第 7 卷第 1 期　　空　军　工　程　大　学　学　报(自然科学版)　　Vol. 7　No. 1
2006 年 2 月　　JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION)　　Feb. 2006

关于超越整函数的一个性质

刘孝书[1]，　张武森[2]

(1. 商丘师范学院 数学系，河南 商丘　476000;2. 空军工程大学 理学院，陕西 西安　710051)

摘　要:利用整函数$f(z)$ 在圆$|z|=r$上最大模$M(r)$ 的一个性质及 Hadamard 三圆定理，证明了超越整函数不同于多项式的一个新特征，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=0$，其中 $k>1$ 。

关键词:整函数;最大模;Hadamard 三圆定理

中图分类号: O174.52　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2006)01-0092-03

设$f(z)$ 是复平面上的整函数，其最大模为 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ ，易见 $M(r)$ 关于 r 是单调增加的。对于与 r 同阶的 ρ 来说，$M(r)$与 $M(\rho)$ 是否也保持同阶? 本文研究了这个问题，并发现对于多项式整函数 $f(z)$ 而言，$M(r)$与 $M(\rho)$仍保持同阶，对于超越整函数，$M(r)$与 $M(\rho)$不再具有同阶的特征。下面的 Hadamard 三圆定理在我们的证明中将起主要作用。

Hadamard 三圆定理[1-4] 设$f(z)$ 在 $r_1\leqslant|z|\leqslant r_3$上解析，$M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$ ，则当 $r_1<r_2<r_3$时，有

$$M(r_2)\leqslant[M(r_1)]^{\frac{\log r_3-\log r_2}{\log r_3-\log r_1}}[M(r_1)]^{\frac{\log r_2-\log r_1}{\log r_3-\log r_1}} \tag{1}$$

1　主要结果与证明

定理 1　设$f(z)$ 为超越整函数，则对于 $k>1$ ，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=0 \tag{2}$$

证明　对于 $k>1$ ，我们易知$\frac{M(r)}{M(kr)}$ 关于 r 单调下降。

事实上，对于 $0<r_1<r_2$，由 $k>1$，有 $r_1<r_2<kr_2$，由 Hadamard 三圆定理得

$$[M(r_2)]^{\log\frac{kr_2}{r_1}}\leqslant[M(r_1)]^{\log k}[M(kr_2)]^{\log\frac{r_2}{r_1}} \tag{3}$$

又由 $r_1<kr_1<kr_2$，同理得到

$$[M(r_2)]^{\log\frac{kr_2}{r_1}}\leqslant[M(r_1)]^{\log\frac{r_2}{r_1}}[M(r_2)]^{\log k} \tag{4}$$

式(3)、(4)分别可写为

$$\left[\frac{M(r_2)}{M(kr_2)}\right]^{\log\frac{kr_2}{r_1}}\leqslant\left[\frac{M(r_2)}{M(kr_2)}\right]^{\log k} \tag{5}$$

和

$$\left[\frac{M(kr_1)}{M(kr_2)}\right]^{\log k}\leqslant\left[\frac{M(r_1)}{M(kr_1)}\right]^{\log\frac{kr_2}{r_1}} \tag{6}$$

收稿日期:2004-12-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171087);河南省教育厅自然科学基金资助项目(0211062106)
作者简介:刘孝书(1957-),男,河南商丘人,副教授,主要从事复变函数论的教学与研究.

由式(5)和(6)可得

$$\left[\frac{M(r_2)}{M(kr_2)}\Big/\frac{M(r_1)}{M(kr_1)}\right]^{\log\frac{kr_2}{r_1}} \leqslant \left[\frac{M(r_1)}{M(r_2)}\Big/\frac{M(kr_1)}{M(kr_2)}\right]^{\log k}$$

即

$$\left[\frac{M(r_2)}{M(kr_2)}\right]^{\log\frac{kr_2}{r_1}} \leqslant \left[\frac{M(r_1)}{M(kr_1)}\right]^{\log\frac{kr_1}{r_1}}$$

从而可得

$$\frac{M(r_2)}{M(kr_2)} \leqslant \frac{M(r_1)}{M(kr_1)}$$

即$\frac{M(r)}{M(kr)}$关于 r 单调下降。

设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=\alpha$$

由 $M(r)$ 的单调性知 $0\leqslant\alpha<1$ 。则对任意的 $r\in(0,+\infty)$ 有

$$\frac{M(r)}{M(kr)}\geqslant\alpha$$

若 $\alpha\neq0$,则

$$M(kr)\leqslant\frac{1}{\alpha}M(r)$$

在上式中用 kr 代替 r ,有

$$M(k^2r)\leqslant\frac{1}{\alpha}M((kr)\leqslant\frac{1}{\alpha^2}M(r)$$

继续重复上述过程,可得

$$M(k^nr)\leqslant\frac{1}{\alpha^n}M(r),\ n\text{ 为自然数}$$

取 $r=1$,并令 $M(1)=H$,有

$$M(k^n)\leqslant\frac{1}{\alpha^n}H \tag{7}$$

令 $k^n=r_n$,则

$$n=\frac{\log r_n}{\log k}\text{ 且 } r_n\to\infty\ (n\to\infty)$$

于是式(7)可写成

$$M(k^n)\leqslant H\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)^{\frac{\log r_n}{\log k}}=Hr_n^{\frac{\log\frac{1}{\alpha}}{\log k}} \tag{8}$$

设$f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mz^m$,在$|z|=r_n$上应用 Cauchy 不等式,得

$$|c_m|\leqslant\frac{M(r_n)}{r_n^m}\leqslant\frac{H}{r_n^{\,m-\frac{\log1/\alpha}{\log k}}}$$

当 $m>\frac{\log1/\alpha}{\log k}$ 时,由 $r_n\to\infty$ 知 $c_m=0$,从而$f(z)$必为多项式,这与$f(z)$ 是超越整函数矛盾,于是

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=0$$

定理证毕。

注 在定理 1 的条件下,若 $0<k<1$,易见

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=\infty$$

定理 2　设$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n(a_n\neq0)$,则对于 $k>0$,有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=(\frac{1}{k})^n$$

证明 对于$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$,有

$$M(r)=|a_n|r^n(1+o(1)),r\to\infty$$

于是对充分大的 r 有

$$\frac{M(r)}{M(kr)}=(\frac{1}{k})^n(1+o(1))$$

从而

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=(\frac{1}{k})^n$$

注 定理 1 和定理 2 反映了超越整函数与多项式间的一个本质差别。

参考文献:

[1] Ahlfors L V. Complex Analysis[M]. MCGraw - Hill Book Co,1979.

[2] 马库雪维奇. 解析函数论(中译本)[M]. 北京:科学出版社,1959.

[3] 莫 叶. 复变函数论教程[M]. 济南:山东大学出版社,1983.

[4] 刘孝书,郭志林. 关于单位圆内代数体函数的最大型博雷尔点[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2005,6(3):92 - 94.

(编辑:田新华)

A PROPERTY OF TRANSOENDENTAL INTEGRAL FUNCTIONS

LIU Xiao - shu[1],ZHANG Wu - sen[2]

(1. Department of Mathematics,Shangqiu Teachers College,Shangqiu,Henan 476000,China;2. Department of Science Research, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: In this paper ,a new property of transcendental integral functions has been proved by making use of Hadamard,s three - circle theorem and a character of maximum principle of integral function $f(z)$ which is defined in circumference $|z|=r$,i. e. $\lim_{n\to\infty}\frac{M(r)}{M(kr)}=0$,where$k>1$.

Key words: integral function; maximum principle; Hadamard,s three - circle theorem

(上接第 86 页)

Development of a PC / 104 - Based Real - Time and Embedded Linux System

FENG Min, FAN Xiao - guang, CHU Wen - kui

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: Based on the features of PC / 104 module - EmCORE -- i316VL / C400, a real - time and embedded Linux system is built, which will be used in a test & controlling system for aero - bus. The processes of development are described in detail, which are related to the setup of Linux Kernel, installation of boot - loader, development of GNU tool - chains, and supports of real - time feature. In addition, the principle of selection about file system is analyzed briefly.

Key words: PC / 104; real - time; embedded; Linux