

# FDTD 计算中 PML 的简化应用及编程实现

朱章虎, 卢万铮, 冯奎胜

(空军工程大学 电讯工程学院, 陕西 西安 710077)

**摘要:**通过对空间 PML 的构造及 PML 中分裂场的特性分析, 对 FDTD 计算中 PML 的应用进行了简化; 同时对编程思想进行了改进。整个分析过程简明了然, 无需对 PML 进行分区, 也无需对顶角和棱边另外处理, 极大地简化了计算过程。

**关键词:**完全匹配层; 时域有限差分法; 吸收边界条件

**中图分类号:** TN823 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2006)02-0055-03

J. P. Berenger 于 1994 年首先提出二维理想匹配层(PML)吸收条件的概念<sup>[1]</sup>, 并由 D. S. Katz 和 J. P. Berenger 分别推广到三维情况<sup>[2-3]</sup>。与传统的二阶 Mur 吸收边界条件相比<sup>[4]</sup>, PML 不受来波方向和频率的限制, 且吸收边界条件可提高精度 40 dB 左右。因此, 这种方法一经提出, 就受到很多学者的重视, 并在各种电磁辐射与散射问题中得到了广泛的应用。直角坐标系中 PML 是由 6 块平板构成的封闭腔体, 平板间的相互交叉分别形成面、棱及角共 26 个 PML 子区<sup>[5]</sup>。另外, 在 PML 中每个电场和磁场分量要分裂为 2 个子分量, 这样, 在 PML 中, 总共有 12 个子分量。这些子分量处理起来很繁琐, 而且容易出错。本文从空间 PML 的构造及 PML 中场的子分量的计算特性出发, 得出了计算中 PML 应用的简化及编程实现。

## 1 空间 PML 构造及场分量计算分析

### 1.1 PML 的参数设置和构造

三维情况下 PML 设置的基本结构如图 1 所示(假设靠近 PML 层的 FDTD 区为真空), PML 最外层用理想导体截断, 内界面处电导率均为零。两种 PML 介质界面反射系数为零的条件是: 要求分界面两侧介质具有相同的横向电导率和磁导率, 且横向和纵向电导率、磁导率均满足阻抗匹配条件<sup>[1]</sup>:  $\sigma/\epsilon_0 = \sigma^*/\mu_0$

首先提出一种“概念”: 对于垂直于某方向坐标轴的 PML 层面上, 只有该方向的电导率和磁导率均不为零。

对垂直于  $x$  轴的 PML 层面上, 只有  $\sigma_x, \sigma_x^*$  均不为 0(最外层和内界面除外)。

然后建立“叠加”的思想: 任意 PML 层面相互交叉的区域, 各个方向上的电导率、磁导率分别等于各 PML 层面电导率、磁导率在该方向之和。例如, 对于只有垂直于  $x$  轴 PML 层面  $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0, 0, 0)$  和垂直于

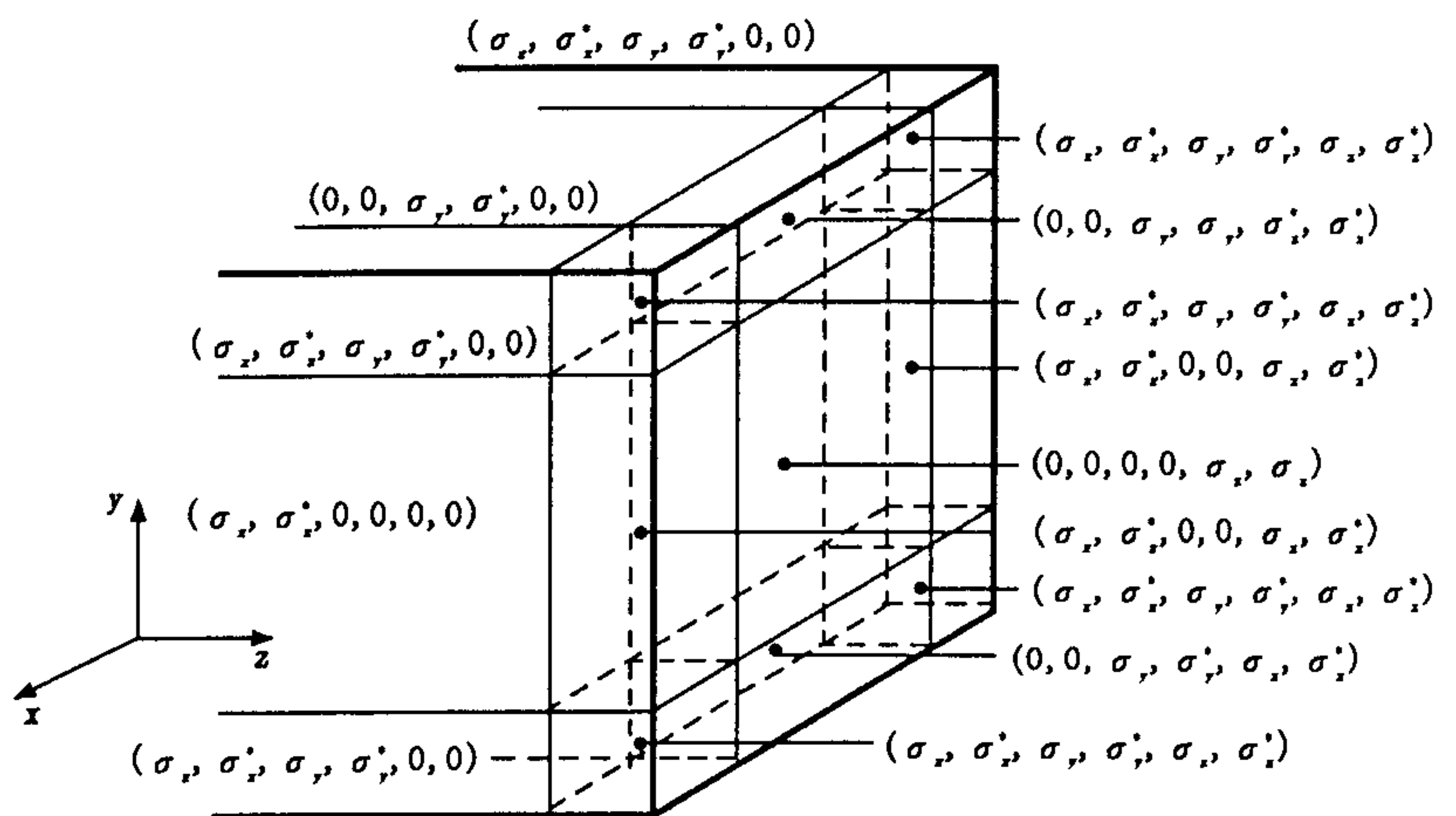


图1 三维 PML 参数设置图

收稿日期: 2005-09-27

基金项目: 军队科研基金资助项目

作者简介: 朱章虎(1980-), 男, 湖北荆州人, 硕士生, 主要从事微波天线等研究;

卢万铮(1943-), 男, 四川成都人, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁场与微波技术研究。



$y$  轴 PML 层面  $(0,0,\sigma_y,\sigma_y^*,0,0)$  的交叉处, PML 参数为  $(\sigma_x,\sigma_x^*,\sigma_y,\sigma_y^*,0,0)$ ; 而对于 8 个顶角处的 PML 区域, 由于是垂直于 3 个坐标轴的 PML 层面  $(\sigma_x,\sigma_x^*,0,0,0,0)$ 、 $(0,0,\sigma_y,\sigma_y^*,0,0)$ 、 $(0,0,0,0,\sigma_z,\sigma_z^*)$  的交叉处, 故参数为  $(\sigma_x,\sigma_x^*,\sigma_y,\sigma_y^*,\sigma_z,\sigma_z^*)$ 。

## 1.2 场分量计算分析和编程实现

PML 介质层中  $E_x$  和  $H_x$  麦克斯韦方程为

$$\varepsilon \partial E_{xy} / \partial t + \sigma_y E_{xy} = \partial (H_{zx} + H_{zy}) / \partial y \quad (1)$$

$$\varepsilon \partial E_{xz} / \partial t + \sigma_z E_{xz} = \partial (H_{yz} + H_{yx}) / \partial z$$

$$\mu \partial H_{xy} / \partial t + \sigma_y^* H_{xy} = -\partial (E_{zx} + E_{zy}) / \partial y \quad (2)$$

$$\mu \partial H_{xz} / \partial t + \sigma_z^* H_{xz} = -\partial (E_{yx} + E_{yz}) / \partial z$$

每个子分量的计算仅涉及 1 个电导率或磁导率。例如对于  $E_{xy}$ , 仅用到  $\sigma_y$ ; 对于  $E_{xz}$ , 仅需用到  $\sigma_z$ , 均与  $x$  方向的电导率无关。图 2 为  $\sigma_y, \sigma_y^*, \sigma_z$  和  $\sigma_z^*$  在垂直于轴的任意 PML 层面的分布, 实线代表电导率, 虚线代表磁导率, 其中  $N_{pml}$  为 PML 总层数。考虑到上面提出的  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  在 PML 中的分布, 就可以得到 PML 中  $E_{xy}$  和  $E_{xz}$  的计算规律。

对于  $E_{xy}$ , PML 中指数差分公式为

$$E_{xy}^{n+1/2}(i+1/2, \pm J_{pmin} \pm np, k) = a(np) E_{xy}^{n-1/2}(i+1/2, \pm J_{pmin} \pm np, k) + b(np) [H_z^n(i+1/2, \pm J_{pmin} \pm np + 1/2, k) - H_z^n(i-1/2, \pm J_{pmin} \pm np - 1/2, k)] \quad (3)$$

式中:  $a(np) = \exp[-\sigma_y(np)\Delta t/\varepsilon_0]$ ;  $b(np) = (1 - a(np))/\Delta y \sigma_y(np)$ ;  $np = 1, N_{pml} - 1$  为 PML 中第  $np$  层。

程序编写时, 通过对  $i = -I_{pmax}, I_{pmax} - 1, j = -J_{pmin} - np$  或  $j = J_{pmin} + np, k = -K_{pmax} + 1, K_{pmax} - 1, np = 1, N_{pml} - 1$  进行循环, 则实现了 PML 中  $\sigma_y \neq 0$  的所有  $E_{xy}$  的计算。而 PML 中  $\sigma_y = 0$  处、内界面上及自由空间中的  $E_{xy}$  按照正常的叠代公式计算, 循环为:  $i = -I_{pmax}, I_{pmax} - 1, j = -J_{pmin} - np, k = -K_{pmax} + 1, K_{pmax} - 1$ 。最后对于 PML 最外层导体截断边界处,  $E_{xy} = 0$ , 循环为:  $i = -I_{pmax}, I_{pmax} - 1, j = -J_{pmax}$  或  $j = J_{pmax}$  或  $k = -K_{pmax}$  或  $k = K_{pmax}$ 。通过这 3 个循环实现了 1 个时间步整个空间所有  $E_{xy}$  的计算。

$E_{xy}$  的计算不再赘述, 下面介绍磁场子分量的计算。以  $H_{xz}$  为例, PML 中指数差分公式为

$$H_{xz}^{n+1}(i, \pm J_{pmin} \pm np + 1/2, k + 1/2) = am(np) H_{xz}^n(i, \pm J_{pmin} \pm np + 1/2, k + 1/2) + bm(np) [E_y^{n+1/2}(i, \pm J_{pmin} \pm np + 1/2, k) - E_y^{n+1/2}(i, \pm J_{pmin} \pm np + 1/2, k)] \quad (4)$$

式中:  $am(np) = \exp[-\sigma_z^*(np)\Delta t/\mu_0]$ ;  $bm(np) = (1 - am(np))/\Delta y \sigma_z^*(np)$ ;  $np = 1, N_{pml}$  代表 PML 中第  $np$  层中心处。注意, 计算磁场时的磁导率层和计算电场时的电导率层在空间上相差  $1/2$  网格长度。

程序编写时, 通过对  $i = -I_{pmax}, I_{pmax}, j = -J_{pmax}, J_{pmax} - 1, k = K_{pmax} + np - 1$  或  $k = -K_{pmax} - np, np = 1, N_{pml} - 1$  循环, 则实现了 PML 中  $\sigma_z \neq 0$  的所有  $H_{xz}$  的计算。而 PML 中  $\sigma_z = 0$  及自由空间的  $H_{xz}$  按照正常的叠代公式计算, 循环为  $i = -I_{pmax}, I_{pmax}, j = -J_{pmax}, J_{pmax} - 1, k = -K_{pmin}, K_{pmin} - 1$ 。通过这两个循环实现了一个时间步整个空间所有  $H_{xz}$  的计算。

其它电场子分量和磁场子分量的计算可分别依上述方法进行。上面所述没有考虑自由空间存在散射体或其它目标, 当存在散射体或其它目标时, 只需将散射体或目标直接加到自由空间所在区域  $(-I_{pmin}, I_{pmin}, -J_{pmin}, J_{pmin}, -K_{pmin}, K_{pmin})$  即可。

## 2 数值计算结果

对电偶极子源的辐射场和带状缝隙的输入阻抗进行了计算。程序均采用 FORTRAN 语言编写, 程序大约为按常规将 PML 分区方法的  $1/4$ 。为便于比较, 计算电偶极子源的辐射场时将空间和辐射源采用和文献 [6] 中的一样, 而 PML 取 6 层。计算结果和文献 [6] 中的结果基本一致。

图 3 为所计算带状缝隙的基本结构。取介质基板的相对介电常数为  $\varepsilon_r = 2.56$ , 激励信号采用高斯脉

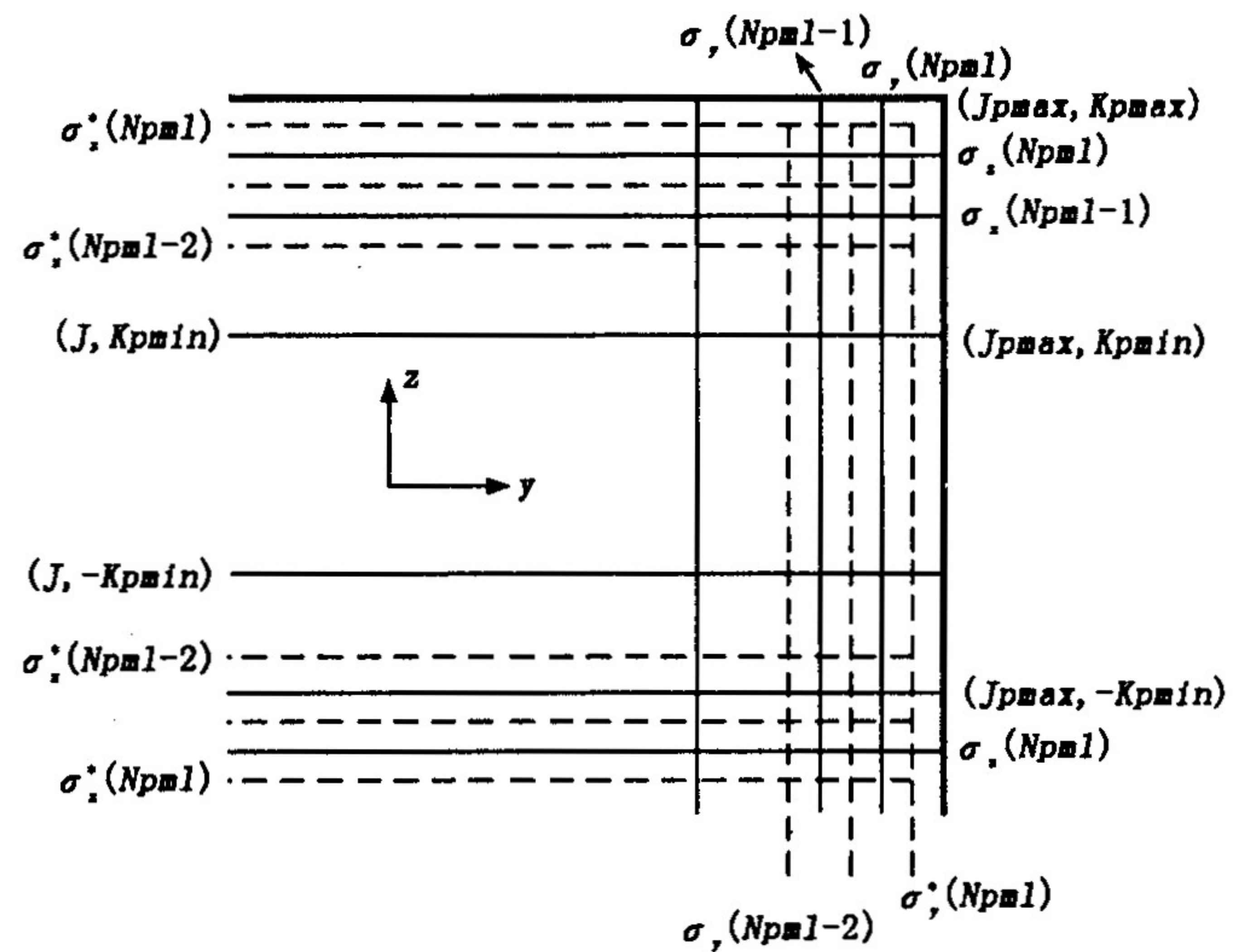


图 2 垂直于  $x$  轴的任意 PML 层面的  $\sigma_y, \sigma_y^*, \sigma_z$  和  $\sigma_z^*$  分布图



冲。图 4 和图 5 为输入阻抗的计算结果,并同解析计算结果和运用 *Mei* 边界计算结果进行了比较。

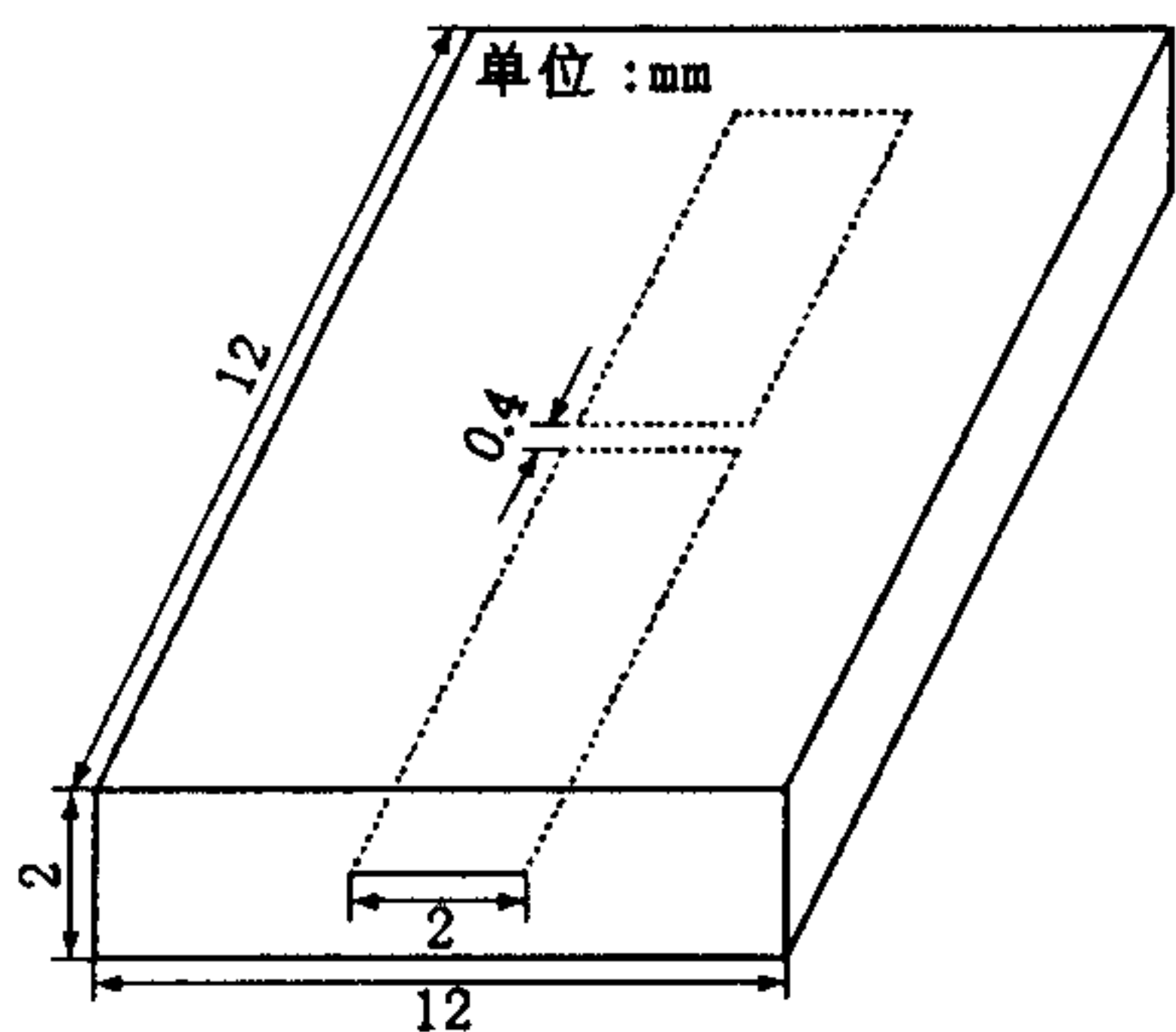


图 3 带状缝隙结构图

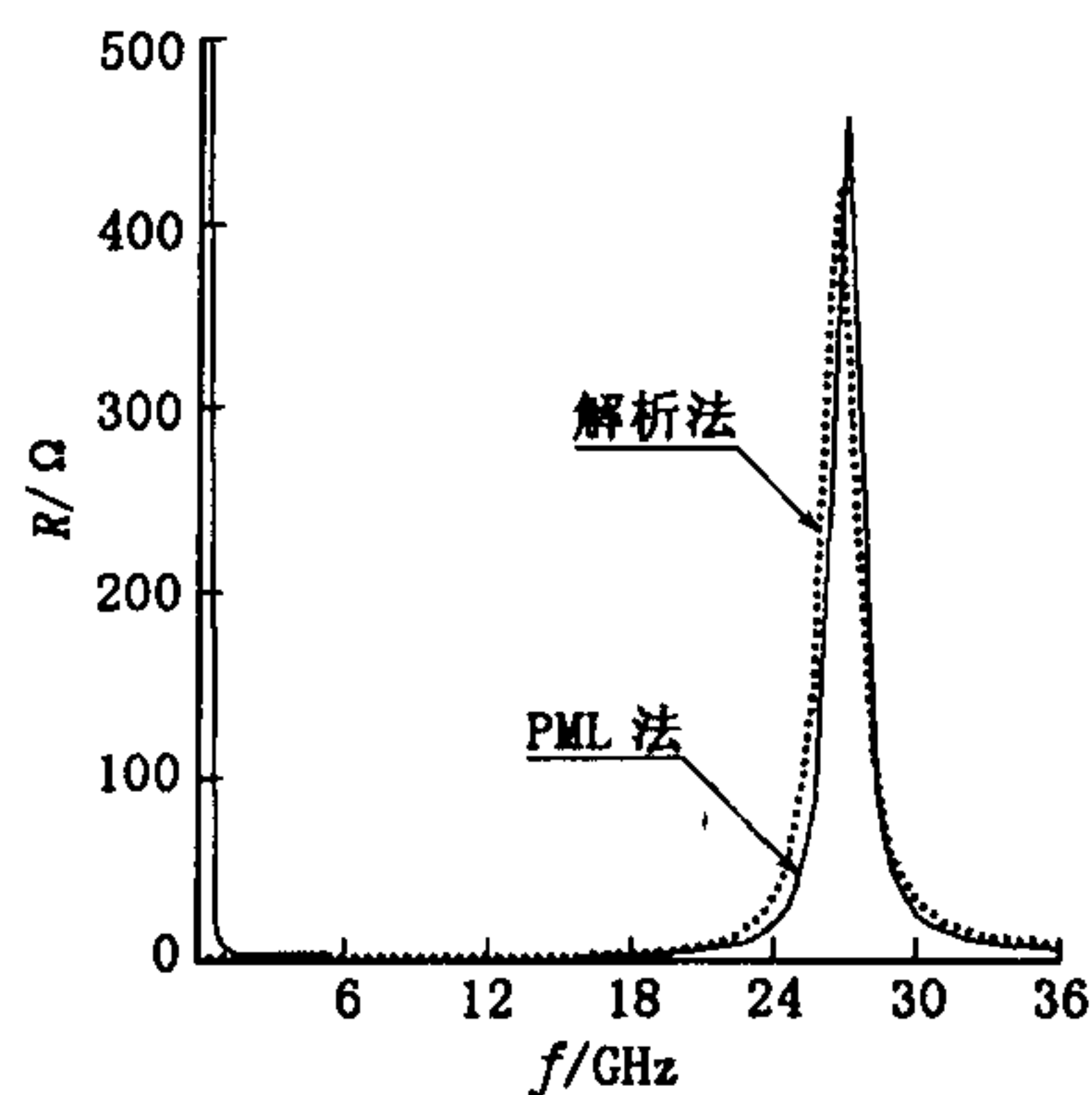


图 4 输入阻抗实部曲线图

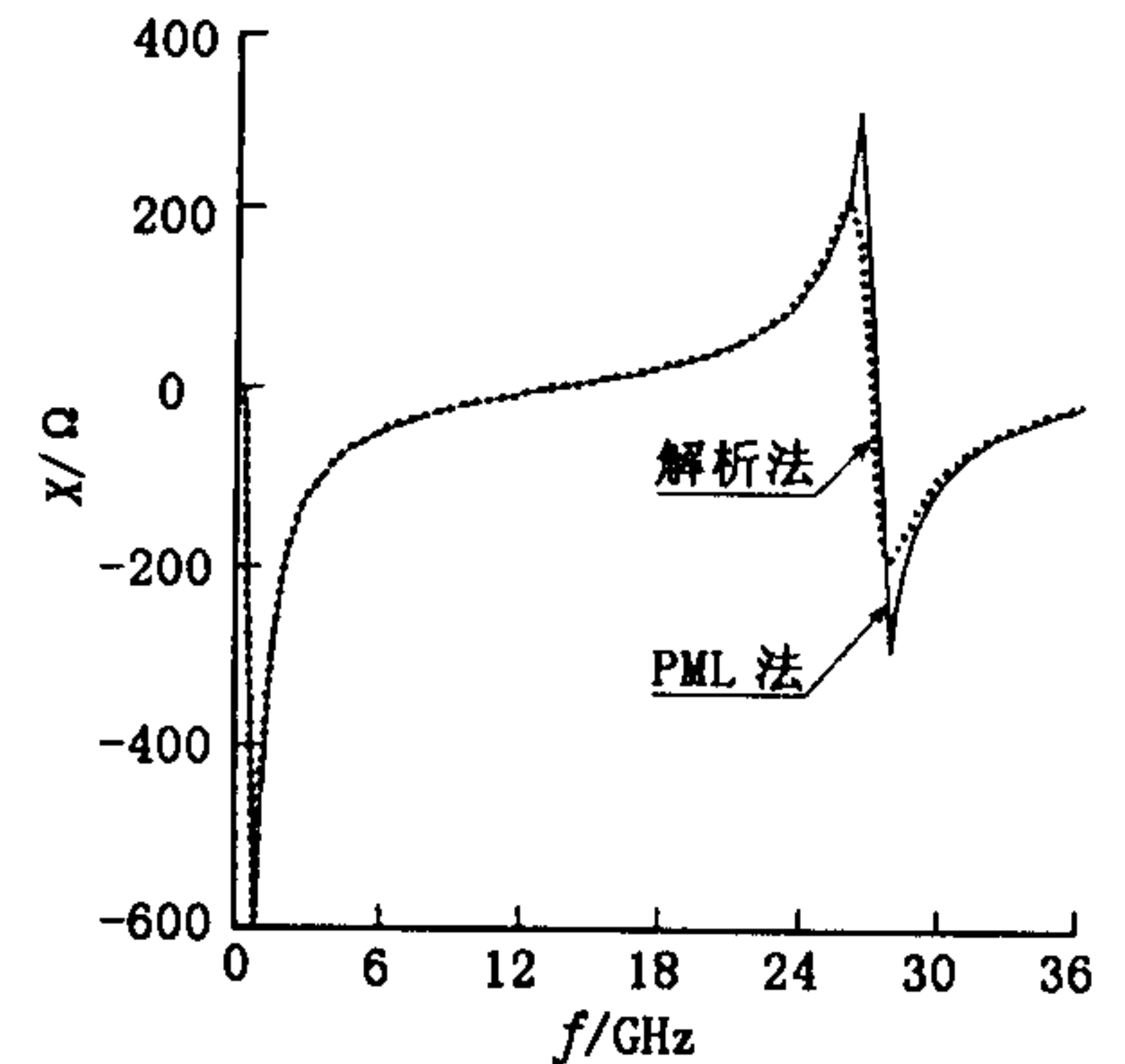


图 5 输入阻抗虚部曲线图

### 3 结束语

本文得出了 PML 应用的简化和编程的改进方法,无需将 PML 进行分区,然后进行场的计算;也无需进行顶角和棱边的特殊处理,大大地减少了分析和编程过程;对计算机内存资源的要求也大大降低。数值计算结果证明了该方法的有效性和实用性。该方法对于 PML 的应用和编程具有一定的指导作用。

#### 参考文献:

- [1] Berenger J P. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 114:185 - 200.
- [2] Katzetal D S. Validation and Extension to Three Dimensions of the Berenger PML Absorbing Boundary Condition for FDTD meshes[J]. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1994, 4(8):268 - 270.
- [3] Berenger J P. Three - Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 127:363 - 379.
- [4] Mur G. Absorbing Boundary Condition for the FD Application of the Time - Domain EM Field equation[J]. *IEEE Trans EMC*, 1981, 23(4):377 - 382.
- [5] Gedney S D . An Anisotropic Perfectly Matched Layers Absorbing Medium for the Truncation of FDTD lattices[J]. *IEEE Trans Antennas and Propagat*, 1996, 44(12):1630 - 1639.
- [6] 葛德彪,闫玉波. 电磁波时域有限差分方法[M]. 西安:电子科技大学出版社,2003.
- [7] 常 硕,陈忠辉,张智军. 超宽带信号在波导中传播的 FDTD 分析[J]. *空军工程大学学报(自然科学版)*, 2003, 4(5): 53 - 55.

(编辑:门向生)

## The Simplification of PML Application and Programming Realization in FDTD Calculation

ZHU Zhang - hu, LU Wan - zheng, FENG Kui - sheng

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

**Abstract:** The simplification of PML application and programming realization are presented based on the PML structure and computing characteristics of the split fields in FDTD calculations. In the new idea of PML application, the PML doesn't need to be split into subsections to respectively compute the fields, nor the corners and the special edges, which spares computer memory and time effectively and practicably. At last, the verification of the idea is given through numerical examples.

**Key words:** perfectly matched layer; finite difference time - domain; absorbing boundary conditions