

# 飞机大攻角俯仰飞行的稳定域分析

邹毅<sup>1,2</sup>, 姚宏<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学, 湖南长沙 410073; 2. 空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

**摘要:**基于大攻角飞行条件下的动力学方程,定性分析了飞机在大攻角条件下作俯仰飞行的动力学特性。提出了在不同参数匹配条件下的飞行稳定性,并据此划分了飞机的飞行稳定域。

**关键词:**大攻角;俯仰飞行;稳定域

**中图分类号:** V211 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2006)04-0011-02

现代战斗机的设计强调飞机在超过失速迎角时也具有机动能力,而大攻角时非定常气动力特性对飞机机动能力有很大影响。且飞机在大攻角飞行时,容易产生失速、自激振荡等失稳现象而诱发飞行事故。因此,研究飞机在大攻角飞行条件下的动力学特性和稳定性显得极为重要。在大攻角飞行中,气动力特性已呈现出明显的非线性,而已有的研究大多是建立在传统气动力数学模型即线性方程基础上的。这已不能适应大攻角下的飞行特性研究,必须考虑非线性项以及飞行中的气动力响应。

## 1 系统动力学模型

飞机的动力学特性是指飞机在飞行中所出现的动力学行为,理论分析可由非线性动力学方程结合常微分方程的定性理论得出,并可由此对飞行稳定性进行分析。飞行稳定性是考虑飞机做刚体式运动的稳定性问题。已知飞机的运动稳定性方程式为  $I d^2 \bar{\alpha} / dt^2 - (C_{m\dot{\alpha}} + C_{m\alpha\dot{\alpha}} \bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} - (C_{m\alpha} + C_{m\alpha^2} \bar{\alpha} / 2) \bar{\alpha} = 0$ 。式中: $I$ 为转动惯量; $\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_m$ 表示攻角变化量; $C_{m\alpha}$ 、 $C_{m\dot{\alpha}}$ 、 $C_{m\alpha^2}$ 和  $C_{m\alpha\dot{\alpha}}$ 为动导数,是飞行器做低频俯仰运动时的气动力响应,以  $k$  表示频率,在  $0 < k \ll 1$  的狭窄频谱内,是不随  $k$  值变化的参数,而只取决于平衡攻角<sup>[1]</sup>。 $I$ 的取值根据机种不同会有变化。 $C_{m\alpha}$ 、 $C_{m\dot{\alpha}}$ 和  $C_{m\alpha\dot{\alpha}}$ 也有其各自的量级,这些气动力响应通常为负值。为了分析方便,可将方程化简为  $d^2 x / dt^2 - ax - bxx - cx - dx^2 = 0$ 。式中: $x = \bar{\alpha}$ ;  $C_{m\dot{\alpha}} / I = a$ ;  $C_{m\alpha} / I = c$ ;  $C_{m\alpha\dot{\alpha}} / I = b$ ;  $C_{m\alpha^2} / 2I = d$ 。令  $\dot{x} = y$ ,则可得其等价方程组为

$$\begin{aligned} dx/dt &= y & dy/dt &= ay + cx + bxy + dx^2 \end{aligned} \quad (1)$$

## 2 俯仰飞行的动力学行为

对于非线性自治系统,方程在相空间的图形,即运动的轨迹称为方程的轨线,闭合的轨线简称闭轨。

设有自治系统  $dx/dt = f(x)$ ,  $f \in C(G \subseteq R^n, R^n)$ ,若点  $\bar{x} \in G$ ,使  $f(\bar{x}) \neq 0$ ,则称  $\bar{x}$  为自治系统的常点;若  $x^* \in G$ ,使  $f(x^*) = 0$ ,则称  $x^*$  为自治系统的奇点,奇点根据类型不同可分为结点、焦点、鞍点等等<sup>[2]</sup>。

对于平面自治系统  $dx/dt = P(x, y)$ ,  $dy/dt = Q(x, y)$ ,若在单连通域  $G$  内存在函数  $B(x, y) \in C^1(G)$ ,使  $\partial(BP)/\partial x + \partial(BQ)/\partial y \geq 0$  ( $\leq 0$ ),  $x, y \in G$  且不在  $G$  的任一子区域内恒为零,则系统不存在全部位于  $G$  内的闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线。函数  $B(x, y)$  称为 Dulac 函数<sup>[3]</sup>。

**定理 1** 模型(1)若存在闭轨,则此闭轨必与直线  $x = -a/b$  相交。

收稿日期:2005-04-18

作者简介:邹毅(1981-),男,江西宜春人,博士生,主要从事非线性动力学研究;  
姚宏(1963-),女,吉林长春人,教授,博士生导师,主要从事非线性动力学研究。

证明:取  $B(x,y) = 1$ , 有:  $D = \partial/\partial x(yB(x,y)) + \partial/\partial y(B(x,y)(ay + bxy + cx + dx^2)) = a + bx$ 。

由 Bendixon - Dulac 判别法, 在  $D > 0$  和  $D < 0$  的区域内, 系统无闭轨。则若系统存在闭轨,  $D$  必须要变号。因此, 系统若存在闭轨, 则其必与直线  $x = -a/b$  相交。证毕。系统有 2 个奇点,  $(0,0)$  和  $(-c/d, 0)$ 。

**定理 2** 当奇点为  $(0,0)$  时, 记  $\Delta = a^2 + 4c$ , 当  $\Delta < 0$  时, 则  $(0,0)$  点为顺时针绕行的稳定粗焦点; 当  $\Delta = 0$  时,  $(0,0)$  为稳定的退化结点;  $\Delta$  不会是正的。

证明: 为分析奇点  $(0,0)$  的类型, 取模型(1)在  $(0,0)$  点的线性近似系统

$$\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= cx + ay \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)系数矩阵的特征根为  $\lambda_{1,2} = (a \pm \sqrt{a^2 + 4c})/2$ , 可见  $(0,0)$  不是中心,  $\lambda_{1,2}$  只能是 2 个负数或共轭复数, 所以原系统的奇点类型只能是结点或焦点, 不是鞍点。

由模型(1)知, 上、下半平面  $x(t)$  单调上升、下降, 所以  $(0,0)$  不会是正规或临界结点,  $\Delta$  不会是正的。

焦点可能出现,  $\Delta = a^2 + 4c < 0$  时, 由于系数矩阵的特征值实部皆负, 即  $a/2 < 0$ , 故为稳定的粗焦点。

式(2)中  $c < 0$ , 以  $(0,0)$  为原点的坐标系中, 右半实轴轨线向下, 左半实轴轨线向上, 轨线顺时针绕行。

$\Delta = 0$  时, 根据轨线特征可知, 会出现退化结点, 又特征根为  $a/2 < 0$ , 所以是稳定的退化结点。证毕

综上可知: 奇点为  $(-c/d, 0)$  时,  $\Delta = (a - bc/d)^2 - 4c > 0$ , 类型为鞍点;  $-c/d > -a/b$ , 系统无闭轨线。

## 2.1 Hopf 分叉

在式(1)中, 令  $P(x,y) = y$ ,  $Q(x,y) = ay + cx + bxy + dx^2$ , 可知: ①  $P(0,0) = 0, Q(0,0) = 0$ ; ②  $A(a) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c & a \end{bmatrix}, a^2 + 4c < 0 \text{ 时, } A(a) \text{ 有复特征根 } \alpha(a) \pm i\beta(a) = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 - 4c}i}{2}, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) > 0, \beta(0) > 0。$$

模型(1)在  $(0,0)$  邻域内存在一周期解, 即系统出现 Hopf 分叉<sup>[4]</sup>。

## 2.2 稳定性判据

由上述分析可概括出大攻角俯仰飞行条件下的稳定性判据: ①  $x > -c/d$  时, 即攻角变化量在负方向小于  $c/d$ , 若  $-c/d > -a/b$ , 则飞机稳定飞行; ②  $x > -c/d$  时, 若  $-c/d < -a/b$ , 则飞机总体上是稳定的, 但在  $(0,0)$  的小邻域内会出现 Hopf 分叉, 飞机将产生自激振荡; ③  $x < -c/d$  时, 即攻角变化量在负方向  $> c/d$ , 飞机将发生失稳。

## 3 稳定域与飞行稳定性

由上述定理可以绘出图 1 - 图 3。由所绘相图可知:

1)  $a^2 + 4c < 0$ , 飞机在负方向偏离平均攻角大于  $-c/d$  时, 如图 1, 相图进入鞍点区域, 飞行过程中可能会出现失速, 尾旋等不稳定现象, 飞机容易失去控制而造成坠毁等严重事故。

2)  $a^2 + 4c < 0$ , 飞机在负方向偏离平均攻角小于  $-c/d$  时, 相图进入稳定焦点区域; 此时要看飞行参数  $-a/b$  与  $-c/d$  的关系, 当  $-c/d > -a/b$  时, 如图 2, 飞机可以一直稳定飞行; 当  $-c/d \leq -a/b$  时, 如图 1, 稳定焦点区内有极限环, 处于极限环各点上飞机将出现自激振荡, 诱发飞行事故。

3)  $a^2 + 4c = 0$  时,  $-c/d$  为阈值, 如图 3, 飞机在负方向偏离平均攻角大于  $-c/d$  时, 相图进入鞍点区域; 小于  $-c/d$  时相图进入稳定的退化结点区域。

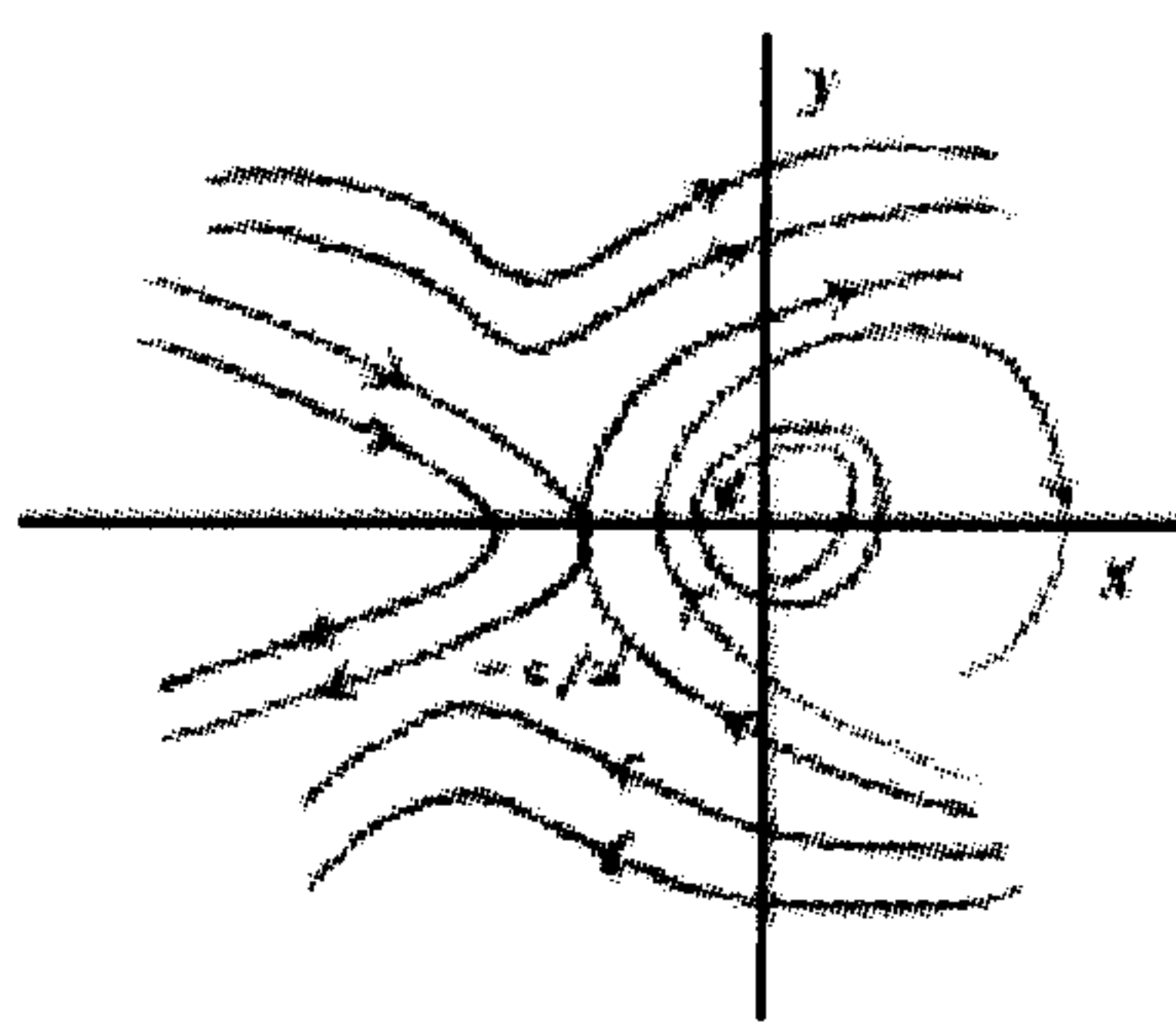


图 1  $\Delta < 0$ , 有极限环

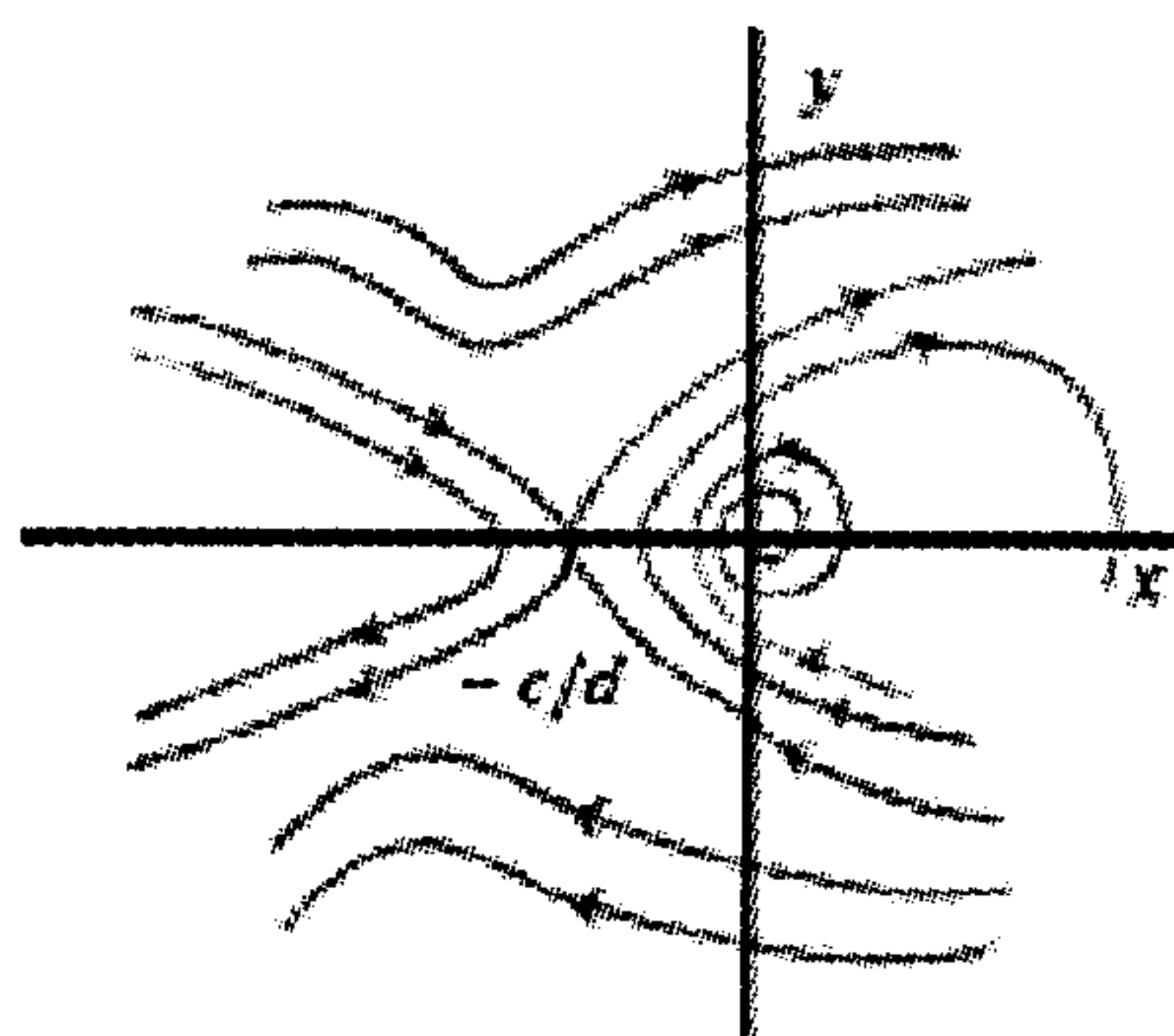


图 2  $\Delta < 0$ , 无极限环

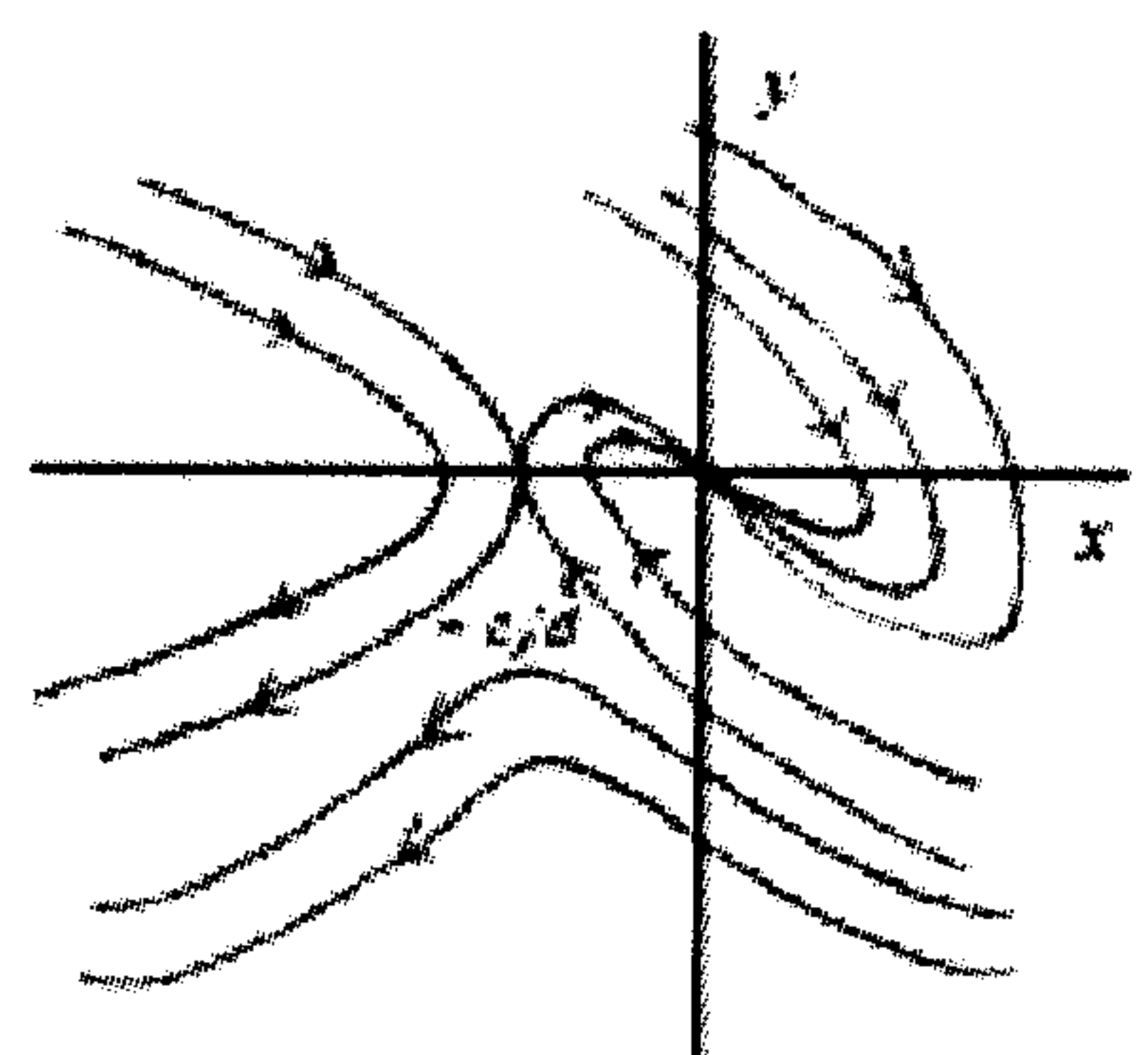


图 3  $\Delta = 0$

(下转第 16 页)