

基于Morlet小波带通滤波特性的振动系统频率识别

张波^{1,2}, 李健君², 李鸿超¹

(1. 西北工业大学自动化学院, 陕西西安 710072; 2. 空军工程大学工程学院, 陕西西安 710038)

摘要: 利用Morlet小波在频域的带通滤波特性, 对通过改变Morlet小波的带宽, 直接在尺度图上识别振动系统频率的方法进行了分析研究。该方法的特点是简单易行, 便于应用。并针对实际试验数据中存在严重噪声污染和振动系统的密集模态识别问题, 进行了仿真, 仿真结果验证了该方法的有效性和可行性。

关键词: Morlet小波; 带通滤波; 尺度图; 振动系统频率; 识别

中图分类号: TB53 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2005)05-0073-03

1 小波变换与尺度图

信号 $x(t)$ 的小波变换为 $WT_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h^*((t-\tau)/a) dt$ $a > 0, \tau \in R$ 。式中 $h((t-\tau)/a)$ 是母小波函数 $h(t)$ 经过时间平移 τ 和尺度伸缩 a 后得到的一族形状相同的函数(上标 * 代表取共轭)。等效的频域表示是 $WT_x(a, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H^*(af) \exp(j2\pi f\tau) df$ 。其中 $X(f)$ 、 $H(f)$ 分别是 $x(t)$ 、 $h(t)$ 的傅里叶变换。由上式可以看出: 信号 $x(t)$ 的小波变换可以看成是信号 $x(t)$ 通过一个频率响应为 $H^*(af)$ 的带通滤波器后得到的结果, 而 $H^*(af)$ 可以由一个基本滤波器 $H(f)$ 转化而来, 如果 $H(f)$ 是一窄带带通函数, 则小波变换具有表征信号 $X(f)$ 频域上局部性质的能力。

由于 Morlet 小波对于振动信号在频域和时域具有清晰的描述^[1], 所以本文采用 Morlet 小波 $h(t) = \exp(-t^2/F_B) \exp(j2\pi f_0 t)$ 作为基函数, 它是高斯包络下的复指数函数。其中, F_B 是与带宽有关的系数, f_0 是小波的中心频率。其频谱为 $H(f) = \sqrt{\pi/F_B} \exp(-F_B(2\pi f - 2\pi f_0)^2/4)$, 由上式可以看出, Morlet 小波的频谱 $H(f)$ 是中心频率在 f_0 的高斯型函数^[2], 接近于一窄带带通函数, 带宽 $B = \sqrt{4/F_B}$, 即通过改变带宽系数 F_B 就可以改变 $H(f)$ 的带宽, 且 F_B 愈大, 带宽 B 愈窄, 从而改变其滤波特性, 见图1。为了便于比较, 对 $H(f)$ 进行了归一化处理, 同时改变中心频率 f_0 就可以表征 $X(f)$ 在 f_0 附近的局部性质。

上述 Morlet 小波函数经过时间平移和尺度伸缩后得 $h_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h((t-\tau)/a)$ 。傅立叶变换为

$$h_{a,\tau}(f) = aH(af) \exp(j2\pi f\tau);$$
$$H(af) = \sqrt{\frac{\pi}{F_B}} \exp\left(-\frac{F_B}{4}(2\pi af - 2\pi af_0)^2\right) =$$
$$\sqrt{\frac{\pi}{F_B}} \exp\left(-\frac{a^2 F_B}{4}\left(2\pi f - \frac{2\pi f_0}{a}\right)^2\right)$$

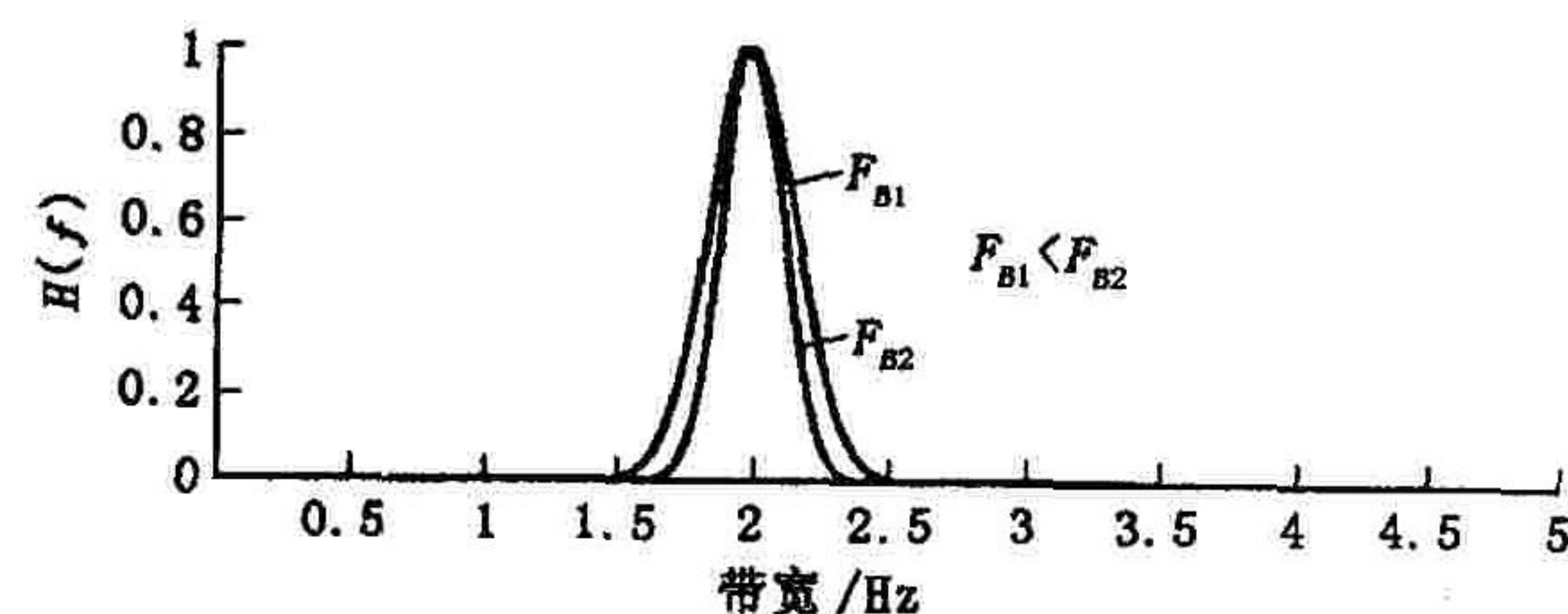


图1 Morlet小波的带宽系数 F_B 与带宽之间的关系

收稿日期: 2005-01-27

作者简介: 张波(1965-), 女, 山东乳山人, 副教授, 博士生, 主要从事小波变换的分析与应用研究。

由式 $H(af)$ 可以看出,当 Morlet 小波作不同尺度 a 的伸缩后,其中心频率由 f_0 变化为 f_0/a ,带宽由 $\sqrt{4/F_B}$ 变化为 $1/a\sqrt{4/F_B}$,见图 2。 $a=1$ 所对应的是未经尺度伸缩的频谱,其中心频率为 4Hz; $a=4$ 所示的是经尺度伸缩后的频谱,由图 2 可以看出,这时的中心频率变为 1Hz,带宽也缩小为原来的 1/4,因此,品质因数 $Q = \text{中心频率} / \text{带宽}$ 保持不变,这说明 Morlet 小波变换相当于一组恒 Q 的带通滤波器。

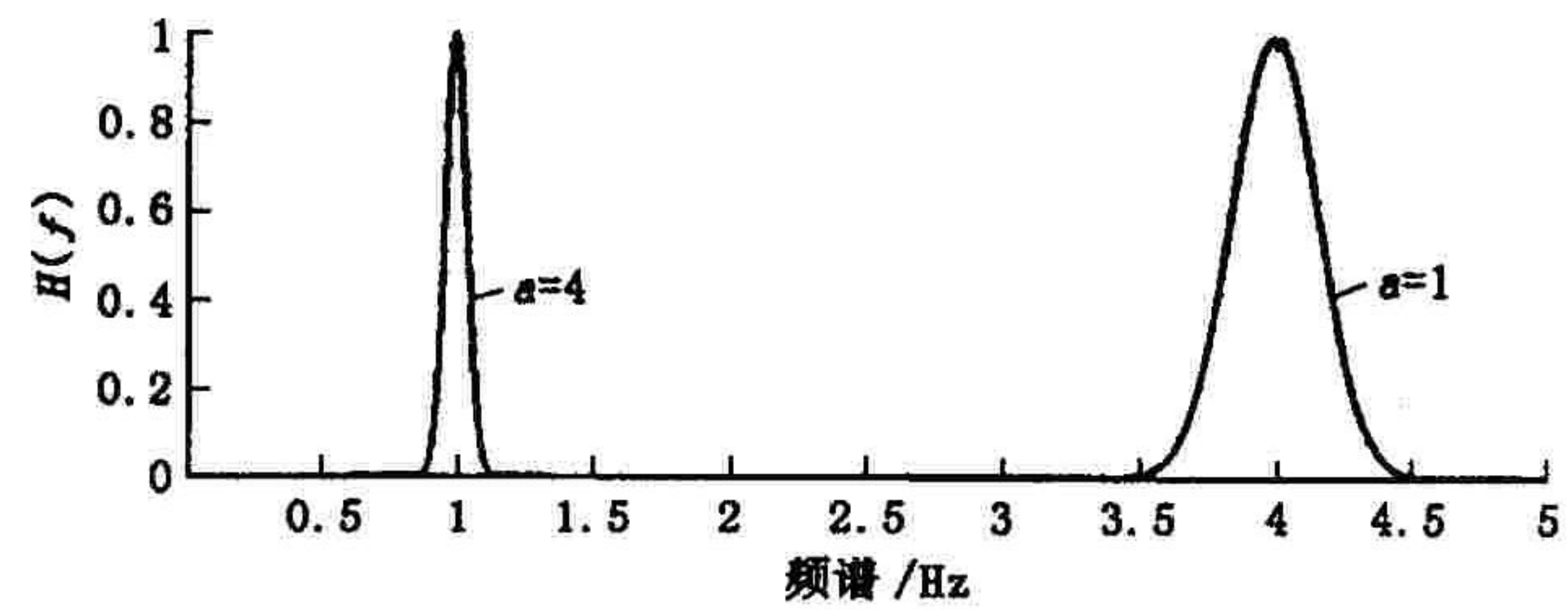


图 2 尺度伸缩时 Morlet 小波的恒 Q 性

另外,由 Moyal 公式能引出一个类似巴塞瓦定理的关系,即小波变换幅度平方的积分和信号的能量成正比 $\int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty |WT_x(a, \tau)|^2 d\tau = c_\psi \int_{-\infty}^\infty |x(t)|^2 dt$ 。式中 $c_\psi = \int_0^\infty \frac{|H(f)|^2}{f} df$ 。

因此,可以用小波变换模值的平方来定义信号 $x(t)$ 的尺度图^[3-4],即 $SCAL_x(a, \tau) = |WT_x(a, \tau)|^2$ 。在时间-尺度平面上,信号可以用一个面积正比于时间-带宽乘积 $T \times B$ 的能量聚集区域表示出来。根据频率与尺度之间的关系 $f = f_0/a$,也可以将在时间-尺度平面上的表示方法转换到时间-频率平面。

根据 Heisenberg-Gabor 准则 $T \times B \geq 1$ 。上述不等式表明了时宽和带宽不可能同时达到任意小,如果减小带宽,则时宽会随之增大。设信号为 $x(t) = k(t) \cos(2\pi f(t)t)$ 。其小波变换为 $WT_x(a, \tau) = \sqrt{\frac{\pi}{F_B}} k(\tau) \exp(-\frac{F_B}{4}(2\pi a f(\tau) - 2\pi f_0)^2) \exp(j2\pi f(\tau)\tau)$ 。信号小波变换的模为 $|WT_x(a, \tau)| = \sqrt{\frac{\pi}{F_B}} k(\tau) \exp(-\frac{F_B}{4}(2\pi a f(\tau) - 2\pi f_0)^2)$ 。由上式可以看出,当 $a = \frac{f_0}{f(\tau)}$ 时,信号 $x(t)$ 小波变换的模值最大,则在尺度图(或时频图)上对应的能量也最大,根据这一性质,可以在尺度图上识别出信号的频率 $f(\tau)$ 。

2 仿真结果

2.1 正弦信号

为了形象直观地说明 Morlet 小波变换的带通滤波特性,假设信号 $x(t)$ 在三个不同时间段上分别由三种不同频率(10 Hz、20 Hz 和 30 Hz)的正弦信号构成,见图 3(a)。然后在小波中心频率相同的条件下,对信号 $x(t)$ 进行小波变换,图 3(b)和(c)分别为带宽系数 F_B 取不同值时小波变换时频图,其中图 3(c)的带宽系数 F_B 大于图 3(b),从图中可以看出,由于 Morlet 小波带宽变窄,从而使信号的频率识别精度提高,与此同时,时宽增大,这是由 Heisenberg-Gabor 准则所决定的。

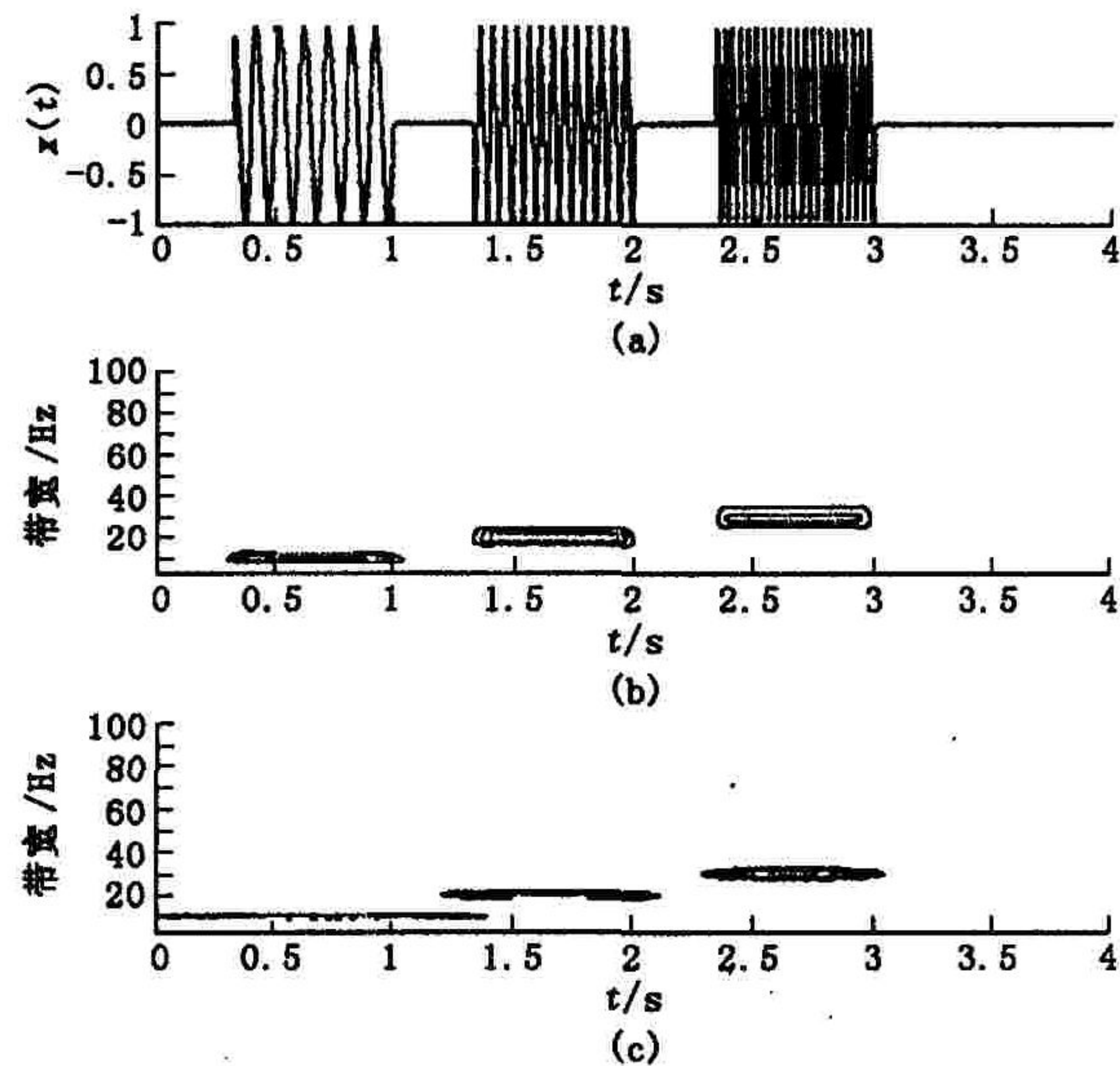


图 3 时间-频率平面上识别正弦信号的频率

2.2 二阶阻尼振动系统的脉冲响应

在实际试验时,由于环境等因素的影响,所获得的试验数据都是含有噪声的,有时信号几乎是淹没在噪声当中的。

图 4(a)所示为淹没在随机噪声当中的二阶阻尼振动系统的脉冲响应信号,其中信噪比约为 -15dB。图 4(b)是通过快速 Fourier 变换,得到的信号频谱,从中难以识别出信号的频率。图 4(c)和(d)分别为带宽系数 F_B 取不同值时,信号的 Morlet 小波变换时频图。其中图 4(c)的带宽系数 F_B 小于图 4(d),可以看出,当小波的带宽较大时,对噪声的滤波效果差,时频图上能量的分布杂乱无章,难以识别出信号频率。随着小波带宽系数的增大, Morlet 小波带宽变窄,对噪声的滤波效果增强,在时频图上能清晰地显示出信号的能量分布在 10Hz 附近,将淹没在噪声中的有用信号频率识别出来。

2.3 多模态振动系统的快速扫频正弦响应

对于多模态的振动系统,为了激出其所有的模态响应,并提高模态识别的精度,可采用快速扫频正弦激励的方法。图 5 所示为通过改变 Morlet 小波的带宽,来提高密集模态的频率识别效果。其中图 5(a)为振动

系统的线性扫频正弦激励响应 $x(t)$,两个模态的频率分别为 10 Hz、15 Hz。图 5(b)和(c)分别为带宽系数 F_B 取不同值时系统响应 $x(t)$ 的 Morlet 小波变换的时频图。图 5(b)为带宽系数 F_B 较小时的识别结果,从图中可以看出,能量分布在 5 Hz 到 25 Hz 之间,并连成一片,很难识别出两个模态各自的频率;图 5(c)为增大带宽系数后的识别效果,很显然由于带宽变窄, Morlet 小波的带通滤波特性增强,时频图上的能量分别集中在 10 Hz、15 Hz,因此,可以通过增大 Morlet 小波的带宽系数,提高密集模态频率的识别精度。

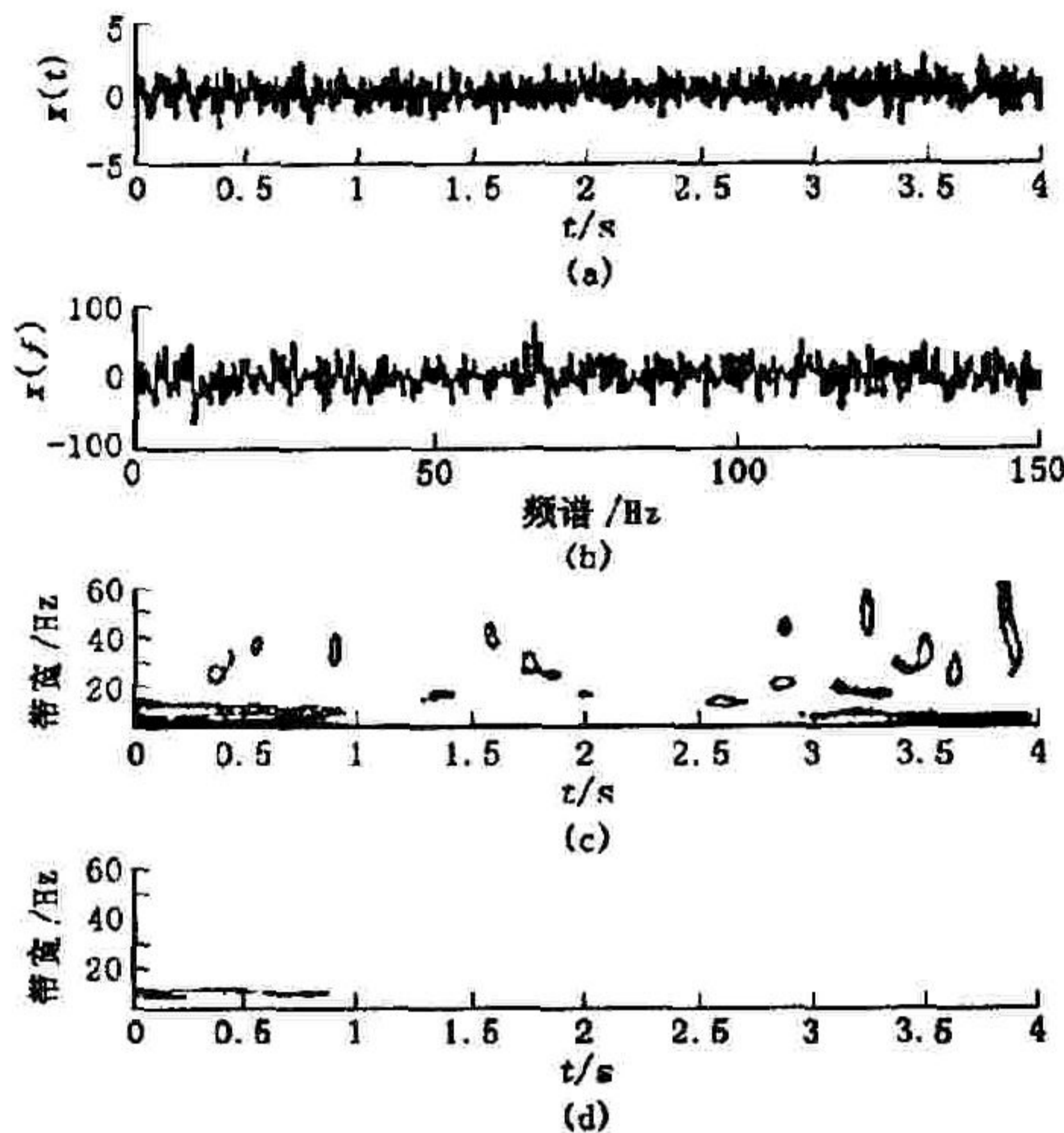


图 4 二阶阻尼振动系统的脉冲响应信号识别系统频率

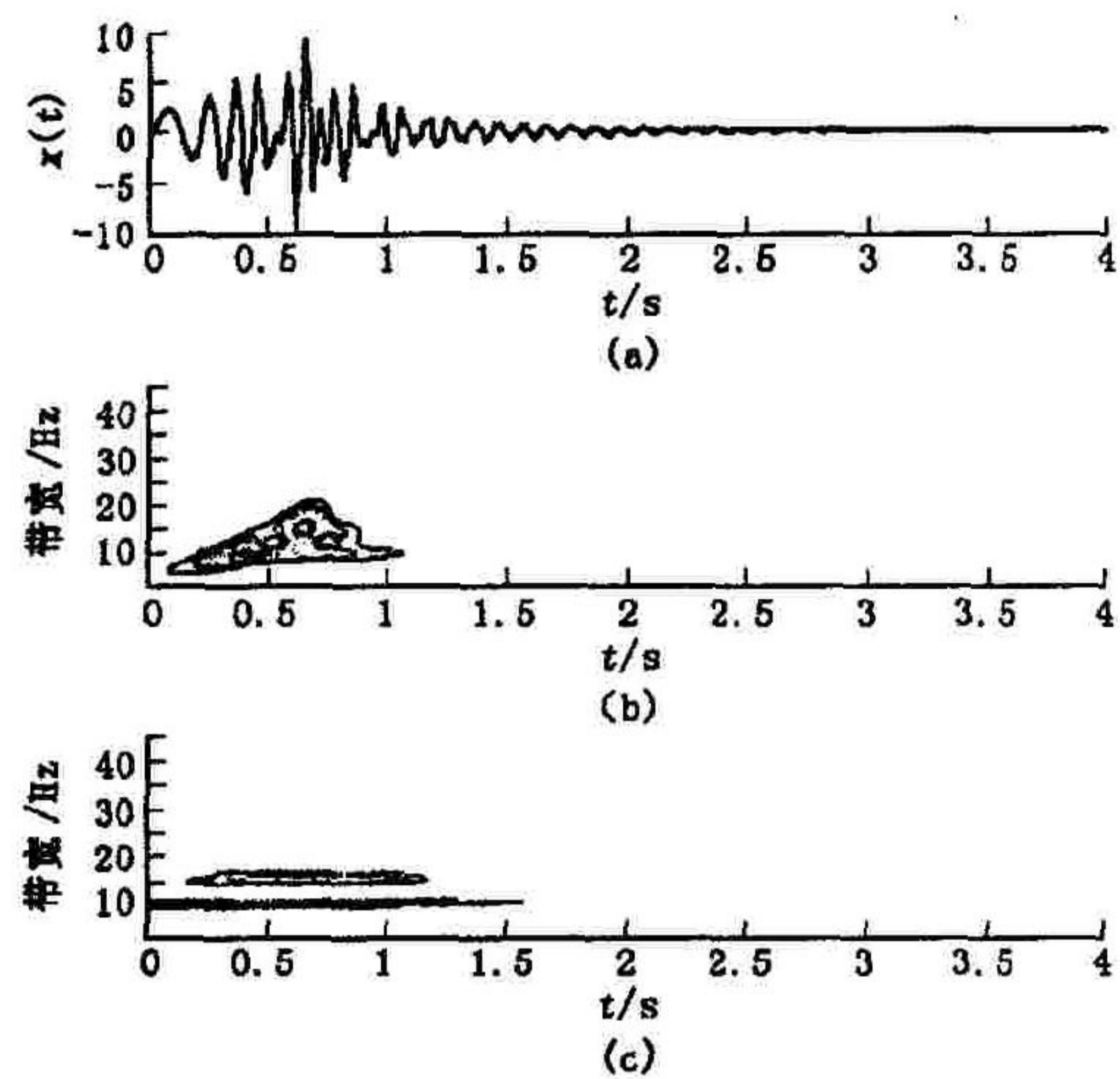


图 5 时间 - 频率平面识别密集模态的频率

3 结论

利用 Morlet 小波的带通滤波特性,分析研究了通过改变小波的带宽系数,改善其滤波性能,从而提高振动系统频率的识别精度。该方法简单易行,对受噪声污染严重的信号以及密集模态的频率识别具有良好的效果,而且由于识别结果直接在尺度图(或时频图)上显示出来,形象直观。今后对于频率识别精度的量化问题,有待于进一步的分析和研究。

参考文献:

[1] Martin J Brenner. Wavelet analyses of F/A - 18 aeroelastic and aeroservoelastic flight test data[R]. NASA - TM - 4793,1997.
 [2] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京:科学出版社,1999.
 [3] Marty Brenner, Dale Groutage. Nonstationary Dynamics Data Analysis With Wavelet - SVD Filtering[R]. NASA/TM - 2001 - 210391.
 [4] 胡昌华,周 涛. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——时频分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2002.

(编辑:姚树峰)

A Method for Identifying Frequency of Vibration Systems Based on
 Band -Pass Filtering Characteristic of Morlet Wavelet

ZHANG BO^{1,2}, LI Jian-jun², LI Hong-chao¹

(1. The Automatic Institute, Northwestern Polytechnic University, Xi'an, Shaanxi 710072, China; 2. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract:Using band - pass filtering characteristic of Morlet wavelet in frequency area, a method for identifying frequency of vibration systems directly on scalograms by changing frequency bandwidth of Morlet wavelet is studied. The advantages of this method are simple and easy in use. The circumstances in accordance to existing serious noise in real test data and identifying closely mode of vibration systems are simulated. The results of simulation show that the method is feasible and effective.

Key words : Morlet wavelet; band - pass filtering; scalogram; frequency of vibration systems ; identification