一类有规避行为的动目标搜索问题研究

刘 红， 王颖龙， 李彦明

(空军工程大学导弹学院，陕西三原 713800)

摘 要：在动目标的搜索过程中，搜索者在有限的时间内，利用有限的资源寻找目标，使其期望回报最大，而目标则针对搜索者可能采取的策略，选择适当的运动路径躲避搜索者的搜索。将此问题归结为一个二人零和对策问题，并给出利用对策论求解的方法。

关键词：搜索；动目标；规避；二人零和对策

中图分类号：O224 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-3516(2005)04-0027-03

现实社会中存在着大量的搜索问题,如寻找失踪的人员、飞机、船等,如果被搜索者在搜索过程中是运动的,就称为动目标搜索问题。若目标不希望被搜索者发现,采取躲避搜索的方式运动,即目标针对搜索者可能采取的搜索策略,选择相应的策略(逃跑路径)躲避搜索者的搜索,这类搜索问题称为有规避行为的动目标搜索问题 。

在动目标的搜索问题中,以往多研究的是单边搜索问题,即只考虑搜索者一方采取何种搜索策略,以使在有限的搜索时间内探测到目标的概率最大或搜索期望利润最大。本文考虑下面一类有规避行为的动目标搜索问题,该问题可化为二人零和对策问题,并可利用对策论的方法求解 。

1 模型的假设

1)设搜索空间 $K=\{1,2,\cdots,k\}$,搜索时间是离散的,即时间域 $T=\{1,2,\cdots,t_0\}$;

2)目标运动路径用 $\boldsymbol{\omega}=\{\boldsymbol{\omega}(t),t\in T\}$ 表示, $\boldsymbol{\omega}(t)=i$ 表示 t 时刻目标处于第 i 个小区域。$\Omega=\{\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}$ 是任意一条可选路径$\}$,假设搜索开始时目标可在 Ω 中任选一条路径运动,但在搜索过程中,目标不能再改变其已确定的路径;

3)搜索者在时刻 t 可利用的资源为 $u(t)$,$\varphi(i,t)$ 为 t 时刻分配于第 i 个小区域的搜索力,当目标恰在第 i 个小区域时,搜索者探测到目标的概率为 $1-\mathrm{e}^{-\alpha_i\varphi(i,t)}$ $(\alpha_i>0)$;

4)时刻 t 在区域 i 探测到目标时,所耗费的资源为 $c(i,t)>0$,搜索者得到的回报为 $E(t)>0$;

5)若目标被探测到则终止搜索,或探测时间超过 t_0 也终止搜索。

依据上述假设,可建立如下模型。

2 模型的建立

可将上述搜索问题看作一个二人零和对策问题[4-5],搜索者的策略就是搜索力的分配:

$$\varphi=\{\varphi(i,t),i\in K,t\in T\}$$

目标的策略就是选择一条路径 $\boldsymbol{\omega}\in\Omega$,则累积搜索费用为

收稿日期:2004-10-19
基金项目:空军工程大学学术(联合)基金资助项目(KDL-XL02-200420)
作者简介:刘 红(1966-),女,天津人,副教授,博士生,主要从事防空作战优化理论与方法研究;
王颖龙(1945-),男,陕西富平人,教授,博士生导师,主要从事防空作战优化理论与方法研究.

$$C(t,\varphi) = \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{i=1}^{k} c(i,\tau)\varphi(i,\tau) \tag{1}$$

则$[1,t]$时间段内探测到目标的概率为

$$P_1^t(\varphi,\omega) = 1 - \exp(-\sum_{\tau=1}^{t} \alpha_{\omega(\tau)}\varphi(\omega(\tau),\tau)) \tag{2}$$

探测时间段$[1,t_0]$内搜索者的期望利润为

$$R(\varphi,\omega) = \sum_{t=1}^{t_0}(E(t) - C(t,\varphi))(P_1^t(\varphi,\omega) - P_1^{t-1}(\varphi,\omega)) - C(t_0,\varphi)(1 - P_1^{t_0}(\varphi,\omega)) =$$

$$E(t_0)P_1^{t_0}(\varphi,\omega) + \sum_{t=1}^{t_0-1}(\Delta C(t,\varphi) - \Delta E(t))P_1^t(\varphi,\omega) - C(t_0,\varphi) \tag{3}$$

其中，

$$\Delta C(t,\varphi) = C(t+1,\varphi) - C(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{k} c(i,t+1)\varphi(i,t+1) \tag{4}$$

$$\Delta E(t) = E(t+1) - E(t) \tag{5}$$

据对策理论，$\pi(\omega)$表示目标选择路径ω的概率，易知：

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega) = 1 \tag{6}$$

则当搜索者采用策略$\varphi(i,t)$，而目标采用策略π时，搜索者的期望利润为

$$\tilde{R}(\varphi,\pi) = \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)R(\varphi,\omega) \tag{7}$$

易知，π及φ应满足下列条件：

$$\pi(\omega) \geqslant 0, \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega) = 1;\quad \varphi(i,t) \geqslant 0\quad,\quad i\in K, t\in T;\quad \sum_{i=1}^{k}\varphi(i,t) \leqslant u(t), t\in T$$

记

$$\prod = \{\pi(\omega) \mid \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega) = 1, \pi(\omega) \geqslant 0, \omega\in\Omega\} \tag{8}$$

$\prod$为目标的可行解集合(可行域)。搜索者可行域Φ为

$$\Phi = \{\varphi(i,t) \mid \sum_{i=1}^{k}\varphi(i,t) \leqslant u(t), \varphi(i,t) \geqslant 0, i\in K, t\in T\} \tag{9}$$

综合上述，问题化为在约束$\varphi\in\Phi$、$\pi\in\prod$下，求使$\tilde{R}(\varphi,\pi)$之值对搜索者和被搜索目标均满意的φ^*、π^*。

3　模型求解

原问题即求φ^*、π^*满足：

$$\tilde{R}(\varphi^*,\pi^*) = \min_{\pi}\max_{\varphi}\tilde{R}(\varphi,\pi) = \max_{\varphi}\min_{\pi}\tilde{R}(\varphi,\pi) \tag{10}$$

或

$$R(\varphi^*,\pi) \geqslant \tilde{R}(\varphi^*,\pi^*) \geqslant \tilde{R}(\varphi,\pi^*) \tag{11}$$

首先$\max_{\varphi}\min_{\pi}\tilde{R}(\varphi,\pi) = \max_{\varphi\in\Phi}\min_{\pi\in\prod}\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)R(\varphi,\omega) = \max_{\varphi\in\Phi}\min_{\omega\in\prod}R(\varphi,\omega) =$

$$\max_{\varphi\in\Phi}\{E \mid R(\varphi,\omega) \geqslant E, \omega\in\Omega\} \tag{12}$$

其中，若$\omega\in\{\omega \mid R(\varphi,\omega) > E = \min_{\omega'\in\Omega}R(\varphi,\omega')\}$，则$\pi^*(\omega) = 0$。因此，可将原问题化为如下规划问题：

$$\max_{\varphi} E \tag{13}$$

$$\text{s.t}\quad R(\varphi,\omega) \geqslant E \tag{14}$$

$$\varphi(i,t) \geqslant 0\quad i\in K\quad t\in T \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(i,t) \leqslant u(t)\quad t\in T \tag{16}$$

分别取$\pi(\omega)$、$\mu(i,t)$、$\lambda(t)$为式(14)～式(16)的 Lagrange 乘子，下面证明$\pi(\omega)$为目标的策略。定义 Lagrange 函数为

$$L(E,\varphi,\pi,\lambda,\mu) = E + \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)\,(R(\varphi,\omega) - E) + \sum_{t\in T}\lambda(t)(u(t) - \sum_{i\in K}\varphi(i,t)) + \sum_{t\in T}\sum_{i\in K}\mu(i,t)\varphi(i,t)) \tag{17}$$

分别令$\frac{\partial L}{\partial E} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \pi} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$ 可得规划问题式(13) ~ 式(16) 最优解的充要条件,即 Kuhn - Tucker 条件[5] 为

$$\pi(\boldsymbol{\omega})(R(\varphi,\boldsymbol{\omega}) - E) = 0 \tag{18}$$

$$R(\varphi,\boldsymbol{\omega}) \geqslant E \tag{19}$$

$$\pi(\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0 \tag{20}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\boldsymbol{\omega}) = 1 \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(i,t) \leqslant u(t) \tag{22}$$

$$\varphi(i,t) \geqslant 0 \qquad i \in K, t \in T \tag{23}$$

$$\lambda(t) \geqslant 0, \mu(i,t) \geqslant 0 \qquad i \in K, t \in T \tag{24}$$

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\boldsymbol{\omega})\frac{\partial R(\varphi,\boldsymbol{\omega})}{\partial\varphi(i,t)} - \lambda(t) + \mu(i,t) = 0 \qquad i \in K, t \in T \tag{25}$$

$$\lambda(t)(\mu(t) - \sum_{i=1}^{k}\varphi(i,t)) = 0 \qquad t \in T \tag{26}$$

$$\varphi(i,t)\mu(i,t) = 0 \qquad i \in K, t \in T \tag{27}$$

由条件式(18) ~ 式(20),知 $\pi(\omega)$ 满足下列条件:

$$\begin{cases} \pi(\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0 \\ \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\boldsymbol{\omega}) = 1 \\ \pi(\boldsymbol{\omega}) = 0 \qquad 若\ \boldsymbol{\omega} \in \{\boldsymbol{\omega} \mid R(\varphi,\boldsymbol{\omega}) > E\} \end{cases}$$

此表明,$\pi(\boldsymbol{\omega})$为目标的策略。而 Lagrange 函数 $L(\cdot)$ 中第一、二项之和对于最优乘子 $\pi(\omega)$ 恰为 $\tilde{R}(\varphi,\boldsymbol{\omega})$,因此式(21) ~式(27)就是使 $\max_{\varphi}\tilde{R}(\varphi,\pi)$ 成立的,搜索者所选最优搜索策略 φ_π^* 满足的最优性条件。

综合上述分析,只需先给定目标所选策略 $\pi(\boldsymbol{\omega})$,利用最优性条件求得使搜索者期望利润最大的 φ ,并反复调整 $\pi(\boldsymbol{\omega})$,直至式(18)、(19)成立为止。

参考文献:

[1] Stone L D. Theory of Optimal Search[M]. New York:Academic Press,1975.

[2] 刘 红. 有假信号干扰时的最优搜索[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,2(3):26 -29.

[3] Hohzaki R,Iida K. A Search Game With Reward Criterion[J]. Journal of the Operations Research Society of Japan,1998,41(4):629 -642.

[4] Iida K,Hohzaki R. The Optimal Search Plan for a Moving Target Minimizing the Expected Risk[J] . Journal of the Operations Research Society of Japan,1988,31(4):294 -320.

[5] 魏国华. 实用运筹学[M]. 上海:复旦大学出版社. 1987.

(编辑:田新华)

A Searching Question of Moving Target with Evasion

LIU Hong, WANG Ying- long, L[Yah- ruing

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract:This paper investigates a search question of a moving target. In the process of the search, the searcher distributes search resources over a search space in order to detect the target at a finite number of time points. The target selects the path from some options in order to evade the searcher. Then the problem is formulated as a two - person zero- sum game, and the method of the problems solution is given.

Key words : search ; moving target; evasive ; two - person zero - sum game