不完全权重信息下多属性决策方法研究

陈绍顺，　宁伟华，　王　君
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800)

摘　要:针对目标属性的权重不完全确知的情况下,提出了一种先进行局部优化,再组合赋权并对方案进行排序的决策方法。此方法是从最小偏差的角度出发,构造了目标权重的统计量,它既利用了子样的信息,又利用了先验信息,评价结果客观可靠。另外,在此基础上进一步加入权系数的信息熵,建立了优化的数学模型。最后,通过实例表明新方法的有效性。

关键词:多属性决策;权重;统计量;信息熵
中图分类号:O224　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2004)05-0024-04

在现代军事指挥中存在着大量的多属性决策问题。一些学者提出了最小偏差、最大离差、理想点法[1]等大量确定目标权重的方法。由于客观事物的复杂性和人类思维的模糊性,一般情况下,人们难以给出明确的偏好信息,往往只提供权重可能的变化范围,有关这方面决策问题的专门研究尚不多见。文献[2~4]对此进行了一定的研究探讨,给出了进行决策的两阶段法。本文从最小偏差的角度对此决策问题进行了研究,建立了数学模型,给出了精确解,为解决不完全权重信息下多属性决策问题提供了一条新的途径。

1　属性值规范化方式

设决策问题有 m 个目标,记为 $G=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$,待评的 n 个方案记为 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$。方案 P_i 对第 j 个目标的属性值用 a_{ij} 表示($i=1,2,\cdots n;j=1,2,\cdots,m$),则决策矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$。

属性类型一般可分为效益型属性、成本型属性、固定型属性、偏离型属性、区间型属性、偏离区间型属性。各类属性的性质见文献[5]。一般而言,不同的属性值往往具有不同的量纲和量纲单位。为了消除量纲和量纲单位不同所带来的不可公度性,必须进行规范化(无量纲化)处理[1]。本文采用文献[2]的方法。记规范化后的决策矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$。注意 $\boldsymbol{R}$ 中的每个元素满足 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$,且总是愈靠近1愈好。

2　权系数的确定

2.1　综合属性的求取

不妨设目标属性的权重向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots w_m)^{\mathrm T}$,其中 $w_i\in[\alpha_i,\beta_i]$,$\sum_{i=1}^{m}w_i=1$,这里 β_i 和 α_i 分别是 w_i 的上下界,则方案 p_j 的综合属性值为

$$z_j=\sum_{i=1}^{m}w_ir_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

有限个方案的多属性决策,实质上就是对这些方案的综合属性值进行排序比较。显然,综合属性值 z_j 越靠近1,则所对应的方案 p_j 就越优。

为此,我们先求取对各个方案 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 最优,即其综合属性值最大时所对应的各目标权重。建

* 收稿日期:2003-09-30
作者简介:陈绍顺(1977-),男,湖北武汉人,博士生,主要从事防空作战指挥运筹决策分析.

立如下的单目标决策模型:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{m} u_i r_{ij} \\ \text{s.t.} \quad &\alpha_i \leqslant u_i \leqslant \beta_i \qquad i = 1,2,\cdots,m \\ &\sum_{i=1}^{m} u_i = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

解此模型可得到对应各方案 $p_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 的最优目标权重向量 $\boldsymbol{u}^{(j)} = (u_1^{(j)},u_2^{(j)},\cdots,u_m^{(j)})^{\mathrm{T}}$。

2.2 权系数的求取

文献[2]利用规范化矩阵 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times m}$ 和权重向量 $\boldsymbol{u}^{(j)} = (u_1^{(j)},u_2^{(j)},\cdots,u_m^{(j)})^{\mathrm{T}}$ 给出了目标属性的最佳协调权向量,即计算矩阵 $(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 及特征向量 $\boldsymbol{w}$,其中 $\boldsymbol{U} = (u^{(j)})_{n\times m}$。

从数理统计的观点来看,目标属性的真实权数是一个随机变数(量),随机变数可表示为其均值与一个随机误差之和。因此,可用权数的均值代表真实权数。从模型(2)中求取的 n 组权数可以看作是对真实权数这个随机变量的一次随机抽样中抽取的子样,故这 n 组权数相当于 n 个样本值。当然,用一个样本点的值来表示均值就会有偏差,而文献[2]实际上是利用了子样的信息(矩阵 $\boldsymbol{U}$)和多属性决策的先验信息(矩阵 $\boldsymbol{R}$),构造出拟统计量 $(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})$。本文将从最小偏差的角度出发,构造统计量,求解真实权重[3-5]。

各属性的真实权重为 $\boldsymbol{w} = (w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$,则方案 p_j 的综合属性值的偏离程度可用 $v_j(w)$ 来描述:

$$v_j(w) = \sum_{i=1}^{m} [(w_i - u_i^{(j)}) r_{ij}]^2 \quad , \quad j = 1,2,\cdots,n$$

显然,这种偏离是越小越好,故可建立如下多目标规划模型:

$$\begin{aligned} &\min\{v_1(w),v_2(w),\cdots,v_n(w)\} \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \quad w_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \end{aligned}$$

由于每个方案均为非劣方案,不存在任何的偏好关系,因此上述多目标规划问题可集结成下列单目标规划问题:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} [(w_i - u_i^{(j)}) r_{ij}]^2 \\ \text{s.t.} \quad &\sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \quad w_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \tag{3}$$

为了求解此模型构造 Lagrange 函数:

$$L(w,k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} [(w_i - u_i^{(j)}) r_{ij}]^2 - 2k\left(\sum_{i=1}^{m} w_i - 1\right)$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial w_i} = 2\sum_{j=1}^{n} (w_i - u_i^{(j)}) r_{ij}^2 - 2k = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ \dfrac{\partial L}{\partial k} = 2\left(1 - \sum_{i=1}^{m} w_i\right) = 0 \end{cases}$$

可得

$$w_i = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m} \dfrac{s_i}{t_i} + s_i \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{t_i}}{t_i \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{t_i}}$$

其中,

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)} r_{ij}^2, t_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2。$$

从 w_i 的表达式可以看出,构造的统计量既利用了子样的信息(矩阵 $\boldsymbol{U}$),又利用了多属性决策的先验信息(矩阵 $\boldsymbol{R}$),比文献[2]优越的是它直接求取 w_i,而非先计算 $(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U})$,再求对应 $\lambda_{\max}$ 的特征向量 $\boldsymbol{w}$。

另一方面,由于各属性的真实权数是一个随机变量,具有不确定性。为了描述这种不确定性,可将权系数 w_i 理解为第 i 个目标 f_i 在目标集 G 中所占的比重(概率),这样就可以用 Shannon 信息熵[6-7]:

$$H = -\sum_{i=1}^{m} w_i \ln w_i$$

表示属性值权系数的不确定性。

为了尽量消除各属性值权系数的不确定性,根据 Jaynes 最大熵原理,确定的属性值权系数应使 Shannon 信息熵取极大值,即:

$$\max H = -\sum_{i=1}^{m} w_i \ln w_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \quad w_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

为了达到上述两个目的,可建立如下数学模型:

$$\min \lambda \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} [(w_i - u_i^{(j)}) r_{ij}]^2 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} w_i \ln w_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, w_i \geqslant 0 \quad , \quad i = 1,2,\cdots,m \quad , \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{4}$$

其中,正参数 $0 < \lambda < 1$,用来表示最小偏差和最大熵之间的平衡系数,可根据实际问题预先给出。

2.3 权系数的求解算法

综上所述,对于这种不完全权重信息的多属性决策,我们有以下算法:

第一步 首先将决策矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times m}$ 按文献[2]的方法进行规范化得到规范化后的决策矩阵 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n\times m}$。

第二步 提供目标属性权重的可能变化范围。

第三步 根据模型(2)求解对应各方案 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的最优目标权重向量 $\boldsymbol{u}^j = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \cdots, u_m^{(j)})^{\mathrm{T}}$。

第四步 根据模型(3)或模型(4)求解对应各目标 $f_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的真实权重 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots w_m)^{\mathrm{T}}$。

第五步 最后由式(1)计算各方案的综合属性值,按照综合属性值 $z_j(j=1,2,\cdots,n)$ 从大到小的顺序排列即得各方案 $p_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的排序。

3 应用实例分析

为了便于对照,我们采用文献[2]中的数据,5 个方案 $\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$,四个目标 $\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$,建立的决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5.20 & 5.220 & 4.73 & 0.473 \\ 10.08 & 6.70 & 5.71 & 1.599 \\ 5.25 & 4.20 & 3.82 & 0.473 \\ 9.72 & 5.25 & 5.54 & 1.313 \\ 6.60 & 3.75 & 3.30 & 0.803 \end{bmatrix}$$

进行规范化后转化为规范化的决策矩阵: $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.492 & 0.407 & 1.000 \\ 1.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.010 & 0.153 & 0.784 & 1.000 \\ 0.926 & 0.508 & 0.071 & 0.254 \\ 0.287 & 0.000 & 1.000 & 0.707 \end{bmatrix}$

对于方案 P_1,由模型(2)可得如下优化模型:

$$\max\{0.492u_2 + 0.407u_3 + u_4\}$$

$$\text{s.t.} \quad 0.1 \leqslant u_1 \leqslant 0.5, \quad 0.2 \leqslant u_2 \leqslant 0.3, \quad 0.01 \leqslant u_3 \leqslant 0.2,$$

$$0.25 \leqslant u_4 \leqslant 0.45, \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$$

解得对应于方案的最优目标权重为 $\boldsymbol{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)})^{\mathrm{T}} = (0.100, 0.300, 0.150, 0.450)^{\mathrm{T}}$。

同样可根据模型(2)求得方案 p_2,p_3,p_4,p_5 的最优目标权重:

$$\boldsymbol{u}^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)})^{\mathrm{T}} = (0.500, 0.240, 0.010, 0.250)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}^{(3)} = (u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, u_4^{(3)})^{\mathrm{T}} = (0.100, 0.250, 0.200, 0.450)^{\mathrm{T}}$$

$$u^{(4)} = (u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, u_3^{(4)}, u_4^{(4)})^T = (0.500, 0.240, 0.010, 0.250)^T$$
$$u^{(5)} = (u_1^{(5)}, u_2^{(5)}, u_3^{(5)}, u_4^{(5)})^T = (0.100, 0.250, 0.200, 0.450)^T$$

由上述数据,根据模型(3)进行求解,得各属性值的真实权重为:$w = (0.262, 0.248, 0.123, 0.367)^T$,再由式(1)得各目标的综合属性值 $z = (0.539, 0.51, 0.504, 0.471, 0.458)$。

如果根据模型(4)进行求解,取 $\lambda = 0.5$,得各属性值的真实权重为:$w = (0.258, 0.252, 0.128, 0.362)^T$,再由式(1)得各目标的综合属性值 $z = (0.538, 0.51, 0.503, 0.468, 0.458)$ 。

从数据可以看出,用本文模型计算的结果与文献[2]计算的结果相符,各方案的排序为

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > p_5$$

4　结束语

本文研究了目标权重未事先确知的多属性决策方法,提出了一种先进行局部优化再组合赋权并对方案进行排序的决策方法。该法不仅避免了获取偏好信息的困难,而且利用了规范化评价结果的先验信息,评价结果较为客观可靠,易于计算机上实现。此法为解决不完全信息下多属性决策问题提供了一条新的途径。

参考文献:

[1]　汪泽焱,益晓新,张申如. 基于理想最优方案的指标赋权法及其应用[J]. 系统工程,2002,20(2):6 -9.
[2]　徐泽水. 部分权重信息下多目标决策方法研究[J]. 系统工程理论与实践,2002,22(1):43 -47.
[3]　魏巍贤,冯　佳. 多目标权系数的组合赋权方法研究[J]. 系统工程与电子技术,1998,20(2):14 -16.
[4]　王坚强. 多目标组合决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术,2002,24(10):70 -72.
[5]　刘树林,邱菀华. 多属性决策基础理论研究[J]. 系统工程理论与实践,1998,18(1):38 -34.
[6]　汪泽焱. 一种基于最大离差和熵的多指标评价方法[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版),2002,3(6):93 -95.
[7]　任　全,聂　成,李为民. 基于最小偏差指标赋权法的威胁判断模型[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2003,4(5):78 -81.

(编辑:田新华)

Study of Multi - attribute Decision - Making in the Case of Partial Weight Information

CHEN Shao - shun,　NING Wei - hua,　WANG Jun
(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

Abstract: This paper presents a method for MADM of partial weight information. The method consists of three steps - - - first optimizing regionally, then forming assigned weigh and ranking all decisions. The method, according to the minimum deviation, constructs the statistics - variable of weight and contains the utilization of both samples information and previous information so as to make the evaluations objective and believable. In addition, IE is employed and optimal mathematics model is set up on the basis of the method. At last, an illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the new method.

Key words: multi - attribute decision - making (MADM); weight; statistics - variable; information - entropy (IE)