安 710051)

摘要:研究了当 FitzHugh — Nagumo (FHN) 神经元模型在弱信号激励下只有阈上振荡响应时的随机共振。研究表明:随着 FHN 神经元模型的分岔参数的增加,发生了一个由两个吸引子(阈上振荡和阈下振荡)变化到一个吸引子(阈上振荡)的分岔;当 FHN 神经元模型的分岔参数位于分岔点的右边时,在弱信号激励下系统的响应只有阈上振荡存在,此时在外噪声或者内噪声的调制下,系统响应的能量向输入信号频率处集中,而信噪比随噪声强度的变化曲线呈现出单峰曲线,随机共振发生了,并且此时随机共振发生的机制是由于系统运动在分岔点左右三个吸引子(两个在分岔前一个在分岔后)之间的跃迁而产生的。

关键词:随机共振;吸引子;非阈下响应;跃迁

中图分类号: O324 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009 - 3516(2006)04 - 0079 - 03

大量的研究发现神经元在信息的编码与传递过程中可以通过随机共振对噪声环境中的弱信号进行放大,研究发现发生 Hopf 分岔的 FHN 神经元模型在分岔发生前^[1]和分岔发生后^[2]在外噪声的作用下发生了随机共振。而在非线性动力系统工作的环境里,除了存在外部的噪声外,还存在内噪声,如热噪声等,内噪声对系统的分岔参数产生干扰,使之发生随机变化。文献[3]、[4]研究了当 FHN 神经元模型的分岔参数在 Hopf 分岔点的左侧,系统的响应只有阈下振荡的响应时,在内噪声的作用下,系统的随机共振。我们的研究发现:FHN 神经元模型的分岔参数增加到一定的程度时,系统的响应只有幅值很大的阈上振荡存在,但其与输入弱信号的相关性很弱。此时,FHN 神经元模型对弱信号的检测机理尚不清楚,因此,本文重点研究了 FHN 神经元模型在非阈下响应的随机共振极其发生的机理。

1 FHN 神经元模型的分岔特性

参考文献[2],周期激励的 FHN 神经元细胞的数学模型为

$$\begin{cases} \varepsilon dv/dt = v(v-a)(1-v) - w \\ dw/dt = v - dw - b + r\sin(\beta t) \end{cases} \quad (1)$$

变量 v 为快变的膜电压变量, w 为慢变的恢复变量。在本文中我们取 $\varepsilon = 0.005$, $d = 1.0$, $\beta = 7.5$, $a = 0.5$ 。如果变量 v 正向穿越放电阈值 $v_{th} = 0.5$ 时,即认为发生了放电。对于没有激励的 FHN 模型,有不动点 (v_0, w_0) , 其中 v_0 是方程 $v_0(v_0 - a)(1 - v_0) = v_0 - b$ 的实根, $w_0 = v_0 - b$ 。由参考文献[1]、[2]可知, $b < 0.2623$ 时,无激励 FHN 模型只有一个稳定不动点;当 $b = 0.2623$ 时,发生超临界 Hopf 分岔; $b > 0.2623$ 时,系统有一稳定的极限环和一个不稳定的平衡点。

FHN 神经元细胞模型在有弱信号激励时的动力学特性与参数 b 和激励的幅值 r 均有关系,以 b 为分岔参数和以 r 为分岔参数对其分岔特性进行研究都是可行的,并且所得的结果是一致的^[3,4]。‘研究表明:FHN 模型在弱周期信号的激励下,当激励的幅值 $r = 0.01$,当 $b > 0.2624$ 时,系统由双吸引子(阈上振荡和阈

收稿日期:2005 - 09 - 09

基金项目:国家自然科学基金重点项目资助(10432010)

作者简介:张广军(1967 -),男,河南商丘人,博士,主要从事非线性动力学的研究。

下振荡)共存变化为只有一个阈上振荡的吸引子。周期激励幅值的改变可以使 FHN 模型的分岔点的位置发生移动,例如当 $r=0.029 2$ 时,当 $b > 0.2466 8$ 示,系统只有一个阈上振荡的吸引子^[3-4]。由此可见,FHN 神经元模型在其分岔点的左右两侧存在不同的吸引子。

2 FHN 神经元模型非阈下响应的随机共振

当系统的分岔参数在只存在阈上振荡响应的区域内且在分岔点的小邻域内时,系统在微弱的内噪声的摄动下,分岔参数在分岔点的两侧随机地变化,尽而使系统的运动在分岔发生前后的吸引子之间跃迁^[3-4]。当系统在微弱的外噪声的摄动下,由于分岔点的移动使系统的运动在分岔发生前后的吸引子之间跃迁^[3-4]。为此,本文给系统施加高斯分布的白噪声,其均值和自相关函数分别为

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = 0.0 \\ \langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s) \end{cases} \quad (2)$$

本文对外噪声和内噪声,噪声强度分别为 D_e 和 D_i 。

为了方便地对系统施加内噪声,对方程(1)进行变换: $v = v_1 + v_0, w = w_1 + w_0$,变为

$$\begin{cases} \varepsilon dv/dt = (v_1 + v_0)(v_1 + v_0 - a)(1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0) \\ dw_1/dt = v_1 - dw_1 + r\sin(\beta t) \end{cases} \quad (3)$$

式中 v_0 和 w_0 是方程(1)的不动点,并且是分岔参数 b 的函数。

对于 FHN 神经元模型,加上周期激励、外噪声和对参数 b 施加的内噪声后,系统的随机微分方程为

$$\begin{cases} \varepsilon dv_1/dt = (v_1 + v_0)(v_1 + v_0 - a)(1 - (v_1 + v_0)) - (w_1 + w_0) \\ dw_1/dt = v_1 - dw_1 + r\sin(\beta t) + D_e \xi_1(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中: $b = b_0 + D_i \xi_2(t); v_0 = \sqrt[3]{-\frac{0.5-B}{2} + \sqrt{(\frac{0.5-B}{2})^2 + (\frac{0.75}{3})^3}} - \sqrt[3]{-\frac{0.5-B}{2} + \sqrt{(\frac{0.5-B}{2})^2 + (\frac{0.75}{3})^3}};$

$w_0 = v_0 - b$ 。 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是互不相关的高斯白噪声。

我们采用四阶龙格-库塔法对方程(3)进行了数字仿真,计算步长为 $\Delta t = 0.001$ s。计算出系统的响应后,参照文献[3]、[4],信噪比定义如下:

$$R_{sd} = \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{f_0 - \Delta f}^{f_0 + \Delta f} S(f) df \right) / S_N(f_0) \quad (5)$$

式中: $S(f)$ 为系统响应的功率谱密度, f_0 为弱周期激励的频率,分母 $S_N(f_0)$ 为响应的功率谱密度在弱周期激励频率处单位频率上背景噪声的累积值。

系统以 b 为分岔参数且位于分岔点的右侧时,分别在内噪声和外噪声单独作用下系统信噪比随噪声强度的变化情况如图 1、2 所示。由图可见,SRN 随噪声强度的变化曲线为一单峰曲线,随机共振发生了。

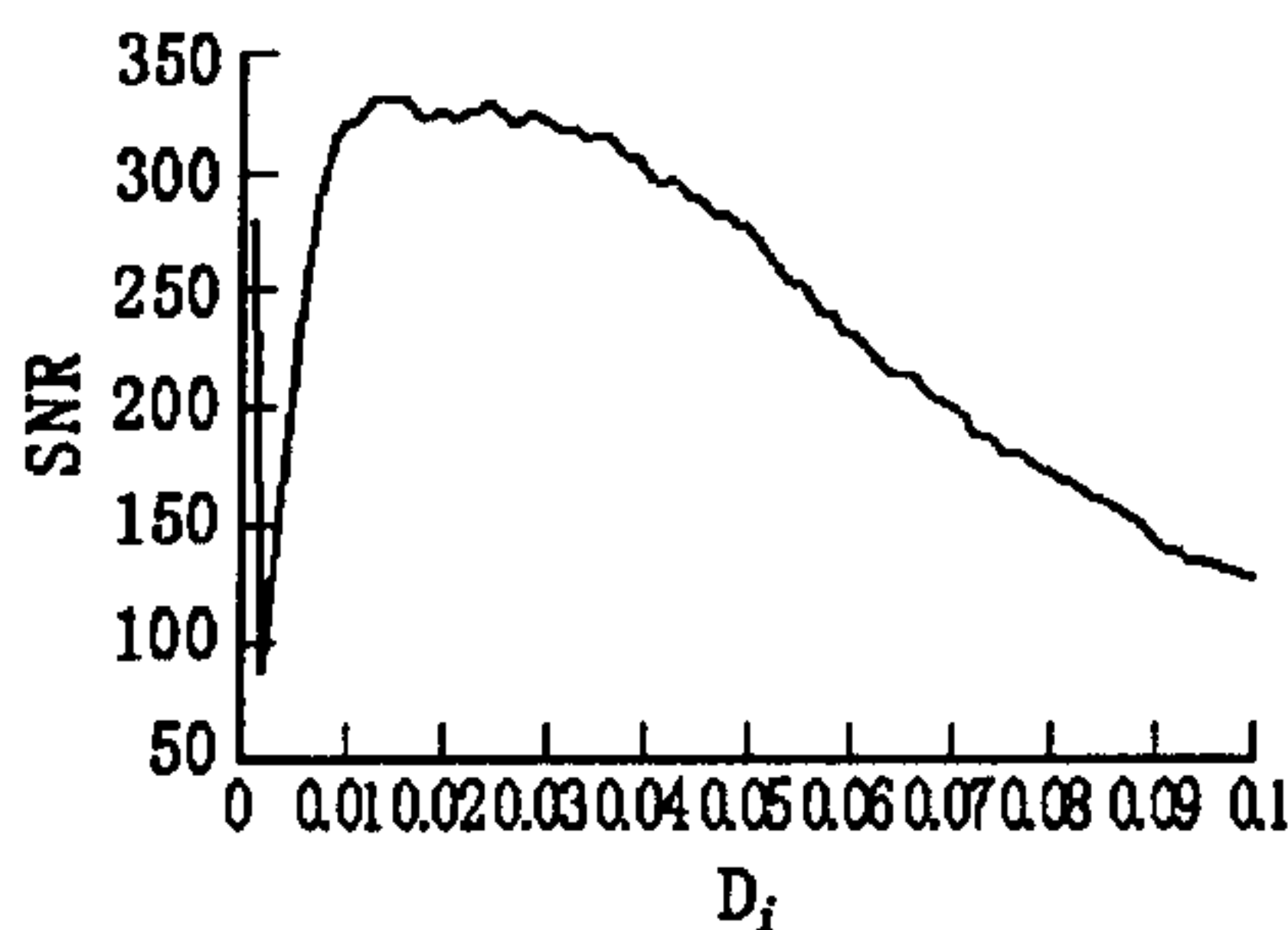


图1 在参数噪声单独作用下,FHN 模型非阈下响应的随机共振, $b_0 = 0.240 0, r = 0.029 2, \beta = 7.5$

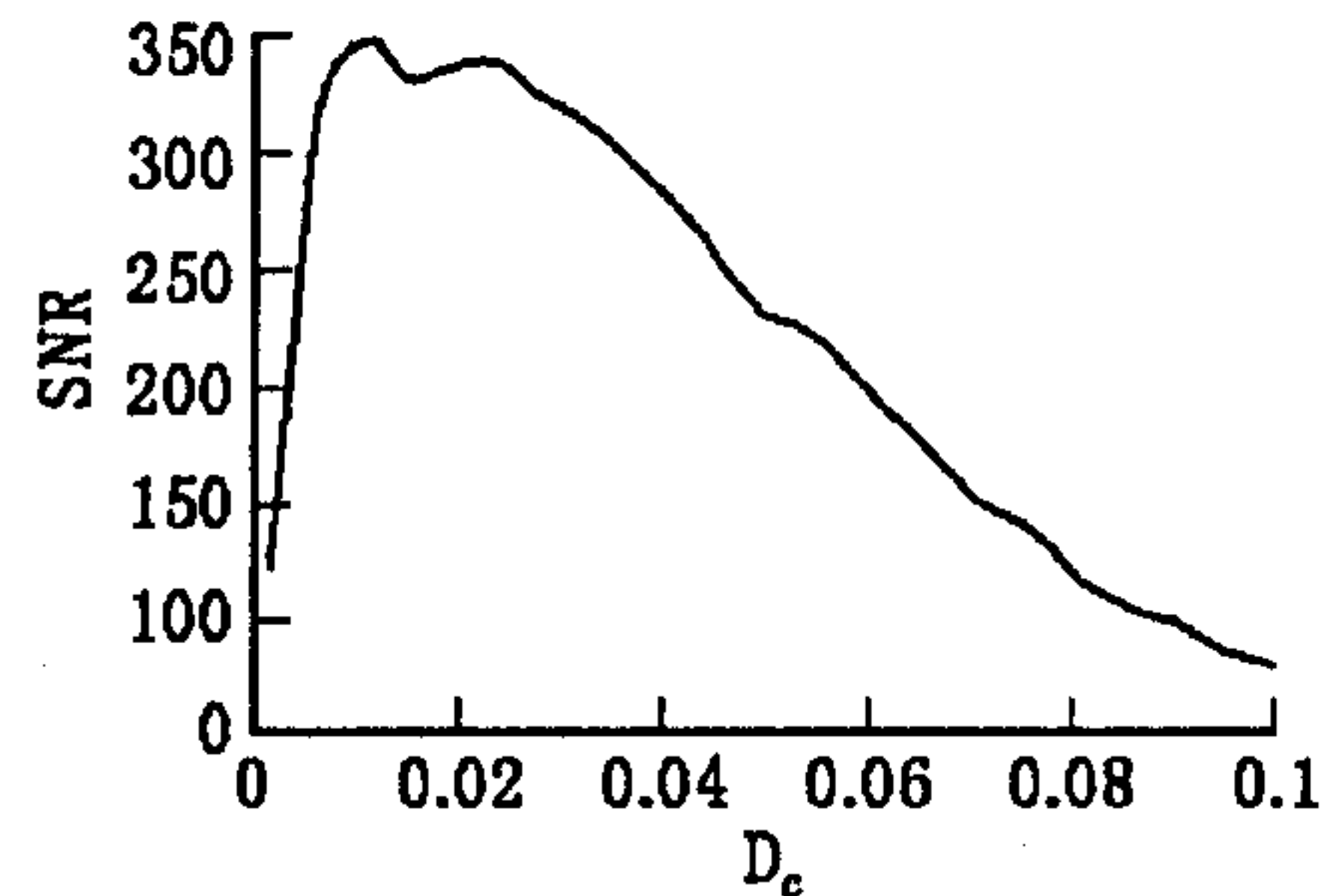


图2 在激励噪声单独作用下,FHN 模型非阈下响应的随机共振, $b = 0.246 0, r = 0.029 2, \beta = 7.5$

3 结论

本文研究了 FHN 神经元模型非阈下响应的随机共振,可得出以下结论:随着 FHN 神经元模型分岔参数的增加,发生了一个由两个吸引子(阈上振荡和阈下振荡)变化到一个吸引子(阈上振荡)的分岔;当 FHN 神

神经元模型的分岔参数位于上述分岔点右侧且距分岔点很近时,系统只有一个阈上振荡地吸引子。此时,FHN 神经元模型分别在内部噪声或者外部噪声的单独作用下,发生了随机共振,FHN 神经元模型同样通过随机共振检测噪声环境中的弱信号;FHN 神经元模型非阈下响应的随机共振发生的机制是系统的运动在分岔前后吸引子之间的跃迁,当跃迁的频率与输入信号的频率一致时,随机共振发生了。

参考文献:

- [1] Longtin A. Stochastic resonance in neuron models[J]. J Stat Phys, 1993, 70: 309 - 327.
- [2] Gong P L, Xu J X. Global dynamics and stochastic resonance of forced FitzHugh - Nagumo neuron model[J]. Phys Rev E, 2001, 63: 031906 - 031916.
- [3] 张广军,徐健学. 非线性动力系统分岔点邻域内随机共振的特性[J]. 物理学报, 2005, 54 (2): 557 - 564.
- [4] Zhang G J, Xu J X. Stochastic Resonance induced by novel random transitions of motion of FitzHugh - Nagumo Neuron Model [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2005, 23(4): 1439 - 1449.

(编辑:姚树峰)

Stochastic Resonance of Non - sub - threshold Response of FHN Neuron Model

ZHANG Guang - jun^{1,2}, XU Juan - xue¹, WANG Xiang - bo², YAO Hong²

(1. School of Aerospace Xi'an Jiao Tong University; 2. The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: In this paper stochastic resonance of FHN neuron model when there exists only the response of suprathreshold oscillation with weak periodic signal is studied. The results of research show: A bifurcation of transition from two attractors (suprathreshold oscillation and sub - threshold oscillation) to one attractor (suprathreshold oscillation) occurs with the increase of bifurcation parameter, when the bifurcation parameter of system is on the right side of bifurcation point there exists only the response of suprathreshold oscillation in FHN neuron model excited by weak signal, in this case, under the modulation of external noise or internal noise, the energy of system response concentrating on the frequency of input signal, and the curve of signal - noise - ratio (SNR) of system response vs noise extensity is a mon - peak curve, stochastic resonance occurs, and the mechanism of stochastic resonance in this case is related to the transitions among the three attractors (two before bifurcation and one after it) on the left and right sides of bifurcation point.

Key words: stochastic resonance; attractor; non - sub - threshold response; transition