

一种递归滤波的提升方法

杨维^{1,2}, 宋国乡¹, 张宪民³

(1. 西安电子科技大学 应用数学系, 陕西 西安 710071; 2. 桂林电子工业学院 计算科学与数学系, 广西 桂林 541004; 3. 西安文理学院, 陕西 西安 710068)

摘要:引入了一种对信号递归滤波的提升方法,该方法与通常的提升方法不同之处是使用 IIR 滤波器。探讨了空间域中基于离散插值样条的预测算子和更新算子的设计,提出的方法以插值为基础,只涉及信号的采样,不要求使用正交公式,更适合信号的处理。最后由数值仿真验证了该算法的性能,对于软阈值法小波系数去噪,提升小波变换 T_1^2 同 B9/7 相比,前者略优于后者,提升方法的优点在于其设计上的灵活性和计算花费少。

关键词:小波变换;离散插值样条;提升;去噪

中图分类号: TN 911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2005)06-0052-04

小波滤波器和小波变换在信号和图像处理,通信系统和与之相关的领域已成为强有力的工具。小波滤波器的性质如正交性,对称性,紧支撑性,消失矩等对信号和图像的处理是至关重要的。Sweldens 引入了 Lifting scheme 小波变换^[1],也称为第二代小波变换。用连续多项式样条来构造小波已有不少文献^[2-3],而用离散样条的并不多见^[4]。事实上,离散样条小波是处理离散时间信号更合适的工具^[5]。用离散插值样条构造的小波,由于它的插值性和对称性,而且只涉及到信号的采样,并不要求满足正交性。因此把 Lifting scheme 与离散插值样条相结合,可以对信号进行递归滤波,并可以进行快速迭代与并行处理。

本文将在离散插值样条的概念下引入具有任意阶消失矩的小波滤波器族,并从中选出既有好的应用性能又有快速计算性能的小波滤波器。

1 离散插值样条

下面介绍离散插值样条的一些结论,详细内容可参阅文献[6]。

用 $\sigma(k)$, ($k \in \mathbb{Z}$) 表示离散样条在节点中点的值, $e(k) = \{e(k)\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l^1$ 是一给定的离散时间信号序列。那么有下面的定理:

定理 1 离散插值样条在节点中点的 Z-变换是

$$\sigma(z^2) = zU_r(z)e(z^2), \text{ 其中, } U_r(z) = \frac{(1+z^{-1})^{2r} - (-1)^r(1-z^{-1})^{2r}}{(1+z^{-1})^{2r} + (-1)^r(1-z^{-1})^{2r}}, r \in \mathbb{N}$$

从上式易见, $zU_r(z)$ 实际上是 z^2 的有理函数,记为 $F_r(z^2)$, 即 $F_r(z^2) = zU_r(z)$ 。

2 Lifting scheme

2.1 Lifting scheme 小波变换的分解

Sweldens 提出的 Lifting scheme 对信号 x 分解由 3 部分构成:①分割(split);②预测(predict);③更新(update)。下面根据这 3 步来构造提升方法。

收稿日期:2005-01-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10361003)

作者简介:杨维(1965-),男,湖南岳阳人,副教授,博士生,主要从事小波理论及其应用研究。

分割:把信号 x 分成奇、偶两个序列

$$e_1 = \{e_1(k) = x(2k)\}, d_1 = \{d_1(k) = x(2k+1)\}, k \in \mathbf{Z}$$

预测:用偶序列预测奇序列后,得到的新序列 d_1^u 的 z 变换为

$$d_1^u(z^2) = d_1(z^2) - zU_r(z)e_1(z^2)$$

在提升方法中,预测误差 $d_1^u(z^2)$ 常称为信号的小波系数。

提升:用新的奇序列提升偶序列

$$e_1^u(z^2) = e_1(z^2) + z^{-1}\beta(z)d_1^u(z^2)$$

其中, $e_1^u(z^2)$ 称为信号 x 的低频成分, $\beta(z)$ 称为控制滤波器,这里只要求 $\beta(z)$ 是实值的,并满足 $\beta(-z) = -\beta(z)$,从而, $z^{-1}\beta(z)$ 是 z^2 的函数。

2.2 Lifting scheme 小波变换的重构

从 e_1^u 和 d_1^u 来重构信号 x 可按分解的逆过程来完成:

$$e_1(z^2) = e_1^u(z^2) - z^{-1}\beta(z)d_1^u(z^2); d_1(z^2) = d_1^u(z^2) + zU_r(z)e_1(z^2); x(z) = e_1(z^2) + z^{-1}d_1(z^2)$$

记 $\Phi_{l,r}(z) = (1 + U_r(z))/2$, $\Phi_{h,r}(z) = (1 - U_r(z))/2$

定义 $\tilde{g}^r(z) = 2z^{-1}\Phi_{h,r}(z)$ $\tilde{h}_\beta^r(z) = 1 + 2\beta(z)\Phi_{h,r}(z)$ (1)

$h^r(z) = 2\Phi_{l,r}(z)$ $g_\beta^r(z) = z^{-1}(1 - 2\beta(z)\Phi_{l,r}(z))$ (2)

其中, $\tilde{h}_\beta^r(z)$ 和 $\tilde{g}^r(z)$ 分别称为分解低通和高通滤波器的传递函数, $h^r(z)$ 和 $g_\beta^r(z)$ 分别称为重构低通和高通滤波器的传递函数。这 4 个滤波器形成一个完全重构滤波器组。

3 控制滤波器的选择

从式(1)和式(2)可知, $\tilde{h}_\beta^r(z)$ 和 $g_\beta^r(z)$ 与 $\beta(z)$ 有关,选取了不同的 $\beta(z)$, 就是选取了不同的更新算子。因为 $(1+z^{-1})^{2r}$ 为一低通滤波器, $(1-z^{-1})^{2r}$ 为一高通滤波器,因此 $h^r(z)$ 和 $\tilde{g}^r(z)$ 具有线性相位,且在通带及阻带内是最大平坦的。为了保持与 $h^r(z)$ 和 $\tilde{g}^r(z)$ 有相似的性质,最简单的方法是选取

$$\beta(z) = \frac{U_r(z)}{2} = \frac{1(1+z^{-1})^{2r} - (-1)^r(1-z^{-1})^{2r}}{2(1+z^{-1})^{2r} + (-1)^r(1-z^{-1})^{2r}}$$

利用前面的结论,用提升方法来实现小波变换,其变换的分解过程为

$$d_1^u(z^2) = d_1(z^2) - zU_r(z)e_1(z) \quad (3)$$

$$e_1^u(z^2) = e_1(z) + \frac{1}{2}F_p(z)z^{-1}d_1^u(z) \quad (4)$$

显然,不同的 p, r 值对应不同的滤波器,也就是不同的预测算子和更新算子。用 T_p^r 表示上述变换式(3)和式(4)的分解过程,下面讨论几种最简单的提升小波变换。

由定理 1 知,当 $r=1$ 时, $F_1(z) = (1+z)/2$ 是 FIR 滤波器。提升小波变换 T_1^1 的滤波器的传递函数为 $\tilde{g}^1(z) = -\frac{(1-z)^2}{2z^2}$, $\tilde{h}_\beta^1(z) = \frac{-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2}{8}$; 当 $r=2$ 时, $F_2(z)$ 是 IIR 滤波器,可用下面迭代方法实现:

$$x_1(k) = 4\alpha_1^2 x(k) - \alpha_1^2 x_1(k-1), \quad \alpha_1^2 y(k) = x_1(k-1) + x_1(k) - y(k-1)$$

其中, $\alpha_1^2 = 3 - 2\sqrt{2}$, 同样可用迭代方式实现 $F_3(z)$ 。

4 滤波器的性能分析

用双正交小波 B9/7 对一幅大小为 $N \times N$ 的图像作一步分解,每个象素需要 $8A + 4M$ ($8A$ 表示 8 次加法, $4M$ 表示 4 次乘法) 次运算,而用变换 T_p^r 可通过下列提升来完成:

$$d_1^u(k) = d_1(k) - F_p e_1(k+1), \quad e_1^u(k) = e_1(k) - F_p d_1^u(k+1)$$

由于 p, r 可以取不同的值,可采用级联或并联方式实现这些变换,所要的运算次数也不同。例如,用滤

波器 $F^l(z) = (1+z)/2$ 对长度为 $N/2$ 的信号滤波,需要的运算次数是 $(1A+1M)/N/2$,易算得 $r, p=1, 2, 3$ 时对图像每一个象素的分解所要的运算次数如表 1 所示,变换 T_2^1 和 T_3^1 的次数分别等于 T_2^2 和 T_3^2 的次数。由表 1 知,采用级联方式, T_2^1, T_1^2 和 T_1^1 的花费就要比 B9/7 少。当然,在有 2 或 3 个数据流的并行实现中,可得到比 B9/7 更快的并行处理。表 2 列出了表 1 中小波滤波器分析高频小波 (AHFW) 和综合高频小波 (SHFW) 的消失矩数。因为 B9/7 的分解端和综合端的小波滤波器的消失矩都为 4,一方面,在小波图像处理系统中,分解端和重构端并不要求具有相同的性质,一般说来,分解端要求较高的消失矩,而重构端就没有如此严格的要求,另一方面,消失矩太大,小波的支撑集则长,不利于快速计算,通过小波变换的计算复杂度和消失矩的分析,变换 T_1^2 是表中 7 个变换中最佳选择,因此选取 T_1^2 和 B9/7 来作仿真实验。

表 1 小波变换运算次数

变换	B9/7	T_2^2	T_1^2	T_2^3	T_3^3	T_1^1
级联方式	$8A+4M$	$8A+6M$	$6A+4M$	$10A+8M$	$12A+10M$	$4A+2M$
并联方式		$6A+4M$	$5A+3M$	$7A+4M$	$8A+4M$	$4A+2M$

表 2 分析高频小波和综合高频小波滤波器的消失矩数

	T_1^1	T_2^1	T_1^2	T_2^2	T_3^2	T_2^3	T_3^3
AHFW	2	2	4	4	4	6	6
SHFW	2	2	2	4	4	4	6

5 数值仿真

在此仿真中,采用通用阈值公式 $\lambda(j) = \sigma(j)\sqrt{2\log N}$ (其中 N 是采样个数, σ^2 是噪声方差,) 进行分层阈值处理,其中 $\sigma(j)$ 是噪声在尺度 j 上的方差,对应的 $\lambda(j)$ 是尺度 j 上的阈值。对任一高频系数 y_i 作软阈值处理,然后用处理后的高频系数 \hat{y}_i 与低频系数就可以重构去噪图像。

为了估计去噪效果,对标准测试矩形波信号和 Doppler 信号叠加高斯白噪声 ($\sigma = 6, SNR_{input} = 4$), 如图 1、4 所示。用 B9/7 和离散插值样条提升小波变换 T_1^2 在 6 尺度上用软阈值法去噪,去噪后均方误差和信噪比如表 3 所示。用 B9/7 和 T_1^2 分别对矩形波信号和 Doppler 信号去噪后的图像如图 2、3、5、6 所示。从仿真结果看,用 T_1^2 去噪后均方误差和信噪比都有改善,信号都很好地保留了信号发展初期的高频特性,而且得到的重构信号更光滑,最大限度地反应了原信号本身的性质,其优点在于通过级联和并联处理,快速实现提升小波变换,并且计算花费少。

表 3 信号的去噪比较

信号	B9/7		T_1^2	
	均方误差	信噪比	均方误差	信噪比
矩形波	7.201 4	6.293 6	7.194 7	6.314 9
Dopper 信号	6.924 5	5.714 8	6.820 3	5.771 7

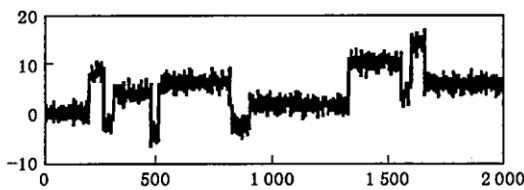


图 1 含噪声信号



图 2 B9/7 去噪后的重构信号

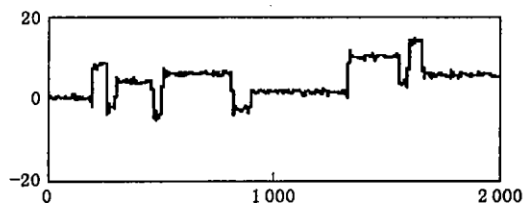


图 3 T_1^2 去噪后的重构图象

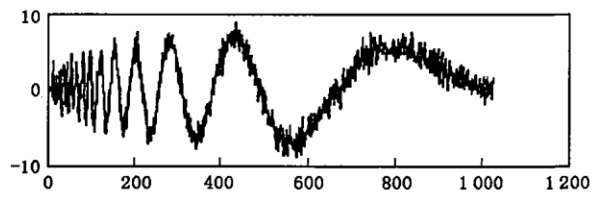


图 4 含噪声 Doppler 信号

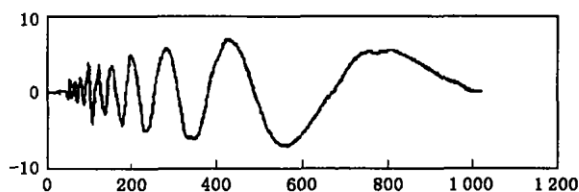
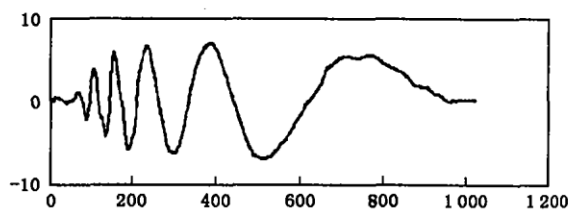


图5 B9/7 去噪后的重构信号

图6 T_1^2 去噪后的重构图象

6 结论

本文讨论了基于离散插值样条的提升小波变换,该方法用递归对称 IIR 滤波器来实现,并可快速级联和并联处理,计算花费少。值得强调的是,所用的方法是基于插值的,仅涉及信号的采样,而不需要使用正交公式,这个性质对信号和图像的处理是非常方便的,最后的去噪仿真实验验证了该算法的性能。离散插值样条提升小波变换也可用于信号和图像的其他方面,如图像编码等,这有待于进一步的研究。

参考文献:

- [1] Sweldens W. The Lifting Scheme: A Custom Design Construction of Biorthogonal Wavelets[J]. Appl. Comput. Harm. Anal. 1996, 3(2), 186 - 200.
- [2] Chui C K, Wang J Z. On Compactly Supported Spline Wavelets and A Duality Principle[J]. Trans. Amer. Math. Soc. 1992, 330, 903 - 915.
- [3] Unser M, Aldroubi A, Eden M. A Family of Polynomial Spline Wavelet Transforms[J]. Signal Processing 1993, 30, 141 - 162.
- [4] Malozemov V N, Pevniy A B. A Fast Wavelet Transform for Discrete Periodic Signals and Images[J]. Problems Inform. Transmission, 1998, 34(2): 161 - 168.
- [5] 冯存前,张永顺,童宁宁. 一种基于离散小波变换的自适应滤波新算法[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2004, 5(5): 49 - 53.
- [6] Averbuch, Amir Z, Alexander B. Butterworth Wavelet Transforms Derived From Discrete Interpolatory Splines: Recursive Implementation[J]. Signal Processing, 2001, 80(11), 2362 - 2382.

(编辑:田新华)

The Lifting Scheme Based on the Recursive Filtering

YANG Wei^{1,2}, SONG Guo-xiang¹, ZHANG Xian-min³

(1. Department of Science, Xi'dian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China; 2. Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi 541004, China; 3. XI'AN Science Arts College, Xi'an, Shaanxi 710068)

Abstract: This paper develops a lifting scheme based on the recursive filtering of signals. The lifting scheme proposed operates with IIR filters and is different from the conventional lifting scheme. The lifting construction exploits prediction operator and update operator design based on the interpolation discrete splines in a spatial domain. The proposed scheme is based on interpolation and, as such, it involves only samples of signals and does not require any use of quadrature formulas and is more suitable for signal processing. Finally the performance of the algorithm is discussed by comparing the transform with the wavelet transform B9/7 on denoise of two - dimension test images according to soft threshold of wavelet coefficient. The former outperforms slightly the latter. The advantages of lifting scheme lie in its flexibility in design and the lower cost in computation.

Key words: wavelet transform; interpolation discrete splines; lifting scheme; denoising