

测向交会定位跟踪的保精度空间区域划分

朱永文, 王立辉, 娄寿春

(空军工程大学导弹学院, 陕西三原 713800)

摘要: 在分析影响定位精度因素前提下, 采用合理的假定建立测向交会定位算法的误差分析模型; 利用双基地平面中的距离和等值线, 对测向交会定位误差分析模型进行分解, 建立测向交会定位跟踪的保精度空间区域划分方法, 仿真算例表明本方法是有效的。

关键词: 测向交会定位; 误差分析; 区域划分

中图分类号: TN953+. 7 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2006)03-0030-04

双基地雷达是将收、发设备分置于不同地域, 利用电波的时空特性实现对空中目标的探测与跟踪。研究雷达定位误差模型, 文献[1]在考虑了雷达自身定位误差和目标位置误差情况下, 建立了多站警戒雷达的多数据融合定位误差模型, 文献[2]利用最大似然估计建立了两坐标雷达网目标定位误差分析。但有关双基地雷达测向交会定位的保精度空间区域划分模型研究文献很少。本文在分析影响定位精度因素的前提下, 利用双基地平面关系将空间问题降为平面二维处理, 建立了测向交会定位的保精度空间区域划分模型。

1 定位算法建模思路

建立如图1所示的双基地平面坐标系^[3]。假设目标在双基地平面中的坐标为 (x, y) ; 发射站R的坐标为 (x_1, y_1) , 对应双基地角 θ_1 , 与目标距离 r_1 ; 接收站T的坐标为 (x_2, y_2) , 对应双基地角 θ_2 , 与目标距离 r_2 ; 目标的双基地角为 β , 两雷达基线距离 L 。

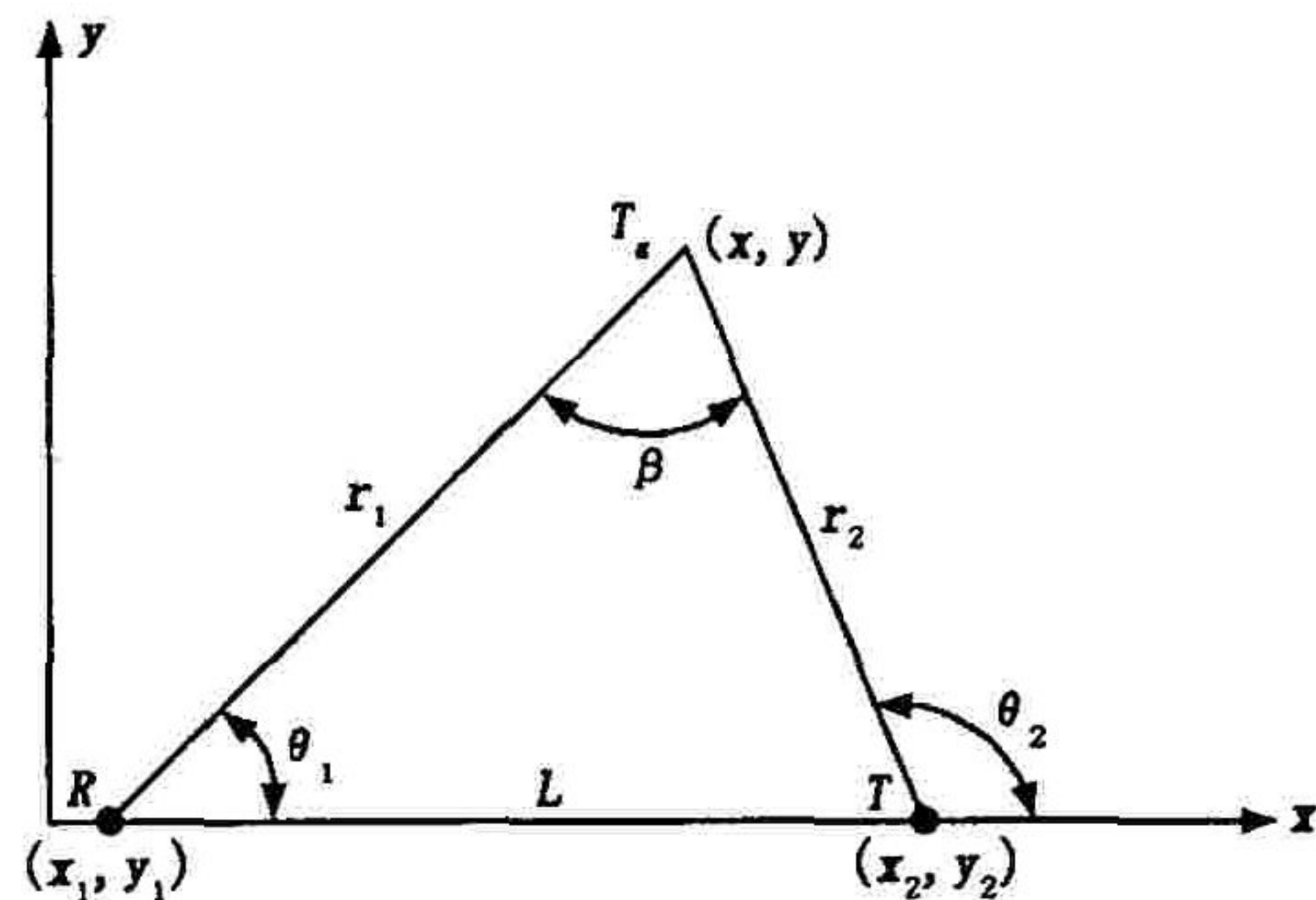


图1 双基地平面几何关系图

双基地雷达测向交会定位误差可以分为3个部分: 一是测量因素引起的误差, 如角度测量误差、基线测量误差等, 对于这类误差一般可以假定它们服从高斯分布; 二是几何因素, 如目标与双基地雷达的收、发设备的相对位置关系; 三是参数因素, 如在测向交会定位算法中的雷达收、发设备定址误差。对于参数误差, 随着技术的发展, 它的精度可以达到很高, 在影响测向交会定位精度中, 测量因素、几何因素是最主要^[4], 从而可以忽略参数误差的影响。根据图1的三角关系, 可得:

$$\theta_1 = \arctan \frac{y - y_1}{x - x_1} + n_1 \quad ; \quad \theta_2 = \arctan \frac{y - y_2}{x - x_2} + n_2 \quad (1)$$

其中, 测量误差 n_1, n_2 服从零均值的高斯分布。

2 定位算法误差模型

假设目标的真实位置 (x_0, y_0) ; θ_{01}, θ_{02} 为目标真实位置与R、T组成的双基地角; r_{01}, r_{02} 为目标真实位置与

收稿日期: 2005-05-17

基金项目: 国防科技预研基金资助项目(41306020202)

作者简介: 朱永文(1978-), 男, 安徽天长市人, 博士生, 主要从事作战建模与仿真研究;

娄寿春(1940-), 男, 天津人, 教授, 博士生导师, 主要从事防空装备体系论证研究。

R、T 的距离。根据定位算法得到目标位置的逼近解 (x, y) , 为使定位误差均方差最小, 即要求:

$$\min E[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \quad (2)$$

根据前面讨论, 这里不考虑雷达自身定位误差, 现在假设目标与它的真实位置的误差为 $\Delta X = [x - x_0 \quad y - y_0]^T$, 对式(1)进行泰勒展开, 并根据双基地平面中的几何关系:

$$\sin \theta_{01} = \frac{y_0 - y_1}{r_{01}}, \cos \theta_{01} = \frac{x_0 - x_1}{r_{01}}, \sin \theta_{02} = \frac{y_0 - y_2}{r_{02}}, \cos \theta_{02} = \frac{x_0 - x_2}{r_{02}}$$

可得:
$$\theta_1 = \arctan \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} + \left[-\frac{\sin \theta_{01}}{r_{01}} \frac{\cos \theta_{01}}{r_{01}} \right] \Delta X + n_1 = \theta_{01} + \left[-\frac{\sin \theta_{01}}{r_{01}} \frac{\cos \theta_{01}}{r_{01}} \right] \Delta X + n_1 \quad (3)$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2} + \left[-\frac{\sin \theta_{02}}{r_{02}} \frac{\cos \theta_{02}}{r_{02}} \right] \Delta X + n_2 = \theta_{02} + \left[-\frac{\sin \theta_{02}}{r_{02}} \frac{\cos \theta_{02}}{r_{02}} \right] \Delta X + n_2 \quad (4)$$

改写成矩阵的形式, 令:

$$B = [\theta_1 \quad \theta_2]^T, \quad B_0 = [\theta_{01} \quad \theta_{02}]^T, \quad N = [n_1 \quad n_2]^T, \quad H = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \theta_{01}}{r_{01}} & \frac{\cos \theta_{01}}{r_{01}} \\ -\frac{\sin \theta_{02}}{r_{02}} & \frac{\cos \theta_{02}}{r_{02}} \end{bmatrix}$$

则, 可以得到:
$$B = B_0 + H\Delta X + N \quad (5)$$

假定测量噪声彼此独立, $P_N = E[NN^T] = \text{diag}(\sigma_n^2, \sigma_n^2)$ 为测量噪声协方差矩阵。设定双基地雷达测向交会定位测量是在理想情况下取得, 对应下式(6)取得极小值:

$$J = E[N^T P_N^{-1} N], \quad N = B - B_0 - H\Delta X \quad (6)$$

可得:
$$\frac{\partial J}{\partial \Delta X} = -2H^T P_N^{-1} [B - B_0 - H\Delta X] = 0 \quad (7)$$

可以由式(7)得
$$\hat{\Delta X} = (H^T P_N^{-1} H)^{-1} H^T P_N^{-1} (B - B_0) \quad (8)$$

将式(5)带入式(8), 可得
$$\hat{\Delta X} = \Delta X + (H^T P_N^{-1} H)^{-1} H^T P_N^{-1} N \quad (9)$$

利用式(9), 可得目标定位的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{\sigma_x \sigma_y} \\ \rho_{\sigma_x \sigma_y} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = E[(\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T] = H^{-1} P_N (H^{-1})^T \quad (10)$$

如果两个雷达的双基地测量角为 θ_1, θ_2 ; 测量误差为 $\sigma_{\theta_1}^2, \sigma_{\theta_2}^2$, 计算出 H^{-1} 可以得出协方差矩阵为

$$H^{-1} = \frac{r_1 r_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_2}{r_2} & -\frac{\cos \theta_1}{r_1} \\ \frac{\sin \theta_2}{r_2} & -\frac{\sin \theta_1}{r_1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{r_1 r_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right]^2 \left[\frac{\cos^2 \theta_2}{r_2^2} \sigma_{\theta_1}^2 + \frac{\cos^2 \theta_1}{r_1^2} \sigma_{\theta_2}^2 \right] \quad (12) \quad ; \quad \sigma_y^2 = \left[\frac{r_1 r_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right]^2 \left[\frac{\sin^2 \theta_2}{r_2^2} \sigma_{\theta_1}^2 + \frac{\sin^2 \theta_1}{r_1^2} \sigma_{\theta_2}^2 \right] \quad (13)$$

则, 可得几何稀释度 GDOP (Geometric Dilution of Precision) 为

$$GDOP = \frac{1}{|\sin(\theta_2 - \theta_1)|} \sqrt{r_1^2 \sigma_{\theta_1}^2 + r_2^2 \sigma_{\theta_2}^2} \quad (14)$$

根据图 1 所示的几何关系 $\beta = \theta_2 - \theta_1$, 则

$$GDOP = \frac{1}{|\sin \beta|} \sqrt{r_1^2 \sigma_{\theta_1}^2 + r_2^2 \sigma_{\theta_2}^2} \quad (15)$$

假定两雷达的双基地角测量误差的协方差相同, $\sigma_{\theta_1}^2 = \sigma_{\theta_2}^2 = \sigma_\theta^2$, 则进一步变换式(15), 可得

$$GDOP = \frac{\sigma_\theta}{|\sin \beta|} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (16)$$

根据式(16), 可以得出这样的结论: 由两雷达基线的中垂线形成的平面, 其对应 GDOP 能取的最小。如果在等距离线上 $r_1 + r_2 = r$, 定义距离等值线对应椭圆离心率 $e = \frac{L}{r_1 + r_2}$, 根据图 1 所示的几何关系:

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = r^2 \quad ; \quad r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \beta = L^2 \quad (17)$$

由式(17)可得

$$r_1^2 + r_2^2 = L^2 \frac{1 + \cos \beta e^{-2}}{1 + \cos \beta} \quad (18)$$

将式(18)代入(16),可得

$$\text{GDOP} = L\sigma_\theta \sqrt{\frac{1 + \cos \beta e^{-2}}{(1 + \cos \beta) \sin^2 \beta}} = L\sigma_\theta \sqrt{\frac{1 + \cos \beta e^{-2}}{(1 + \cos \beta)^2 (1 - \cos \beta)}} \quad (19)$$

这样可以进一步看出:两雷达基线的距离 L 同样也影响定位精度,减小 L 可以提高精度,但是造成了雷达探测区域的减小,形成一对矛盾体。

对于式(19)来说,它没有考虑到两雷达的定位误差,如果要考虑测量平台的定位误差,可以将测量平台的定位误差折算到测角误差中去。

3 保精度空间区域划分模型

当 $r_1 + r_2$ 为常数,可得距离和等值线,该等值线通常可用椭圆来表示,它定义为两个定点的距离和为常数的轨迹。当两个定点为测向交会定位算法中的两部雷达时,所画出来的曲线为椭圆。如果考虑整个空间范围,距离和常数的方程是以基线为轴的椭球面。对应图2是过基线的垂面剖分出来的椭球面。

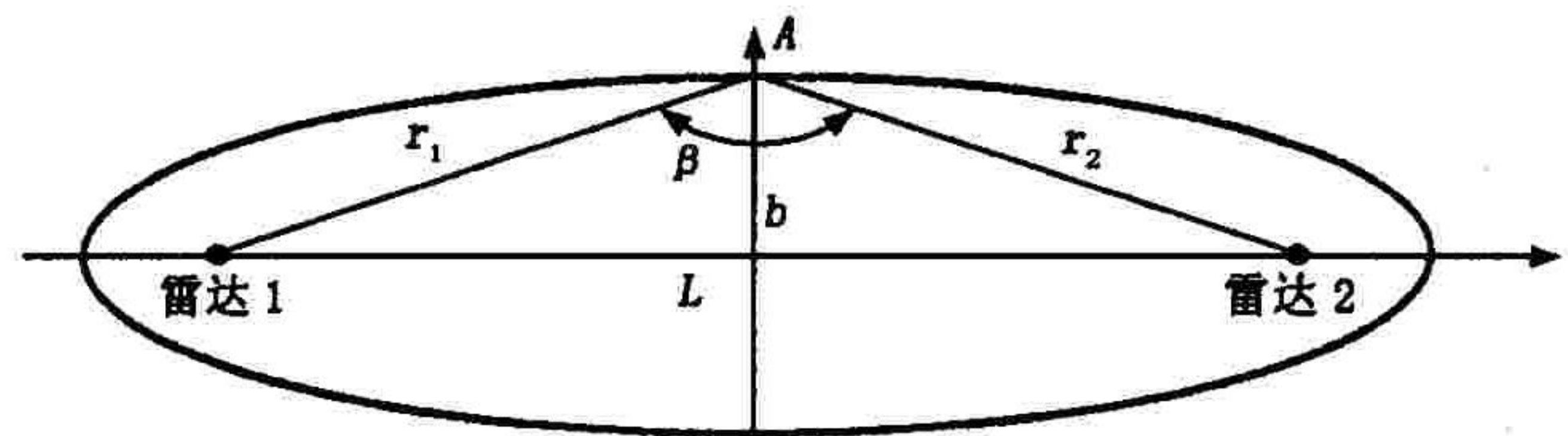


图2 距离和等值线椭圆示意图

在 Radar1、Radar2 的共同探测区中,运用距离等值线对整个空域进行划分,形成一个个的剖面,即椭球面;对椭球面再一次剖分,形成一条条椭圆线;对椭圆线的精度划分之后,进行旋转就形成了对椭球面的精度划分,进而形成对整个空间的精度划分;这就是实现空域定位精度划分的基本思想。

3.1 根据中垂面上的定位精度要求确定 e 的范围

根据前面的定位精度分析,在某些椭圆离心率 e 的范围内基线中垂面上的 GDOP 可以取的最小,那么现给定一个要求的 $\text{GDOP} \leq \delta$,可以确定出两个椭圆,它们的竖轴与椭圆线的交点上取的 $\text{GDOP} = \delta$,如图2所示的 A 点,而在椭圆线其它位置 $\text{GDOP} > \delta$ 。

如图2的几何关系,其中 $r_1 + r_2 = r, e = \frac{L}{r}$,则

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{L/2}{r/2} = e \quad (20); \quad \cos \beta = 1 - 2\sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 2e^2 \quad (21)$$

将式(20)式代入(21)可得

$$\text{GDOP} = L\sigma_\theta \sqrt{\frac{1}{8e^4(1-e^2)}} \quad (22)$$

对式(22)求导,可以计算出在基线 L 已知的情况下, $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时 GDOP 可以取的最小。根据 $\text{GDOP} = \delta$ 可以解算出 e 的范围。

算例:现有两个单基地雷达组网,实现测向交会定位,基线距离 $L = 60 \text{ km}$,测角均方差 $\sigma_\theta = 2'$,利用图形求解,如图3所示。

如图3,当要求 GDOP 为 60 m,可以计算出 $0.49 \leq e \leq 0.89$ 这个范围可以满足条件。

3.2 椭圆线精度划分

如图3,根据 $\text{GDOP} \leq \delta$ 与式(22)可以计算出对应椭圆线上满足定位精度要求的范围,形成如图4所示的由虚线组成的区域。

如图4所示的几何关系,建立直角坐标系,对应离心率为 e 的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

其中: $a = \frac{r}{2}$ 为椭圆的半长轴; $b = \sqrt{a^2 - \frac{L^2}{4}}$ 为椭圆的半短轴; 根据 $e = \frac{L}{r}$, 可得

$$a = \frac{L}{2e} \quad b = \frac{L\sqrt{1-e^2}}{2e} \quad (24)$$

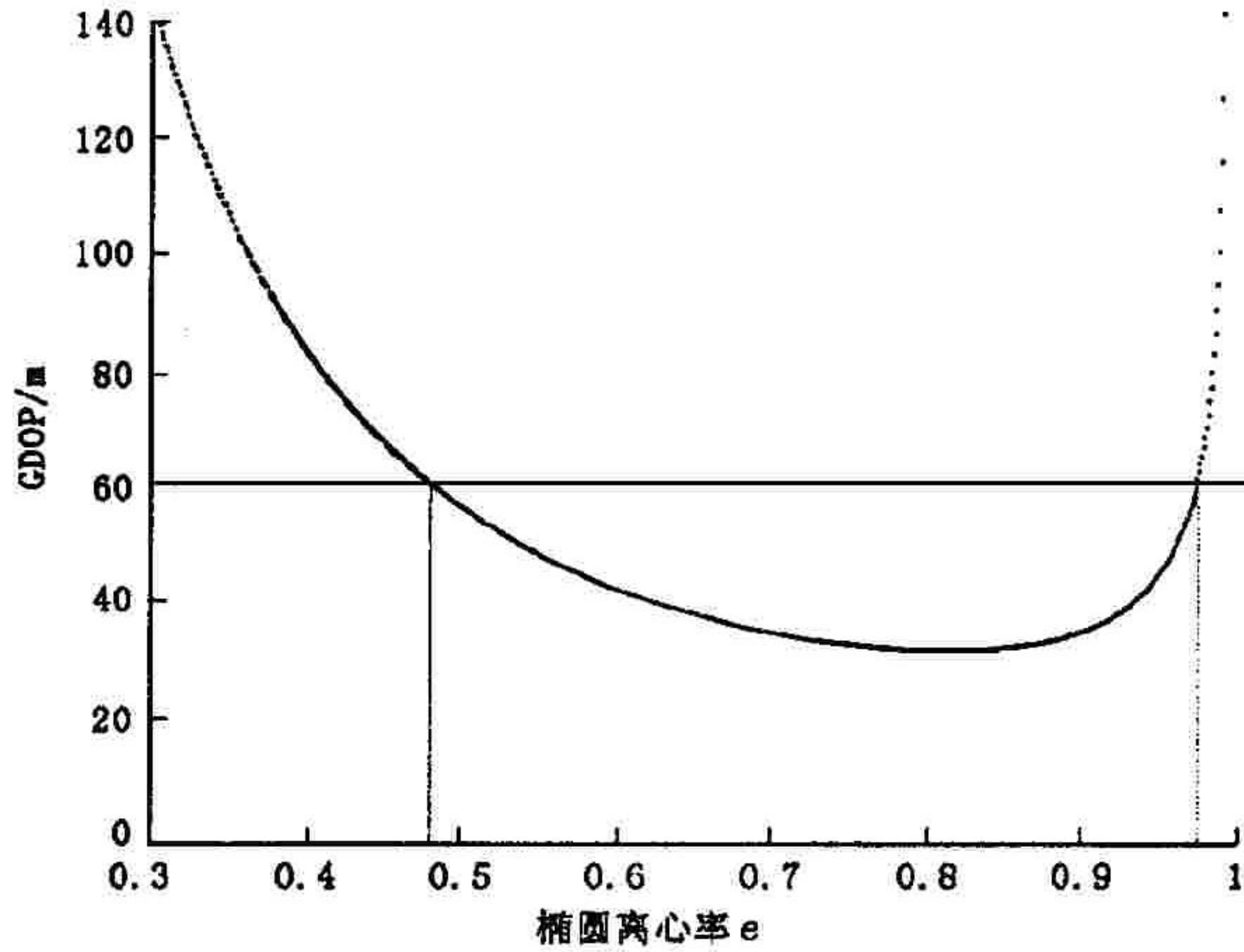


图3 解算 e 的范围图

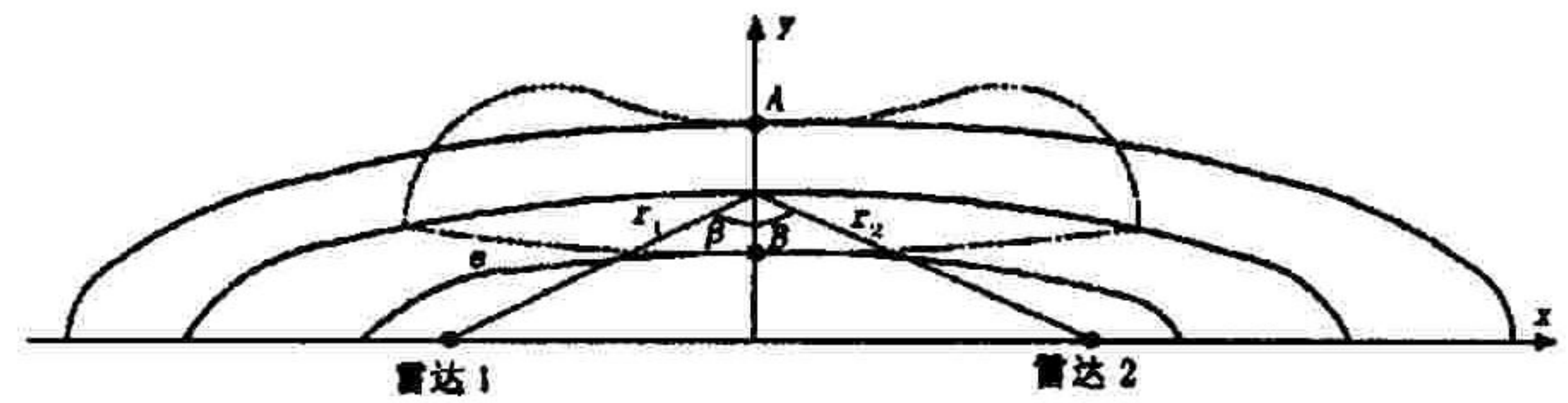


图4 椭圆线精度划分示意图

Radar1 的坐标为 $(-\frac{L}{2}, 0)$, Radar2 的坐标为 $(\frac{L}{2}, 0)$, 设椭圆线上半部分点的坐标为 (x, y) , 则有

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (25); \quad r_1 = \sqrt{(x + L/2)^2 + y^2}, r_2 = \sqrt{(x - L/2)^2 + y^2} \quad (26); \quad \cos\beta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - L^2}{2r_1r_2} \quad (27)$$

则, 可以根据式(22)计算出 GDOP, 判定是否满足 $GDOP \leq \delta$ 要求, 确定椭圆线的定位精度范围。通过以上仿真分析, 证明本方法是有效的。

参考文献:

[1] 赵振山, 杨万海. 组网雷达对目标三维定位精度仿真分析[J]. 电子对抗技术, 2003, 18(1): 24 - 26.
 [2] 王国宏, 许建峰, 毛士艺, 等. 2D 雷达组网中目标高度估计误差的 Cramer - Rao 限[J]. 航空学报, 2004, 25(1): 42 - 44.
 [3] 杨振起, 张永顺, 骆永军. 双(多)基地雷达系统[M]. 北京: 国防工业出版社. 1998.
 [4] 朱永文, 娄寿春. 双基地雷达定位误差模型与保精度空域划分方法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2006, 7(1): 20 - 22.

(编辑: 田新华)

Reserved Precision Space Partition of Azimuth and Elevation

Measurements in Bistatic Radar

ZHU Yong - wen, WANG Li - hui, LOU Shou - chun

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: On the premise of analysis of the factors that influence the accuracy of position fixing, an error model of the azimuth and elevation measurement is built up by Taylor launch. The calculated example in simulation shows that the established error margin model tallies with the actual situation.

Key words: measurement of azimuth and elevation; Taylor launch; error margin analysis