基于奇异有限元法对大曲率缺口断裂问题的数值分析

曹宗杰，　王铭伟，　全吉成
(空军航空大学 航空机械工程系，吉林　长春　130022)

摘　要:利用其局部解构造了一种新的大曲率缺口位移模式;建立含大曲率缺口损伤结构有限元方程和与相应的缺口奇异单元;提出了求解大曲率缺口应力与应力强度因子等断裂参量的数值计算方法,数值算例说明本文方法是一种有效的数值计算分析方法。

关键词:应力强度因子;奇异单元;钝裂纹;有限元方法
中图分类号: TB12　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2006)02-0085-02

由于工程结构中存在大量的缺陷,实际工程中灾难性事故经常发生。结构疲劳与断裂给人们带来巨大损失[1]。所以对结构损伤、构件寿命以及适时检查等方面的研究引起了人们的极大关注。在实际工程中,由于塑性变形和应力腐蚀等原因一般情况下裂纹尖端在某种程度变钝而成为一个曲线,需要对尖端在某种程度变钝力学问题建立新的计算模型,许多研究者在结构材料的断裂力学问题做了大量贡献。例如在较早的工作中 Hardiman[2] 和 Eshelby[3] 对于远场作用均匀拉应力的情况下获得了含椭圆夹杂的常应力状态解;England[4] 利用复变量法推导了对于含椭圆夹杂弹性体的求解公式;1967 年 Greager[5] 给出了对于各向同性材料钝裂纹的弹性场。Gong 等[6] 利用保角变换等方法在反平面剪切应力作用下研究了椭圆夹杂问题;Thomson 与 Hancock[7] 利用局部应力和应变场获得了对于含球形弹性夹杂的近似弹性变形基体的解答。

1　钝裂纹奇异单元的位移模式

由文献[8]的思想可知,钝裂纹奇异单元的位移模式为:$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{q}+[\boldsymbol{M}_l(r,\theta)-\boldsymbol{N}\overline{\boldsymbol{M}}_l(r,\theta)]\boldsymbol{\lambda}$。$\boldsymbol{q}$ 为节点上位移列阵,N 是等参单元形函数阵,λ 为真场的应力强度因子向量列阵,$\boldsymbol{M}_l(r,\theta)$ 为局部位移角分布函数阵[9],并且

$$\boldsymbol{M}_l(r,\theta)=\frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}}\begin{bmatrix}(2k-1)\cos\dfrac{\theta}{2}-\cos\dfrac{3\theta}{2}+\dfrac{4R_0}{r}\cos\dfrac{\theta}{2} & (2k+3)\sin\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{3\theta}{2}-\dfrac{4R_0}{r}\sin\dfrac{\theta}{2}\\(2k+1)\sin\dfrac{\theta}{2}-\sin\dfrac{3\theta}{2}+\dfrac{4R_0}{r}\sin\dfrac{\theta}{2} & (2k-3)\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{3\theta}{2}-\dfrac{4R_0}{r}\cos\dfrac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

式中:E 为材料的弹性模量;v 表示材料的泊松比;r 与 θ 是极坐标参数;R_0 为与缺口裂纹的曲率有关的常数;$\overline{M}_l$ 表示单元边界上第 i 节点处的 $M_l(r,\theta)$ 的值。$k=\begin{cases}(3-v)/(1+v), & \text{for plane stress}\\3-4v, & \text{for plane strain}\end{cases}$

2　有限元方程

设所研究的区域划分为 NE 个单元,其中有 m 个奇异单元,$(NE-m)$ 个常规单元,则整个研究区域内 (Ω) 总体位移场为 $\boldsymbol{u}=\begin{cases}\boldsymbol{Nq}+\boldsymbol{M}_\lambda\boldsymbol{\lambda}; & j\leqslant m\\\boldsymbol{Nq}; & j>m\end{cases}$。$\boldsymbol{M}_\lambda=\boldsymbol{M}_l-\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}_l$,应变位移的关系为 $\varepsilon=\begin{cases}\boldsymbol{Bq}+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{\lambda} & j\leqslant m\\\boldsymbol{Bq} & j>m\end{cases}$。$\boldsymbol{B}$ 表

收稿日期:2005-05-16
基金项目:国家自然科学基金(10132010)与中国博士后科学基金资助项目(2003033290)
作者简介:曹宗杰(1964-),男,山东莒县人,教授,博士(后),主要从事智能结构及断裂力学等研究.

示应变矩阵,B_s 表示与在钝裂纹附年的奇异应变场有关的奇异应变阵,其推导过程见文献[8]。根据最小势能原理,其总体矩阵表示为

$$\pi = Q^{\mathrm{T}}KQ/2 + Q^{\mathrm{T}}K_{NS}\lambda + \lambda^{\mathrm{T}}K_s\lambda/2 - Q^{\mathrm{T}}F - \lambda^{\mathrm{T}}F_\lambda \tag{1}$$

式中:Q 表示总体位移例阵;λ 表示总体应力强度因子列阵。$K = \sum_{j=1}^{NE}\int_{\Omega e} B^{\mathrm{T}}DB\mathrm{d}q$;$K_{NS} = \sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega e} B^{\mathrm{T}}DB_s\mathrm{d}\Omega$;$K_s = \sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega e} B_s^{\mathrm{T}}DB_s\mathrm{d}\Omega$;$F_\lambda = \sum_{j=1}^{m}(\int_{\Omega e} M_\lambda^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 2e} M_\lambda^{\mathrm{T}}\bar{T}\mathrm{d}\Gamma)$;$F = \sum_{j=1}^{NE}(\int_{\Omega e} N^{\mathrm{T}}f\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma 2e} M^{\mathrm{T}}\bar{T}\mathrm{d}\Gamma)$。因为 Q 与 λ 相互独立,式(1) 整体分别对 Q 与 λ 变分,得到:

$$KQ + K_{NS}\lambda = F \tag{2}$$

$$K_{SN}Q + K_s\lambda = F_\lambda \tag{3}$$

其中 $K_{SN} = K_{NS}^{\mathrm{T}}$。式(3) 可以改写为

$$\lambda = -K_s^{-1}(K_{SN}Q - F_\lambda) \tag{4}$$

式(4) 代入(2),得$\underline{K}Q = \underline{F}$。$\underline{K} = K - K_{NS}K_s^{-1}K_{SN}$,$\underline{F} = F - K_{NS}K_s^{-1}F_\lambda$。求解出位移后,$\lambda$ 可从式(4) 直接求出。

3 数值分析

为说明本文方法在解决断裂问题中的适用性,考虑一个在 y 方向承受单位拉应力的物体内深埋一个中心椭圆形裂纹,其板的尺寸为 $2L \times 2h$,a 与 b 分别表示椭圆裂纹的长半轴和短半轴。

3.1 与理论解析解比较

在此节中椭圆裂纹的长半轴固定为 $a = 0.6$,椭圆裂纹的短半轴 b 分别取 0.1、0.2、0.3。用前述有限元模型研究计算椭圆裂纹的应力强度固子,其用本文方法和解析解[9]获得的结果见图 1。可以看出本文获得结果与解析解很好的一致。

3.2 结构尺寸对解的影响

在此节中椭圆裂纹的长短半轴分别取为 $a = 0.6$、$b = 0.2$、$L/a = 139$,通过改变 h/a,计算结果见图 2。同理,椭圆裂纹的长短半轴分别取 $a = 0.6$、$b = 0.2$、$h/a = 139$,通过改变 L/a,计算结果见图 2。

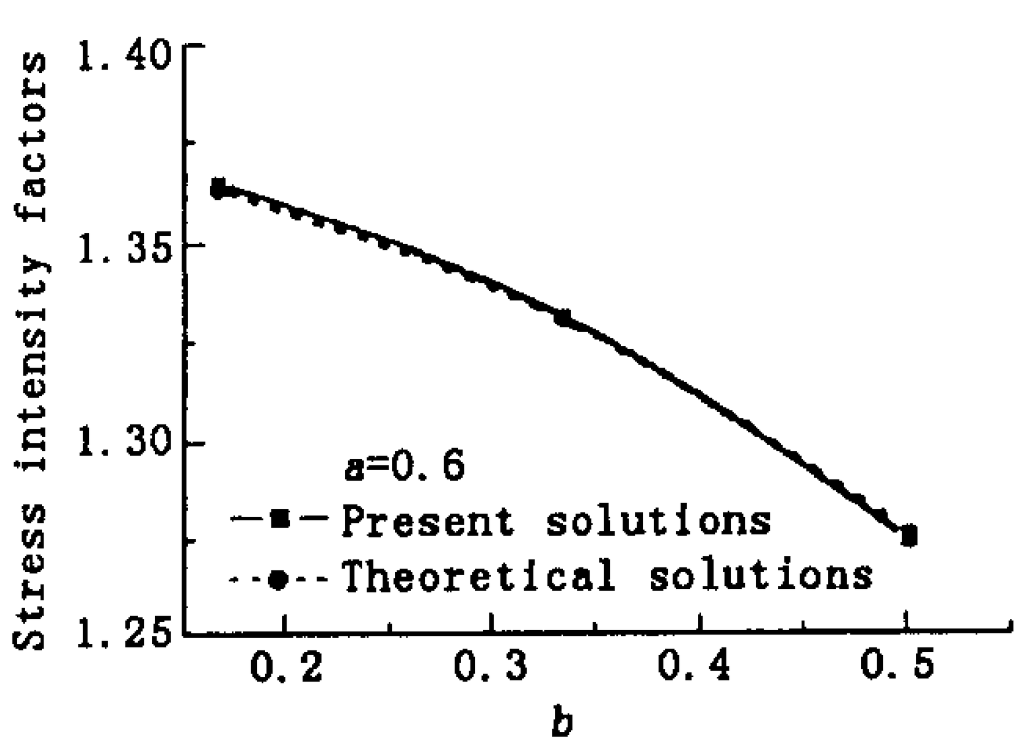

图 1 与理论解析解比较

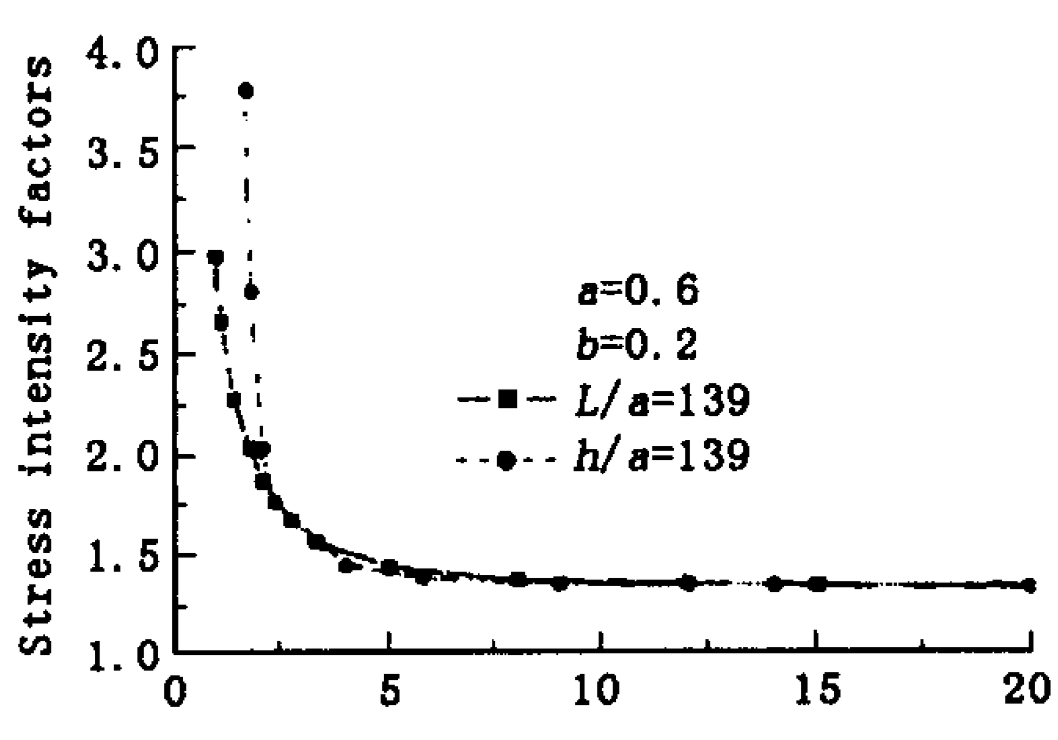

图 2 结构尺寸对解的影响

4 结论

本文得到了钝裂纹问题一种新的奇异单元,提出了一种钝裂纹问题应力强度因子的计算方法,采用本文计算方法得到的结果与理论解很好的一致。采用本文计算方法所得到的结果具有稳定、可靠与高精度等优点,说明本文方法是高效易行的。

参考文献:

[1] Anderson T L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications[M]. Boca Raton: CRC Press.

[2] Hardiman N J. Elliptical Elastic Inclusion in an Infinite Elastic Plane[J]. Quarterly Journal of mechanics and Applied mathematics, 1954, 7: 226 - 230.

(下转第 89 页)