

### 最小误码率波束的形成算法

许悦雷, 尹志杰, 左继章

(空军工程大学工程学院, 陕西西安 710038)

摘要: 在经典自适应波束形成算法中, 常采用均方误差准则, 但对于一个通信系统来说, 误码率是评价其性能的一个很重要的参数。利用核密度估计方法, 由概率密度函数得到系统误码率与波束权值的关系, 提出了一种自适应波束形成算法, 在迅速收敛得到系统较小误码率的同时, 得到最优的波束方向。仿真实验证明该方法优于经典的最小均方误差方法。

关键词: 波束形成; 误码率; 最小均方误差; 概率密度函数

中图分类号: TN821+. 91 文献标识码: A 文章编号: 1009-3516(2005)03-0060-03

智能天线的基本思想是利用各用户信号的空间特征差异, 采用阵列天线技术, 根据某接收准则自动调节各天线的加权向量, 形成天线波束, 达到最佳接收和发射, 使得在同一信道上接收和发送多个用户的信号而不互相干扰<sup>[1-2]</sup>。可见, 采用智能天线技术不仅可以提高系统容量, 而且有效的提高了系统抗干扰性。

在经典理论中, 一般用理想接收和实际接收信号的均方误差(MSE)准则来得到阵列天线的权值输出, 该方法已广泛的应用于雷达、声纳等系统中。但对于一个通信系统而言, 在性能参数上误码率要比MSE准则更为准确些, 一个通信系统性能的好坏主要依靠其误码率特性而不是MSE特性。因此从误码率最优的角度来研究自适应波束形成算法, 为便于符号简化和突出基本概念, 本文所用的调制信号为BPSK, 无线信道假定是非扩散加性高斯白噪声的, 并且信道中没有引入符号间干扰(ISI), 而且信号是窄带的。

## 1 系统模型

假定系统支持相互独立  $M$  个用户, 每个用户用 BPSK 方式调制, 载波波长为  $\lambda$ 。则用户  $i$  的基带信号见式(1)。其中  $m_i(k)$  等概率的取  $+1$  或  $-1$ ,  $A_i^2$  是用户  $i$  的发送功率, 则  $b_i(k)$  有  $N=2^M$  个发送组合。

$$b_i(k) = A_i m_i(k), 1 \leq i \leq M \quad (1)$$

接收端, 信号经下变频到基带后, 送入  $L$  维线性阵列接收, 则第  $l$  个阵子所接收的信号为  $x_l(k) = \sum_{i=1}^M b_i(k) \exp\{j(l-1)\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta\} + n_l(k) = x_{d,l}(k) + n_l(k), 1 \leq l \leq L$ 。若  $X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_L(k)]$ , 则波束赋形之后输出信号为:  $Y(k) = W^H X(k) = W^H X_d(k) + W^H N(k) = Y_d(k) + e(k)$ 。其中  $W = [w_1, w_2, \dots, w_L]^T$  是  $L$  维线性阵列的权值矢量,  $e(k)$  为零均值高斯白噪声。

假定第 1 个信号是期望信号, 其余皆为干扰, 则可用最小均方误差方法(MMSE)对期望信号进行估计, 其代价函数为  $J(W) = E[|W^H X(k) - b_1(k)|^2]$ 。使  $J(W)$  最小可得到式(2)。其中  $R = E[X(k)X^H(k)], p_1 = E[X(k)b_1(k)]$ 。

$$W = R^{-1} p_1 \quad (2)$$

一般情况下, 不直接求解式(2), 常利用自适应迭代最小均方法(LMS)<sup>[3]</sup>, 每次更新权向量  $W$ , 迭代公式为  $W_{i+1} = W_i - \mu \nabla J(W_i)/2$ 。其中  $\mu$  为迭代步长, 可控制算法收敛的速度。

收稿日期: 2004-09-20

作者简介: 许悦雷(1975-), 男, 河北辛集人, 讲师, 博士生, 主要从事图象处理及分析、计算机视觉和智能天线等研究。

## 2 误码率最小自适应波束形成算法

当发送信号  $b(k)$  经过信道传输后,经阵列接收得到基带信号为  $X(k)$ ,见式(1),由于式(1)中的  $m_i(k)$  等概率取  $\pm 1$ ,相应的,  $X(k)$  也等概率的取  $X^+(k)$  和  $X^-(k)$ ,且是线性独立的,当取  $+$  时可得到  $Y^+(k) = \mathbf{W}^H X^+(k) = \mathbf{W}^H X_d^+(k) + \mathbf{W}^H N_1(k) = Y_d^+(k) + e_1(k)$ 。为简化,取实部得  $Y_R^+(k) = R[Y^+(k)] = R[\mathbf{W}^H X_d^+(k) + \mathbf{W}^H N_1(k)] = Y_{Rd}^+(k) + e_R(k)$ 。其中  $e_R(k)$  是均值为零,方差为  $\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}$  的高斯噪声。

根据核密度估计方法,  $m_i(k)$  取  $+1$  时,由于等概率性,则  $Y_{Rd}^+(k)$  共有  $N/2$  个状态,可得到  $Y_R(k)$  的概率密度函数(p. d. f)为式(3)。其中  $N_b = N/2$ 。由于误码率可表示为式(4)。将式(3)代入式(4)得式(5)。

$$p^+(Y_R) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y_R(k) - Y_{Rd,j}^+(k))^2}{\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}\right\} \quad (3) \quad P_E = P(\text{sgn}(b_1(k)) Y_R(k) < 0) \quad (4)$$

$$P_E(W) = \int_{-\infty}^0 p^+(Y_R) dY_R = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y_R(k) - Y_{Rd,j}^+(k))^2}{\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}\right\} dY_R \quad (5)$$

$$\text{令 } y = \frac{Y_R - Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}, \text{ 则 } P_E(W) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} \int_{-\infty}^{-\frac{Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \text{ 由对称性得 } P_E(W) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} Q\left(\frac{Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}\right). \text{ 同}$$

样地,当  $m_i(k)$  取  $-1$  时可得式(6)。因此,得到误码率为式(7)。

$$P_E(W) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} Q\left(\frac{-Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}\right) \quad (6) \quad P_E(W) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} Q\left(\frac{\text{sgn}(b_1(k)) Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}\right) \quad (7)$$

目标是找到一个最优的  $W$ ,使得误码率  $P_E(W)$  最小,可以采用梯度最陡下降法或共轭梯度法,但都需要误码率  $P_E(W)$  的梯度,计算其梯度如下:

$$\text{令 } u = \frac{\text{sgn}(b_1(k)) Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}, \text{ 则 } \nabla P_E(W) = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} \frac{dQ(u)}{dW} \text{ 由于 } \frac{dQ(u)}{dW} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{dW}, \text{ 而}$$

$$\frac{du}{dW} = d\left(\frac{\text{sgn}(b_1(k)) Y_{Rd,j}^+(k)}{\sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}}\right) / dW = \text{sgn}(b_1(k)) \left(X_{d,j}^{(k)} - \frac{Y_{Rd,j}^+(k) \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}\right) / \sigma_e \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}. \text{ 因此得到:}$$

$$\nabla P_E(W) = \frac{1}{N_b \sqrt{2\pi\sigma_e}} \sum_{j=1}^{N_b} \exp\left\{-\frac{(Y_{Rd,j}^+(k))^2}{2\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}\right\} \text{sgn}(b_1(k)) \left(\frac{Y_{Rd,j}^+(k) \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}} - X_{d,j}^{(k)}\right)$$

为简化计算,可在梯度运算时将  $W$  归一化,即  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = 1$ ,则梯度可表示为

$$\nabla P_E(W) = \frac{1}{N_b \sqrt{2\pi\sigma_e}} \sum_{j=1}^{N_b} \exp\left\{-\frac{(Y_{Rd,j}^+(k))^2}{2\sigma_e^2}\right\} \text{sgn}(b_1(k)) (Y_{Rd,j}^+(k) \mathbf{W} - X_{d,j}^{(k)})$$

为减少算法的计算复杂度,使用最速梯度下降法构造迭代过程<sup>[4]</sup>,其核心权值更新公式为  $W(m+1) = W(m) + \mu[-\nabla P_E(W)]$ 。

从  $\nabla P_E(W)$  着手简化迭代,  $\nabla P_E(W)$  是由 p. d. f 得到的,为此对 p. d. f 进行简化。p. d. f 的估计可用 Parzen 窗函数或核密度估计方法来实现<sup>[1]</sup>,对基于样本序列块的估计常用 Parzen 窗函数法,设有  $K$  个样本序列,若选取  $\rho_n \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}$  作为核宽度,可得到 p. d. f 为  $\hat{p}(Y_k) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_n^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y_R - Y_R(m))^2}{\rho_n^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}}\right\}$ 。

核宽度  $\rho_n \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}$  的形式与系统噪声标准偏差  $\sigma_e^2 \mathbf{W}^H \mathbf{W}$  相似,其中  $\rho_n$  是尺度参数,取值与  $\sigma_e$  相关,文献[5]中取  $\rho_n$  的下限为  $(\frac{4}{3}K)^{1/5} \sigma_e$ 。为简化计算,只用  $\rho_n$  代替  $\rho_n \sqrt{\mathbf{W}^H \mathbf{W}}$ ,得到

$$\hat{p}(Y_R) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_n^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y_R - Y_R(m))^2}{\rho_n^2}\right\} \quad (8)$$

式(8)中的  $K$  个样本来自于当前和过去。类似于 MMSE 准则下的 LMS 算法,我们只取当前状态的样本数据对概率密度进行估计,则得到式(9)。式(9)代入式(4),并对  $W$  取导数,得式(10)。

$$p(Y_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_n}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(Y_R - Y_R(m))^2}{\rho_n^2}\right\} \quad (9) \quad \nabla P_E(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_n}} \operatorname{sgn}(b_1(m)) \exp\left\{-\frac{(Y_R(m))^2}{2\rho_n^2}\right\} X(m) \quad (10)$$

由此可得到最小 BER 的梯度下降法的权值更新公式(11)。其中  $\mu$  和  $\rho_n$  控制着权向量的收敛速度和最终的稳定状态, 权值迭代形式与基于 MMSE 的 LMS 算法相似, 但其计算复杂度比 LMS 要小。为了详细描述这两种算法的复杂度, 将复数乘和复数加拆开, 用单数乘和加表示, 见表 1, 其中  $L$  为阵子数。

$$W(m+1) = W(m) + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_n}} \operatorname{sgn}(b_1(m)) \exp\left\{\frac{(Y_R(m))^2}{2\rho_n^2}\right\} X(m) \quad (11)$$

表 1 最小 BER 和 LMS 计算复杂度比较

算法	乘积次数	加次数	$\exp(\cdot)$ 次数
BER	$4L + 4$	$4L - 1$	1
LMS	$8L + 2$	$8L - 1$	—

### 3 仿真实验及结论

对 LMS 算法和最小误码率波束形成方法的误码率和信噪比关系进行了对比。仿真实验平台为 P4 的 PC 机, 软件使用 Matlab, 天线形式为 2 个阵子的直线阵列, 信号入射方向角为  $30^\circ$ , 在  $0^\circ$  和  $60^\circ$  方向另有 2 个用户, 此时可认为是干扰信号, 有  $SIR = 0$  dB。在 MMSE 方案中, 利用 LMS 算法, 取  $\mu = 0.01$ , 得到误码率 BER 与迭代次数的关系曲线图 1。在最小化误码率方案中, 取  $\Phi = [0.1 + j0.00.1 + j0.0]$ , 迭代结果见图 1。

图 2 为最小误码率方法迭代 200 次之后形成的方向图, 从中可见, 在  $30^\circ$  信号入射方向有一个大的增益, 而在两个干扰方向  $0^\circ$  和  $60^\circ$  形成零陷, 较好的完成了波束赋形功能。

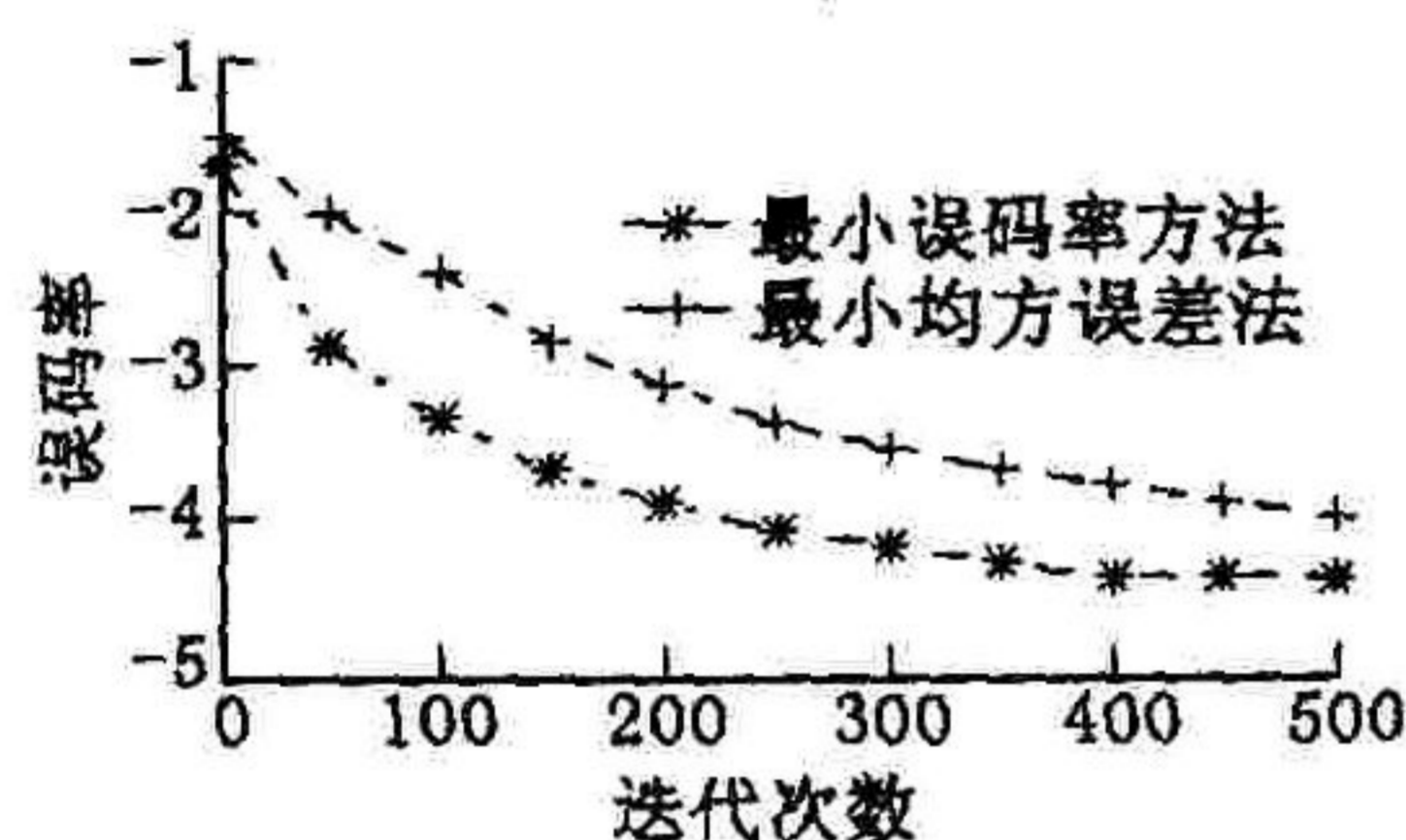


图 1 信噪比为 10dB 时两种方法迭代比较

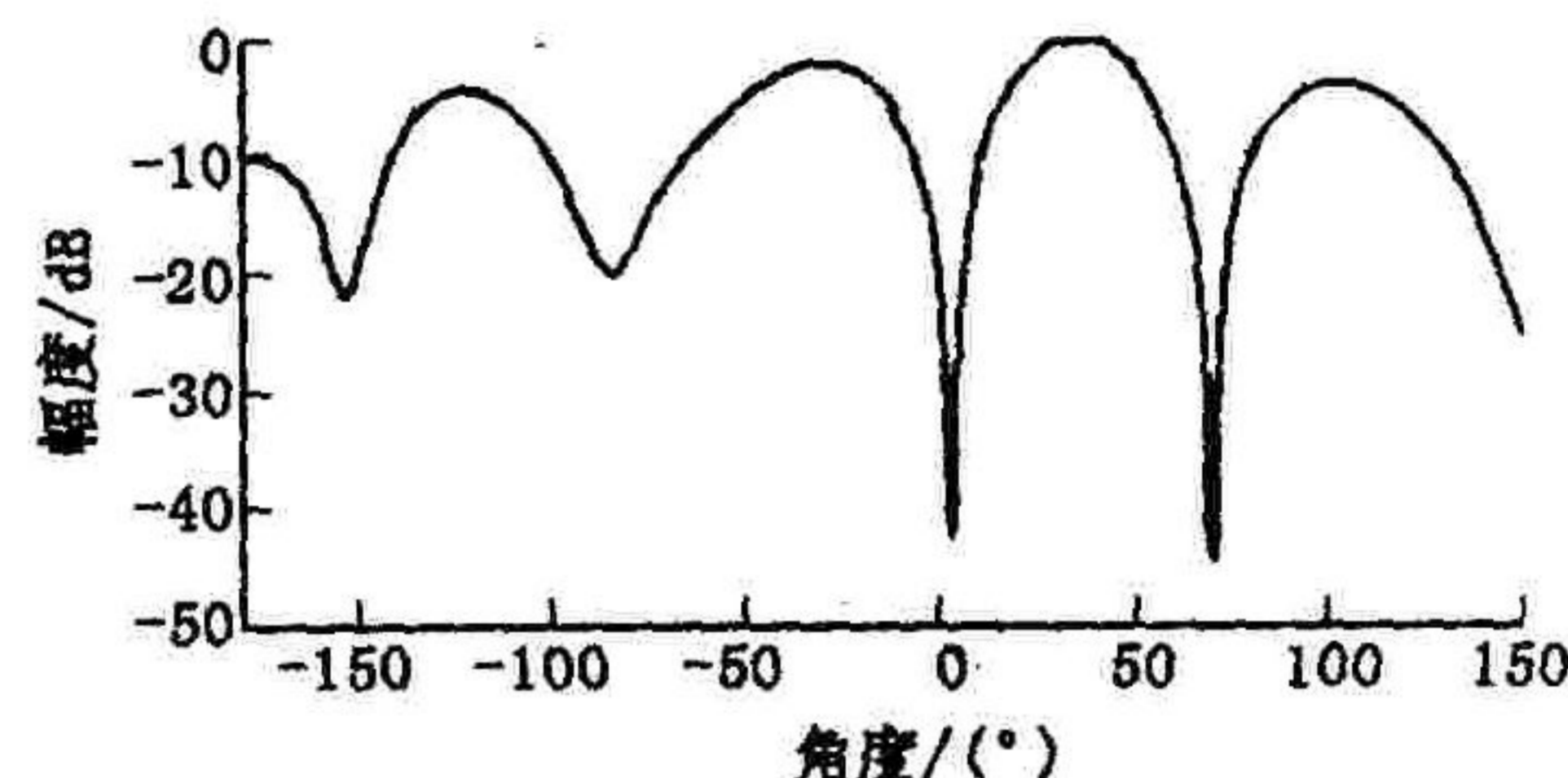


图 2 最小 BER 方法波束形成图

由于在高斯信道下, 对于 BPSK 调制来说, 误码率最小和 MSE 最小是一致的, 但从图 1 可以看出在相同的信噪比下, 最小化误码率方法在迭代 200 次之后基本就比较稳定了, 而 LMS 算法则要 500 次以后才收敛, 前者明显比后者收敛速度快。而且根据表 1, 最小误码率方法每次迭代的时间比 LMS 方法要少一倍左右。可见, 从算法计算时间的角度来考虑, 最小化误码率方法比 LMS 方法要优, 而且最小化误码率方法是通过直接评估通信系统的误码率特性来形成波束的, 更具有实际意义。

#### 参考文献:

- [1] Litva J, Lo T K Y. Digital Beamforming in Wireless Communications [M]. Boston: Artech House Publishers, 1996.
- [2] Winters J H. Smart antennas for wireless systems [J]. IEEE Personal Communications, 1998, 5: 23 - 27.
- [3] Chen S, Samingan A K, Mulgrew B, et al. Adaptive minimum - BER linear multiuser detection for DSCDMA signals in multipath channels [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2001, 49(6): 1240 - 1247.
- [4] Chen S, Mulgrew B, Hanzo L. Stochastic least - symbol - error - rate adaptive equalization for pulse - amplitude modulation [J]. ICASSP2002, 2002, (3): 2629 - 2632.
- [5] Silverman B W. Density estimation [M]. London: Chapman Hall, 1996.

(编辑: 姚树峰)

Adaptive Beam-forming Algorithm Based on Minimizing Bit Error Rate

XU Yue - lei, ~IN Zhi - jie, ZUO ji - zhang

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: Mean square error approach is often adopted in classical adaptive beam-forming algorithm, nevertheless, the bit error rate is one of the most important parameters in a communication system. This paper proposes an adaptive beam-forming algorithm based on minimizing the bit error rate, and computer simulations demonstrate that the performance of this method is much better than that of the classical method based on MSE approach.

Key words: beam-forming; bit error rate; minimum mean square error; probability density function