

各向异性扩散滤波器的迭代停止准则

李世飞^{1,2} 董福安² 伍友利¹ 张 志¹

(1 空军工程大学工程学院, 陕西西安 710038; 2 空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

摘要: 利用各向异性扩散滤波模型对图像进行平滑的过程中, 迭代停止准则对图像平滑的效果有着重要的影响。本文提出了一种简单实用的最优停止准则, 该准则确定了一个标准, 使得平滑后的图像与噪声的相关性最小时停止迭代。它易于实现而且有很强的通用性。实验结果表明该算法可以在图像平滑过程中适时地停止迭代, 获得满意的图像平滑效果。

关键词: 扩散方程; 图像平滑; 停止准则; 各向异性

中图分类号: TP391. 41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2005)05-0070-03

近年来, 各向异性扩散滤波得到了众多学者的关注。实际上, 早在 1983 年, Witkin 就指出, 初始信号图像与不同尺度(方差)的高斯函数卷积等价于求解线性扩散方程的解^[1]。但是, 这种线性扩散方程具有各向同性的性质, 因而它在平滑噪声的同时也模糊了图像重要边界特征。为了克服上述缺点, 1990 年, Perona 和 Malik 首次将各向异性扩散引入图像滤波, 提出了非线性各向异性扩散模型(以下简称 P-M 模型)^[2], 这种各向异性扩散滤波器是一种性能优良的滤波器, 它在实现区域内的平滑同时防止了区域间的平滑, 具有在平滑噪声的同时能很好地保持甚至增强边缘的优良特性。

在图像滤波的理论和实践过程中, 减少参数数量, 实现自适应滤波是快速准确获取滤波图像的一个基本原则。各项异性滤波实现上述特性的同时, 它也引入了新的扩散系数参数。另外, 线性各向同性滤波的扩散时间确定为 $t = \sigma^2/2$, 与线性各向同性滤波相比, P-M 模型又增加了一个“参数”, 这就是迭代停止时间 t 。虽然迭代停止时间 t 不是一个真正意义上的参数, 但是如果扩散时间 T (由于扩散时间与迭代次数成对应关系, 下文对扩散时间与迭代次数不加区分) 太小, 难以获得满意的效果, 如果 T 太大, 则会出现过光滑反而错过了最佳滤波效果。所以它的不确定性严重影响了向异性扩散滤波器的自适应性。事实上, 此后提出的多个 P-M 模型的改进方案都面临这样的问题^[3-6]。

迭代停止时间 T 的不确定性本质上是图像滤波标准的不确定性。因此, 图像滤波标准决定了迭代停止时间 T 。国外学者对此问题有一些有益的探索: Solo 基于风险函数提出了确定迭代停止时间的方法^[7], 但是该方法计算代价大, 可靠性也不高, Barcelos 则建议用经验公式确定最优停止时间^[5], 此方法有一定的实际效果, 但没有理论说服力。Weickevt 提出的方法又过于依赖先验知识^[8]。因此, 本文提出了去相关图像滤波标准, 从而得到了去相关迭代停止准则。

1 各向异性扩散的引入

设 u_0 为待处理的图像, u 为处理后的图像, 高斯滤波器可以描述为 $u = G_\sigma * u_0$, 其中 $G_\sigma = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}/2\pi\sigma^2$ 。那么 $u = G_\sigma * u_0$ 恰为线性扩散方程 $\partial u(x, y, t)/\partial t = \Delta u(x, y, t); u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ 在时间 $t = \sigma^2/2$ 的解, 这一关系把扩散方程与滤波器紧密联系起来。

收稿日期: 2004-06-14

基金项目: 国家自然科学基金(10474077)与陕西省自然科学基金资助项目(2000C03)

作者简介: 李世飞(1978-), 男, 湖北赤壁人, 博士生, 主要从事应用微分方程, 图像处理中的数学方法等研究;

董福安(1958-), 男, 陕西西安人, 教授, 主要从事应用微分方程等研究。

为了克服线性扩散过程中各向同性的缺点, Perona 和 Malik 提出的非线性各向异性扩散模型为^[2]

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \nabla (g(|\nabla u|) \nabla u) \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

式中 t 为尺度参数。函数 g 为扩散函数, 它是一个非增函数, 满足 $g(0) = 1$, $g(\infty) = 0$, 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$, Perona 和 Malik^[2] 建议的扩散函数是

$$g(|\nabla u|) = 1 / (1 + \left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2) \text{ 和 } g(|\nabla u|) = \exp\left\{-\left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2\right\}$$

对式(1), 离散化方法是 $(u_{x,y}^{n+1} - u_{x,y}^n) / \lambda = g(|\Delta_x^+|) |\Delta_x^+| - g(|\Delta_x^-|) |\Delta_x^-| + g(|\Delta_y^+|) |\Delta_y^+| - g(|\Delta_y^-|) |\Delta_y^-|$ 。其中 $\Delta_x^+ = u_{x+1,y}^n - u_{x,y}^n$; $\Delta_x^- = u_{x,y}^n - u_{x-1,y}^n$; $\Delta_y^+ = u_{x,y+1}^n - u_{x,y}^n$; $\Delta_y^- = u_{x,y}^n - u_{x,y-1}^n$ 。为了保证计算的稳定性, λ 必须满足 $0 \leq \lambda \leq 1/4$ 。

文献[4]详细讨论了 P-M 模型引入的新的扩散系数的确定方法, 取得了较好的效果。

2 去相关迭代停止准则

设 $u_0 = f + n$, u_0 表示初始图像, f 表示理想的无噪声图像, n 代表噪声, u_t 代表模型在尺度 t 上获得的图像。扩散滤波过程也就是获得方程在一系列不同尺度上的解从 u_0 到 u_1 的过程。问题在于, 该如何选择最优停止时间 T 使得 u_T 最佳地逼近理想的无噪声图像 f 。

假设 f 表示理想的无噪声图像与噪声 n 不相关, 借用随机过程中相关系数的概念, 可以得到一种简单而实用的去相关最优停止准则。

设滤波过程获得的尺度为 t 的图像即为最佳滤波图像, 可以用 $u_0 - u_t$ 表示图像噪声, 那么 u_t 与 $u_0 - u_t$ 应该有最小的相关性, 也就是说, 把滤除噪声的过程看成是降低“噪声”与滤波图像的相关性的过程, 基于这一思想, 计算相关系数: $\rho = \text{corr}(u_0 - u_t, u_t) = |\text{cov}(u_0 - u_t, u_t)| / \sqrt{\text{var}(u_0 - u_t) \text{var}(u_t)}$ 。其中 $\text{cov}(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$, $\text{var}(x) = E[(x - \bar{x})(x - \bar{x})]$ 。选择最优停止时间 T 使得相关系数 ρ 达到最小, 这就是所谓地去相关最优停止准则。

在计算 $\text{corr}(u_0 - u_t, u_t)$ 时, 把 $u_0 - u_t$ 和 u_t 变换为矢量, 这两个矢量可看作是某个随机过程的两个样本。显然 $\rho \in (0, 1)$ 。在设计算法时, 实时计算相关系数, 当 ρ 到达最小时即停止迭代, 输出滤波图像。

3 数值实验与分析

前文提到的多个滤波模型通常做法是, 设定停止时间为一个较大值, 然后观察各个时间获得的滤波图像, 从中得到效果较好的结果, 这样无疑增加了计算量。不仅如此, 有时还会错过最优图像。而采用去相关最优停止准则, 能在 $\text{corr}(u_0 - u_t, u_t)$ 达到最小时, 自动地输出最优滤波结果, 以及停止时间 T 。

为了对比说明去相关最优停止准则的有效性。我们把去相关最优停止准则应用于 P-M 模型, 并与文献[4]提出的峰值信噪比准则 (PSNR) 进行了对比。

图 1(a) 为高斯噪声污染后的图像, 图 1(b) 是用 PSNR 准则得到的滤波图像, 从滤波图像可以看出, 此时滤波图像出现了边缘过光滑, 但是应用去相关准则后能够自动获得最优的滤波结果 (迭代次数为 31), 见图 1(c)。另外, 图 2(a) 分别为噪声图像中心线第 177 行的灰度示意图和图 2(b) 为运用去相关准则滤波后的图像的灰度示意图, 由图 1 和图 2 可以看出, 去相关最优停止准则能够使图像平滑过程中适时地停止迭代, 获得满意的图像平滑效果。

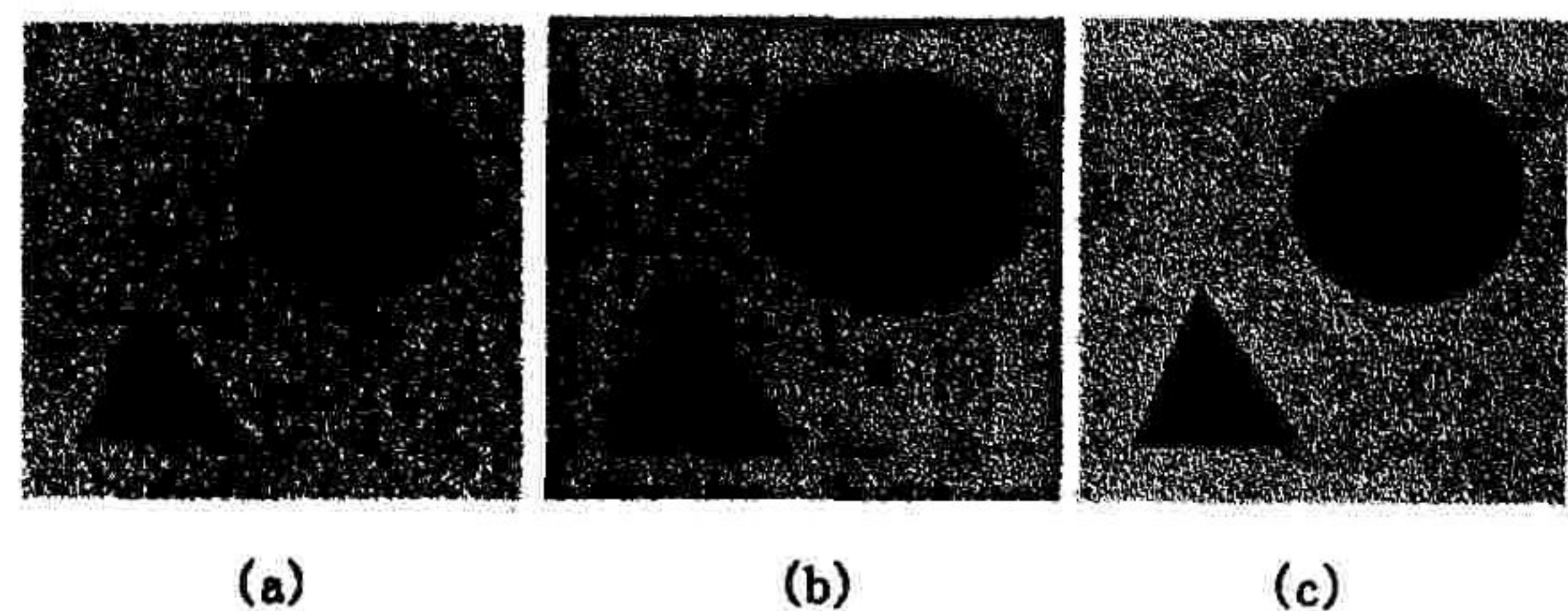
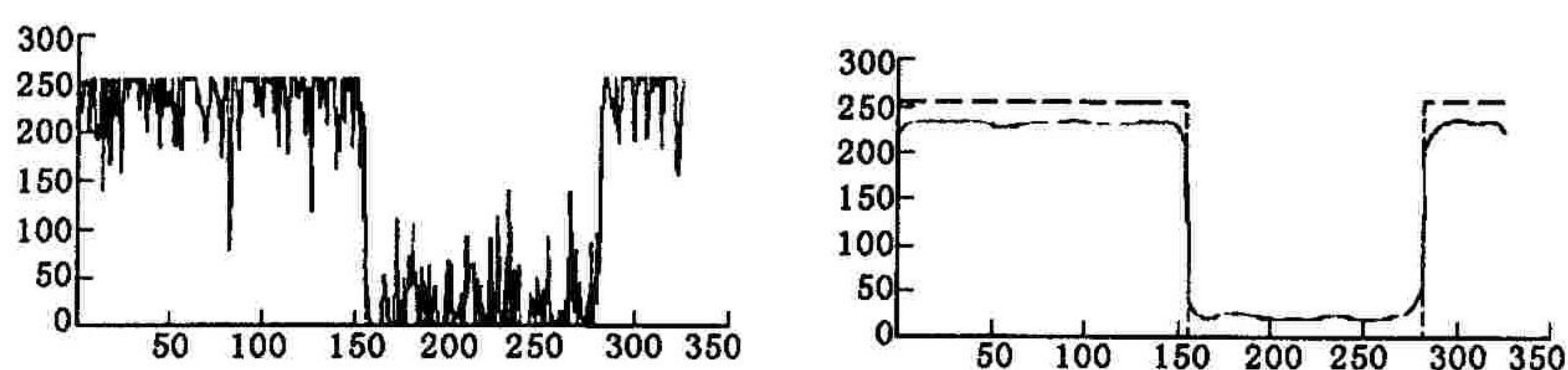


图 1 带噪声合成图像及滤波结果

为了研究相关系数的单峰性, 图 3 显示了对加噪声图像应用 P-M 模型迭代 200 次的过程中, $\text{corr}(u_0 - u_t, u_t)$ 随迭代次数变化的轨迹。其中, 横坐标为迭代次数, 纵坐标为对应迭代次数获得的相关系数 $\text{corr}(u_0 - u_t, u_t)$ 。

$-u_i, u_i$), 它已经归一化。图中显示的最低处对应的迭代次数即为我们寻找的最优迭代次数。



(a) 带有高斯噪声的图像灰度

(b) 去相关准则滤波后的图像灰度

图2 第177行灰度

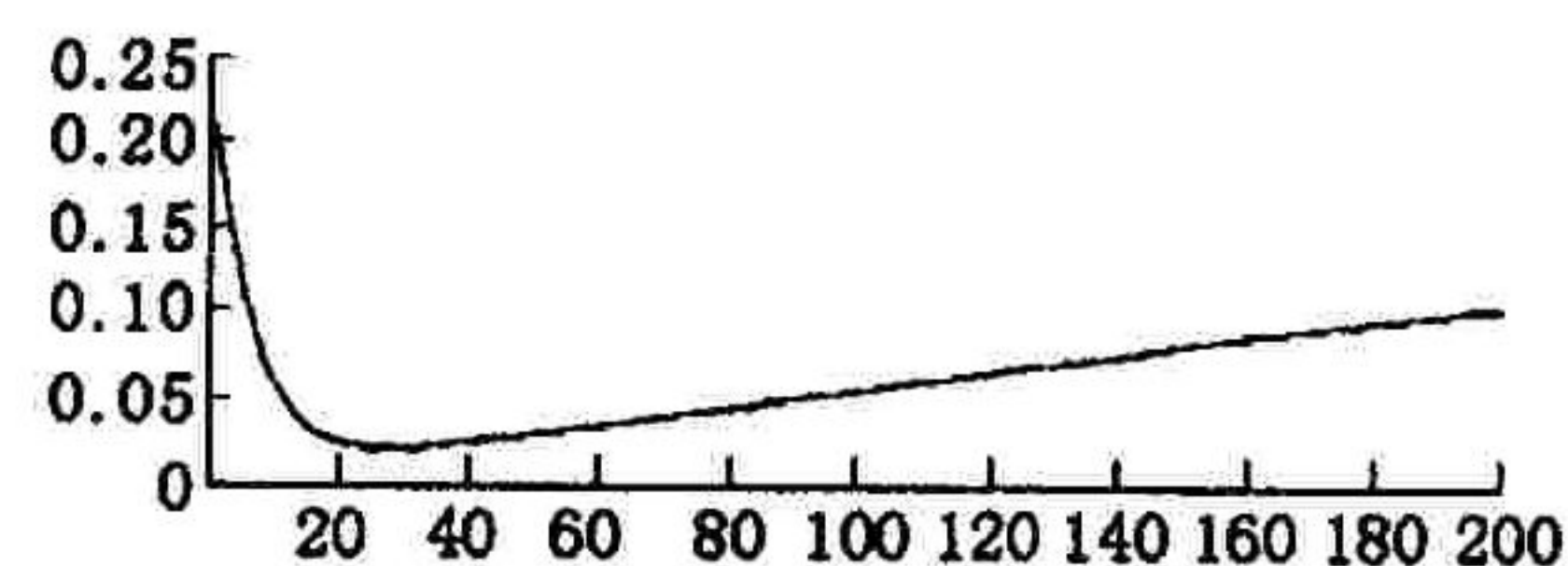


图3 相关系数与迭代次数的关系

4 结论

本文在总结已有的非线性滤波器的几种最优停止准则的基础上,提出了去相关最优停止准则,这一准则能够较好地表达图像滤波结果的性能,它不需要任何关于噪声的附加信息,而且有很强的通用性,不受具体算法的限制。实验显示,利用去相关最优停止准则在对噪声图像进行扩散的过程中,能够适时地停止迭代。但是这一准则建立在加性噪声的基础上,对于其它类型噪声的效果还有待研究。此外 ρ 显示出明显的单峰性还没有从理论上得到证明

参考文献:

- [1] Witkin A. Scale space filtering [A]. Proceedin - gs of the 8th International Joint Conference on Artificial Intelligence [C]. Germany, Karlsruhe: William Kaufmann, 1983.
- [2] Persona P, Malik J. Scale - space and edge - detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629 - 639.
- [3] Catte F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge - detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182 - 193.
- [4] Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing [M]. Stuttgart, Germany: Teubner - Verlag, 1998.
- [5] Barcelos Z A C, Boaventura M, Silva E. A well - balanced flow equation for noise removal and edge detection [J]. IEEE Transactions on image processing, 2003, 12(7): 751 - 762.
- [6] Weickert J. Coherence - enhancing diffusion of color images[J]. Image and Vision Computing, 1999, 17: 201 - 212.
- [7] Solo V. Automatic stopping criterion for anisotropic diffusion [A]. IEEE, Proc ICASSP2001 [C]. Salt Lake City: IEEE press, 2001.
- [8] Weickert J. Coherence - enhancing diffusion of color images [J]. Image and Vision Computing, 1999, 17: 201 - 212.

(编辑:姚树峰)

Iteration Stopping Criterion for Image Anisotropic Diffusion Filter

LI Shi - fei^{1,2}, DONG Fu - an², WU You - li¹, ZHANG Zhi¹

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China; 2. The science institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: A simple and effective iteration stopping criterion for image smoothing model of anisotropic diffusion is proposed. This criterion includes a rule for selecting optimal stopping time so that the correlation of filtered image with noise is minimized. This novel method can be used in many kinds of smoothing filtering modes based on PDE without the need for additive knowledge about image noise. Experimental results have demonstrated that, by using the proposed method, satisfactory filtered images can be effectively obtained.

Key words: diffusion equation; image smoothing; iteration stopping criterion; anisotropic diffusion