

基于断裂力学的混凝土裂缝数值分析

白二雷¹, 许金余^{1,2}, 姚焕忠¹, 张学军²

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 西北工业大学 力学与建筑工程学院, 陕西 西安 710072)

摘要:将断裂力学运用于混凝土的裂缝分析,给出了混凝土的断裂准则,分析了该准则的缺陷,将断裂力学准则与强度理论准则相结合,提出了一种等效断裂变形的模型,根据该模型,推导出了带裂缝的混凝土体的弹塑性本构关系。

关键词:断裂力学;断裂准则;等效断裂变形;本构关系

中图分类号:TU375 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2004)02-0081-04

混凝土材料在承受荷载前,其内部水泥石与骨料的界面之间以及水泥石的内部就已经存在许多微小裂纹,在外部荷载的作用下,这些微小裂纹进一步发展形成宏观裂缝而导致破坏。把混凝土中这种微小的裂纹、裂缝看成是一种缺陷,通常,人们研究这种带缺陷材料的力学性质有两种方法:一种是断裂力学的方法;一种是损伤力学的方法。损伤力学将混凝土材料视为连续介质场,把包含各种微裂纹和微缺陷的材料笼统的看成含有损伤场的连续介质,把损伤的发生、发展看作是损伤演变过程,引入适当的损伤变量来描述这种连续损伤介质的物理力学性质。但损伤力学不能描述应力、能量和裂缝深度之间的关系,不能对系统中一个给定的裂缝的扩展做出定量的估计。

断裂力学是研究含裂缝的构件在各种环境条件下(包括荷载作用、腐蚀性介质作用、温度变化等)裂缝的平衡、扩展或失稳的规律,并且研究其强度条件的一门学科。混凝土材料在宏观裂缝发生失稳扩展前,存在着缓慢的稳定裂缝增长阶段,其裂缝尖端附近存在着一个微裂区。当裂缝增长而形成塑性区或微裂区时,都要消耗更多的外力功。所以线性断裂力学的判据就不能使用,必须采用非线性断裂力学的分析方法来确定混凝土材料的断裂判据。

在对带裂缝的混凝土的工作性质进行分析时,赫尔伯格(Hillerborg)提出了虚拟裂缝,他把裂缝限制在单元边界上,一旦裂缝发展,在预制的虚拟裂缝处的双结点便逐渐分离,这种模式极其本构关系可以模拟单个裂缝的发展。本文在对混凝土的断裂力学准则分析的基础上,参考其他研究者对混凝土裂缝的研究成果,对混凝土的断裂变形及其本构关系进行探讨。本文所建立的弹塑性本构关系考虑了混凝土内部微裂缝等缺陷的发生、发展、交叉、会聚的过程,在工程实践中的应用研究和数值模拟有着重要的作用。

1 混凝土的断裂准则

根据非线性断裂力学,对于I型裂缝,混凝土材料断裂的断裂力学准则为

$$\bar{K}_I \leq K_{Ic}; \delta \leq \delta_c \quad (1)$$

式中: \bar{K}_I 为混凝土裂缝尖端的修正应力强度因子; K_{Ic} 为混凝土的断裂韧度; δ 为混凝土裂缝尖端表面的张开位移值; δ_c 为混凝土材料所允许的临界值。

断裂力学的准则已经得到了广泛的应用,但将这一准则用于混凝土结构时有两点不足:①这个准则只能判断已有裂缝是否会发展,是否稳定,但是它不能判断裂缝的开始。而在什么条件下混凝土开始产生裂缝是

收稿日期:2003-09-04

基金项目:总后科研基金资助(HX00502)

作者简介:白二雷(1979-),男,河南焦作人,硕士生,主要从事结构工程研究;

许金余(1963-),男,吉林靖宇人,教授,博士生导师,主要从事结构工程、防护工程研究。

普遍关心的问题;②对于结构中已存在的单一裂缝,这一准则易于应用,但是混凝土结构中往往有许多裂缝,目前要计算成群裂缝的应力强度因子或裂缝扩展能量率还没有合适的计算方法。

2 等效断裂变形

为了克服上述缺点,我们将混凝土的断裂力学准则与强度理论准则结合起来。

2.1 混凝土的强度理论准则

采用混凝土的最大拉应力理论和最大拉应变理论,这一准则可表达为

$$\sigma_1 \leq f_t \quad (2) \quad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{1\max} \quad (3)$$

式中: σ_1 为混凝土中拉应力; f_t 为混凝土抗拉强度; ε_1 为混凝土中拉应变; $\varepsilon_{1\max}$ 为混凝土极限拉伸应变。

按照这一准则,当 $\sigma < f_t$ 时,混凝土不开裂;当 $\sigma \geq f_t$ 时,混凝土将在垂直于拉应力方向开裂,并且开裂面上的混凝土将不再继续承担拉应力。

2.2 混凝土的拉伸变形

从混凝土的拉伸试验中,可以得出如下结论:①混凝土拉伸时,当应力达到抗拉强度后,应力随着裂缝扩展而逐渐下降到零;②混凝土初始开裂后,在裂缝区和非裂缝区的应变有本质不同。在非裂缝区的应变随着应力的减小而减小(回缩),而在裂缝区的应变则随应力的减小而增大;③裂缝处的应变,实质上是包括裂缝在内应变仪表距范围内的平均变形。试件开裂后试件的相对伸长为

$$\Delta l = \varepsilon l + W \quad (4)$$

式中: ε 为裂缝区外的混凝土应变; l 为试件长度或量测应变时的表距; W 为裂缝张开的宽度。

于是,试件的平均变形为

$$\varepsilon_m = \Delta l / l = \varepsilon_0 + W / l \quad (5)$$

当试件未开裂时 $W = 0$, $\varepsilon_m = \varepsilon_0$ 。当试件开裂后,由于裂缝区外混凝土应变回缩变小,平均变形主要取决于裂缝宽度 W ,即

$$\varepsilon_m \approx W / l \quad (6)$$

这表明,试件的平均变形与试件长度或应变仪表距大小有关,所取 l 越大,平均变形就越小。所以,在混凝土开裂后,用 $\sigma - W$ 曲线来描述本构关系更为确切。

2.3 分布裂缝

所谓分布裂缝,就是将单个裂缝用“连续”的分布裂缝来代替。在这一裂缝模型中,若某一单元内的代表性应力超过了混凝土的抗拉强度,则认为该单元开裂,即假定在该单元内垂直于拉应力方向形成无数的、彼此平行的裂缝,而不是只形成一条单独的裂缝。这样,在混凝土中出现的裂缝是微小的,充满整个单元的,而且是“连续”的,因而仍可把连续介质力学的原理运用于带裂缝的混凝土体。

这种裂缝模式不需要插入特殊的裂缝单元,裂缝的发展可以自动跟踪。但由于不是单独裂缝,也就无法计算裂缝的宽度,它只能计算出按单元平均的拉伸应变。

2.4 等效断裂变形模型

基于上述分析,这里提出一个等效断裂变形的办法。所谓等效断裂变形,定义为

$$\varepsilon_f = W / l_c \quad (7)$$

式中: W 为裂缝的宽度; l_c 为特征长度。在试验研究中可取应变仪的表距长度,在有限元数值分析时取 $l_c = \sqrt{A}$, A 为单元面积(平面问题),或 $l_c = V / A_f$, V 为单元体积, A_f 为开裂面面积(三维问题)。

为计算裂缝的宽度 W ,要采用 $\sigma - W$ 的解析计算公式,也可取直线式或双直线软化曲线,这里采用负指数计算公式,即

$$\sigma = f_t e^{-a \frac{W}{l_c}} = f_t e^{-a \varepsilon_f} = f_t e^{-a(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad (8)$$

式中: f_t 为抗拉强度; ε_0 为裂缝开始时的应变; ε_f 为等效断裂应变; l_c 为特征长度; a 为软化系数。

3 带裂缝的混凝土的本构关系

运用分布裂缝模式并引入等效断裂变形以后,实质上以将带裂缝的混凝土单元连续化,于是可将它视作

连续体介质,有关连续体介质力学的原理和方法均可应用,这里采用弹塑性理论推导带裂缝的混凝土材料的本构关系。采用弹塑性理论,有3个条件必须表明:①屈服条件;②流动法则;③硬化法则。

屈服条件可由屈服面函数决定,即第一强度理论

$$F_f(\sigma_{ij}, W(\varepsilon_f)) = 0 \quad (9)$$

式中: σ_{ij} 表示应力函数; $W(\varepsilon_f)$ 表示硬化函数。

流动法则采用相关的流动法则,假定流动矢量与屈服面相垂直,即

$$d[\varepsilon_f] = \lambda \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \quad (10)$$

式中 λ 为待定常数。

关于硬化法则,可根据 $\sigma - W$ 曲线化为等效的 $\sigma - \varepsilon_f$ 曲线来确定。

混凝土开裂后,总应变可分为弹性变形与等效断裂变形之和,即

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_f \quad (11)$$

应力与弹性变形之间的关系服从虎克定律,即

$$[\sigma] = [D] \cdot [\varepsilon_e] \quad (12)$$

式中 $[D]$ 是通常的弹性矩阵。

对式(8),由全微分法则可得

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_f} d\varepsilon_f = 0 \quad (13)$$

写成矩阵形式可得

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T \cdot d[\sigma] + \left[\frac{\partial F}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_f} \right]^T \cdot d[\varepsilon_f] = 0 \quad (14)$$

令 $E_f = \left[\frac{\partial F}{\partial W} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_f} \right]^T$,称为软化模量。取 $n = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]$,则可得

$n^T D(d[\varepsilon] - \lambda n) - E_f \cdot \lambda n = 0$,于是

$$\lambda = \frac{n^T D \cdot d[\varepsilon]}{E_f + n^T D n} \quad (15)$$

当 $\lambda > 0$ 时,裂缝扩展;当 $\lambda = 0$ 时,为弹性。最后将带裂缝的混凝土的本构关系表示为

$$[\sigma] = [D]_f [\varepsilon] \quad (16)$$

$[D]_f$ 为开裂后混凝土的本构关系矩阵。

将以上各式代入式(15)可得

$$[D]_f = [D] - \frac{[D] n n^T [D]}{E_f + n^T [D] n} \quad (17)$$

这与根据塑性理论推导出的弹塑性本构矩阵的形式完全一致,只要采用相应的参数,有关弹塑性分析的计算程序就可套用。

4 算例

用混凝土的等效断裂变形和弹塑性本构矩阵可以分析计算拔出试验构件的应力。

直径为15 cm的C20混凝土圆柱体,中间埋置一根 $\Phi 16$ mm的钢筋,从两端拉伸钢筋,电阻片埋于钢筋中间测得钢筋应力,见图1。

材料的主要参数为:钢筋的弹性模量 $E_s = 2.06 \times 10^5$ MPa,混凝土的初始弹性模量 $E_0 = 2.55 \times 10^4$ MPa,混凝土的抗压强度 $f_c = 10$ MPa,混凝土的抗拉强度 $f_t = 1.1$ MPa。由于对称,取一半试件进行分析。对混凝土采用三角形单元,对钢筋采用线形单元,在钢筋和混凝土之间采用粘结单元。钢筋未达流限,采用弹性本构关系,单元开裂后采用等效断裂变形。采用不同的拉力 P 进行3次实验,分析与实测的钢筋应力分布见图2所示。由图可见,分析与实测的结果基本吻合,令人满意。

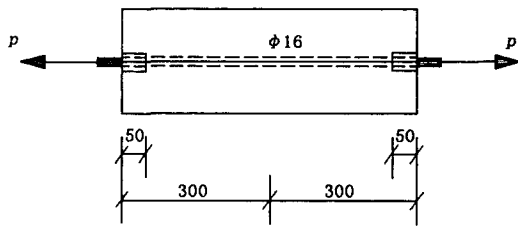


图1 拉伸钢筋图

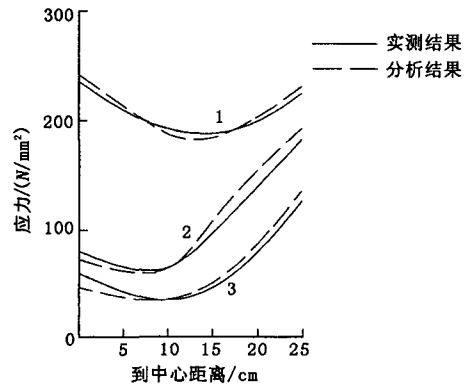


图2 钢筋应力分布图

5 结束语

混凝土在一般情况下是带裂缝工作的,其内部是有缺陷的,混凝土的破坏过程也就是其内部微裂缝等缺陷的发生、发展、交叉、会聚的过程。本文从混凝土材料的特点出发,首先给出了混凝土断裂破坏的断裂力学准则,分析了其存在的不足,提出了改进的模型。

正确的使用混凝土的本构模型对于混凝土在工程实践中的应用研究和数值模拟有着重要的作用。本文根据等效断裂变形,采用弹塑性理论推导出了带裂缝的混凝土的本构关系,通过与根据塑性理论得出的弹塑性本构矩阵对比,证明了其正确性。

参考文献:

- [1] A·希拉鲍格, M·摩德尔, P-E彼得逊. 无机非金属材料断裂力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989.
- [2] 李银平, 肖四喜, 王元汉. 混凝土细观损伤断裂力学模型[J]. 工程力学, 2002, 10: 444 - 447.
- [3] 过镇海. 钢筋混凝土原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [4] Krajcinovic D. Damage Mechanics: Accomplishments, Trends and Needs[J]. Int J Solids Structure, 2002, 37: 267 - 277.
- [5] Feng X Q, Yu S W. Micromechanical Modeling of Tensile Response of Elastic - Brittle Materials[J]. Int J Solids Structure, 1995, 32: 3359 - 3374.

(编辑: 姚树峰)

Numerical Analysis of Concrete Cracks Based on Fracture Mechanics

BAI Er-lei¹, XU Jin-yu^{1,2}, YAO Huan-zhong¹, ZHANG Xue-jun²

(1. The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China; 2. Dept. of Civil Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: Fracture mechanics is adopted in analyzing the concrete cracks. The fracture criterion of concrete is given and in addition, the limitations of this criterion are analyzed. To overcome the limitations, the paper combines the criterion of fracture mechanics with the criterion of strength theory, presents a model of equivalent fracture distortion and, based on the model, derives the stress - strain relationship of the concrete with cracks.

Key words: fracture mechanics; fracture criterion; equivalent fracture distortion; stress - strain relationship