# 线性系统的鲁棒 $H_\infty$ 柔性状态反馈控制器设计

郭书祥[1,2]，张　陵[1]，李　颖[2]
(1. 西安交通大学，陕西 西安 710049;2. 空军工程大学 工程学院，陕西 西安 710038)

**摘　要**:考虑控制器实现中的不确定性,基于LMI方法,给出了系统的鲁棒 $H_\infty$ 柔性反馈控制器存在的充分条件,和柔性控制器增益的设计方法。所设计的控制器增益是一范围,从而当控制器增益在容许范围内波动时,均可保证闭环系统的稳定性和性能要求。具有更高的可靠性。算例分析表明文中方法设计的柔性控制器有良好的抗控制器参数偏移和干扰抑制性能,是有效和可行的。

**关键词**:状态反馈;柔性控制器;$H_\infty$ 控制;线性矩阵不等式(LMI)
**中图分类号**:O23　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2005)01-0030-03

不确定性在所有工业系统和过程中普遍存在,并对系统的稳定性和性能具有较大影响。因此,为保证系统的稳定性和性能要求,在控制系统的分析和设计中,需要合理地考虑影响系统的各种不确定因素。鲁棒控制理论在此方面发挥了重要作用,并取得了大量有用成果[1-3]。但现有的鲁棒控制设计方法一般都只考虑被控系统参数和外扰的不确定性,而不考虑控制器本身的不确定性,所设计的控制器要求能准确实现。事实上,由于各种因素的影响,控制器的实现存在一定的不确定性。当控制器参数存在摄动时,传统的鲁棒控制方法表现出很大的脆弱性。因此,非脆弱(non-fragile)控制[4-6]问题的研究已引起人们的重视。

## 1　鲁棒 $H_\infty$ 控制器设计

设广义被控对象的状态空间实现为式(1)。其中,$x\in R^n$ 为系统的状态向量,$u\in R^m$ 为控制输入向量,$z\in R^q$ 为被调输出,$w\in R^r$ 为能量有限的不确定外部扰动。假设系统的状态可测,现设计一静态状态反馈控制器式(2),使相应的闭环系统式(3)渐近稳定,且满足式(4)。$T_{wz}(s)$ 从 $w$ 到 $z$ 的闭环传递函数矩阵,$\gamma$ 为系统的干扰抑制度,由文献[2]中的定理4.3.9直接可得。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1w(t)+B_2u(t);z(t)=Cx(t)+Du(t) \tag{1}$$

$$u(t)=Kx(t) \quad (2) \qquad \dot{x}(t)=A_cx(t)+B_1w(t);z(t)=C_cx(t) \quad (3) \qquad \|T_{wz}(s)\|_\infty<\gamma \quad (4)$$

其中:$A_c=A+B_2K,C_c=C+DK,T_{wz}(s)=C_c(sI-A_c)^{-1}B_1$

**定理1**　若 $(A,B_2)$ 能稳定,则存在状态反馈控制律(2)使闭环系统内稳定,且满足式(4)的充要条件为存在对称正定矩阵 $P$,满足如下Riccati不等式

$$PA_c+A_c^TP+\gamma^{-2}PB_1B_1^TP+C_c^TC_c<0 \tag{5}$$

**定理2**　若 $(A,B_2)$ 能稳定,则存在状态反馈控制律(2)使闭环系统内稳定,且满足式(4)的充要条件为存在对称正定矩阵 $X$ 和矩阵 $W$,使式(6)成立。

式(6)中,$\Theta_1=(AX+B_2W)+(AX+B_2W)^T,S_1=[B_1(CX+DW)^T]$,$T_1=\mathrm{diag}\{-\gamma^{-2}I-I\}$。若式(6)存在可行解 $X$、$W$,则 $\mu(t)=WX^{-1}x(x)$ 为系统的一个状态反馈 $\gamma$-次优 $H_\infty$ 控制器。

证明:由Schur补引理[2],式(5)等价于式(7),上式分别左乘和右乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1},I,I\}$,再将 $A_c$、$C_c$ 代入,并令 $P^{-1}=X$,$KP^{-1}=W$,即得式(6)。从而,通过求解如下优化问题可得到系统的最优 $H_\infty$ 控制器式(8)。

**收稿日期**:2004-04-09
**基金项目**:中国博士后科学基金资助项目(2003034410)
**作者简介**:郭书祥(1964-),男,陕西商州人,教授,博士生导师,主要从事飞行器可靠性工程和综合优化设计.

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & S_1 \\ S_1^{\mathrm{T}} & T_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (6) \qquad \begin{bmatrix} PA_c + A_c^{\mathrm{T}}p & PB_1 & C_c^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I & 0 \\ C_c & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7) \qquad \min\gamma;\mathrm{s.t.}\begin{bmatrix} \Theta_1 & S_1 \\ S_1^{\mathrm{T}} & T_1 \end{bmatrix} < 0, X>0, \gamma>0 \quad (8)$$

## 2　柔性控制器设计

**引理 1**[1,3]　设 $X$ 、$Y$ 为具有适当维数的常矩阵，$\Delta(t)$ 为满足 $\Delta^{\mathrm{T}}(t)\Delta(t)\leqslant I$ 的不确定矩阵，则:①对任意常数 $\varepsilon>0$ ，有 $X\Delta Y+Y^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\leqslant\varepsilon XX^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y$ ②对满足 $I-\varepsilon EE^{\mathrm{T}}>0$ 的任意常数 $\varepsilon>0$ ，有 $(X+E\Delta(t)F)^{\mathrm{T}}(X+E\Delta(t)F)\leqslant X^{\mathrm{T}}(I-\varepsilon EE^{\mathrm{T}})^{-1}+\varepsilon^{-1}F^{\mathrm{T}}F$。

为考虑控制器增益的不确定性,使设计的控制器具有一定的柔性,将控制器表示为式(3)。其中,$K$ 为控制器增益的设计值，$\Delta K(t)$ 表示控制器实现中的不确定性。假设 $\Delta K(t)$ 可限界,将其表为式(10)。其中，$\Delta(t)$ 为由标准化区间变量 $\delta_i(t)$ ($|\delta_i(t)|\leqslant1$) 组成的对角矩阵，$E$、$F$ 为适当维数的常数阵。控制器(9)应用于受控系统,可得闭环系统(11)。

$$u(t)=(K+\Delta K(t))x(t) \quad (9) \qquad \Delta K(t)=E\Delta(t)F \quad (10)$$

$$\dot{x}(t)=(A_c+B_2E\Delta(t)F)x(t)+B_1w(t);z(t)=(C_c+DE\Delta(t)F)x(t)+B_1w(t) \quad (11)$$

**定理 3**　若$(A,B_2)$ 能稳定,则存在状态反馈柔性控制器(9)使闭环系统内稳定,且满足式(4)的充分条件为存在标量 $\varepsilon_1>0$ 、$\varepsilon_2>0$ ，对称正定矩阵 $X$ 和矩阵 $W$,使式(12)成立。

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 & S \\ S^{\mathrm{T}} & T \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中，$\Theta_2=(AX+B_2W)+(AX+B_2W)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1(B_2E)(B_2E)^{\mathrm{T}}$，$S=[(FX)^{\mathrm{T}}(CX+DW)^{\mathrm{T}}(FX)^{\mathrm{T}}]B_1$，$T=\mathrm{diag}\{-\varepsilon_1I,-(I-\varepsilon_2EE^{\mathrm{T}}),\varepsilon_2I,-\gamma^2I\}$ 。基于状态反馈的 $\gamma$－次优 $H_\infty$ 柔性控制器可取为 $u(t)=WX^{-1}x(t)$。

证明:将 $A_c$、$C_c$代入系统(14),并根据式(5)有

$$P(A+B_2K)+(A+B_2K)^{\mathrm{T}}P+\gamma^{-2}PB_1B_1TP+(PB_2E)\Delta(t)F+F^{\mathrm{T}}\Delta(t)(PB_2E)^{\mathrm{T}}+(C+DK+DE\Delta(t)F)^{\mathrm{T}}\cdot(C+DK+DE\Delta(t)F)<0 \quad (13)$$

由引理 1,对任意正数 $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$,当式(14)成立时,有式(13)成立。

$$P(A+B_2K)+(A+B_2K)^{\mathrm{T}}P+\gamma^{-2}PB_1B_1TP+\varepsilon_1(PB_2E)(PB_2E)^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1^{-1}F^{\mathrm{T}}F+(C+DK)^{\mathrm{T}}(I-\varepsilon_2EE^{\mathrm{T}})^{-1}(C+DK)+\varepsilon_2^{-1}F^{\mathrm{T}}F<0 \quad (14)$$

由 Schur 补引理[2],将式(14)写为 LMI 形式,两边分别左乘和右乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1},I,I,I,I\}$ ,即得式(12)。

据此可得到系统的最优 $H_\infty$ 柔性控制器。$\min\gamma;\mathrm{s.t.}\begin{bmatrix} \Theta_2 & S \\ S^{\mathrm{T}} & T \end{bmatrix}<0, X>0, \varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, \gamma>0$。

## 3　设计算例

例:某系统的动态模型可描述为式(1)所示形式,其中的参数如下:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0.3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

在要求的干扰抑制度为 $\gamma=0.6$ ,不考虑控制器增益的波动时,设计的 $\gamma$－次优 $H_\infty$ 刚性控制器为

$$K=\begin{bmatrix} -2.1198 & -1.1255 & 0.7902 \\ -0.2830 & 0.0996 & -0.5983 \end{bmatrix}$$

取初始条件 $x_0=[-1,2.5,2]^{\mathrm{T}}$,在 0 均值单位方差高斯噪声扰动作用下的输出响应仿真曲线见图 1。

若考虑控制器摄动,根据其参数的许可波动,将其表示为式(9),其中的 $\Delta K$ 为$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$。在 $\gamma=0.6$ 时,用文中方法设计的 $\gamma$－次优 $H_\infty$ 柔性控制器和最优 $H_\infty$ 柔性控制器增益分别为

$$K_f=\begin{bmatrix} -4.79126 & 0.24897 & -1.22107 \\ -0.46013 & -0.04523 & -0.92585 \end{bmatrix},K_{f\mathrm{opt}}=\begin{bmatrix} -6.89305 & 0.44630 & -1.60881 \\ -0.70465 & -0.24.88 & -1.17767 \end{bmatrix}$$

在和上述同样的噪声扰动作用下,次优柔性控制系统的输出响应仿真曲线见图 2。控制器参数摄动对刚性控制系统输出响应的影响见图 3(a)、(b),对次优柔性控制系统输出响应的影响见图 4(a)、(b)所示。外扰作用下,刚性控制系统和次优柔性控制系统的输出响应仿真曲线见图 5 (a)、(b)所示。

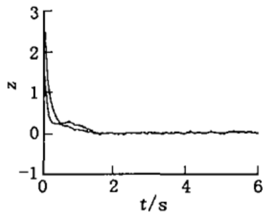


图 1 刚性控制系统的输出响应仿真曲线

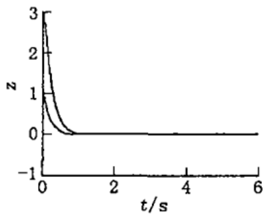
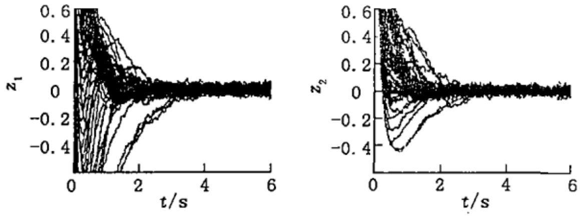
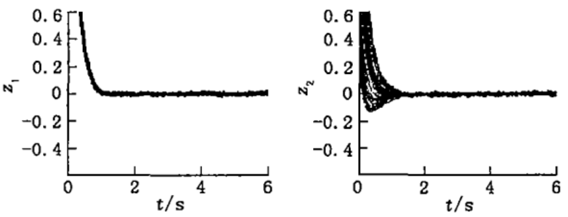


图 2 柔性控制系统的输出响应仿真曲线



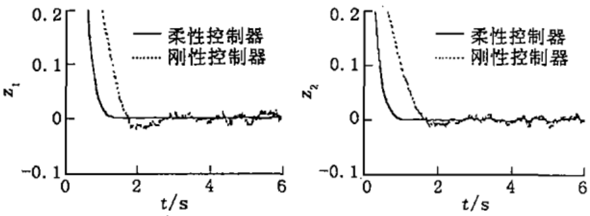
(a) (b)

图 3 控制器参数摄动对刚性控制系统响应的影响仿真



(a) (b)

图 4 控制器参数摄动对柔性控制系统响应的影响仿真




(a) (b)

图 5 外扰作用下的系统响应仿真

## 4 结论

考虑控制器参数的摄动,基于 LMI 方法,研究了系统的状态反馈鲁棒 $H_\infty$ 柔性控制器设计问题。给出了柔性控制器存在的条件和控制器增益的设计方法。不同于现有的鲁棒控制设计方法,文中方法所设计的控制器增益是一范围,而非一确定的单值。当控制器增益在所考虑范围内波动时,均能保证闭环系统的稳定性和性能要求。因而有更高的可靠性。算例仿真表明了文中方法设计的柔性控制器有良好的抗控制器参数偏移和干扰抑制性能,是有效和可行的。文中方法也易于推广到不确定性系统的鲁棒 $H_\infty$ 柔性控制器设计。

**参考文献:**

[1] 俞 立. 鲁棒控制 - 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社,2002.

[2] 王德进. $H_2$ 和 $H_\infty$ 优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2001.

[3] Cao Y, Sun Y, Lam J. Delay - Dependent Robust Control for Uncertain Systems with Time - Varying Delays [J]. IEEE Proc - Control Theory and Applications, 1998, (3): 338 - 344.

[4] Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile, or Optimal [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, (8): 1098 - 1105.

[5] 王 武,杨富文. 不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱控制[J]. 控制理论与应用,2003,20(3):473 - 476.

[6] 关新平,邬晶,龙乘念. 不确定时滞系统保性能弹性控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 2003,20(4):619 - 622.

(编辑:姚树峰)

# Design of Robust $H_\infty$ Flexible Controller for Linear System Using State Feedback and LMI

GUO Shu - xiang[1,2], ZHANG Ling[1], LI Ying[2]

(1. Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

**Abstract**: Considering uncertainties in realization of controllers, sufficient conditions under which the robust flexible controller exists are developed based on state feedback and in terms of the method of linear matrix inequality (LMI). A procedure for the design of flexible controller is presented. Different from the commonly used robust control method, in which the controller must be realized exactly, the controller gain obtained by the proposed method is at intervals. Therefore, when parameters of designed controllers vary in permitted ranges, stability and performance of the closed system can be assured, i. e. the designed controller is flexible, robust and reliable. A numerical example shows that the flexible controller designed by the presented method is effective, feasible and excellent in resisting the excursion of parameters of controller and suppressing the external disturbances.

**Key words**: state feedback; flexible controller; robust control; linear matrix inequality (LMI)