两类含非线性传染率的传染病模型的定性分析

李建全[1]，王拉娣[2,3]，杨友社[1]

(1. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077;2. 上海大学 数学系，上海 200436;3. 山西财经大学 应用数学系，太原 030006)

摘　要:讨论了两类具有非线性传染率的传染病模型,确定了各类平衡点存在的阈值条件,通过构造 Dulac 函数和 Liapunov 函数,得到了无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充要条件。

关键词:传染病模型;阈值;平衡点;稳定性

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2004)01-0084-05

借助数学模型研究传染病的传播过程和动力学行为,已得到了许多结果,并对传染病的防治作出了重要贡献。描述传染病传播过程和行为的传染病模型中最重要的是对传染率的刻划,常见的传染率形式有双线性型和标准型[1-4]。近些年来，对带有非线性传染率的传染病模型也有了一些研究结果[5-8]。文献[6]对带有传染率为$\beta I^p S^q$的传染病模型研究发现，此类模型会发生 Hopf 分支而产生周期解。文献[8]对带有传染率为$\frac{\beta I^2 S}{1+\alpha I^2}$的传染病模型研究发现，此类模型会发生鞍结点分支、Hopf 分支和同宿分支，并证明了两个极限环的存在性。

本文将对带有传染率为$\frac{\beta IS}{H+I}$的 SIS 型和 SIRS 型传染病模型进行研究，得到了其动力学性态的完整分析结果。

1　模型

以 $S=S(t)$、$I=I(t)$ 和 $R=R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、染病者和恢复者的数量，则可得带有传染率为$\frac{\beta IS}{H+I}$的 SIS 型和 SIRS 型传染病模型,其描述如下:

$$\text{SII 型:}\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt}=K-dS-\dfrac{\beta IS}{H+I}+\gamma I \\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{\beta IS}{H+I}-(d+\alpha+\gamma)I \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{SIRS 型:}\quad \begin{cases} \dfrac{dS}{dt}=K-dS-\dfrac{\beta IS}{H+I}+\varepsilon R \\ \dfrac{dI}{dt}=\dfrac{\beta IS}{H+I}-(d+\alpha+\gamma)I \\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I-(d+\varepsilon)R \end{cases} \tag{2}$$

式中:K 表示对种群的常数输入率，d 表示种群的自然死亡率，α 表示染病者的因病死亡率，γ 表示染病者的恢复率，ε 表示恢复者的免疫失去率。

收稿日期:2003-09-01
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19971066)
作者简介:李建全(1965-),男，山西万荣人，副教授，博士生，主要从事微分方程定性理论及其应用研究;
王拉娣(1958-),女,河北井陉人,教授,主要从事微分方程定性理论及其应用研究.

为了便于讨论，作变量代换：

$$x=\frac{S}{H},y=\frac{I}{H},z=\frac{R}{H}$$

则模型(1)和(2)分别变为如下系统(3)、系统(4)的形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A-dx-\dfrac{\beta xy}{1+y}+\gamma y\triangleq P(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\beta IS}{1+y}-(d+\alpha+\gamma)y\triangleq Q(x,y)\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A-dx-\dfrac{\beta xy}{1+y}+\varepsilon z\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\beta xy}{1+y}-(d+\alpha+\gamma)y\\ \dfrac{dz}{dt}=\gamma y-(d+\varepsilon)z\end{cases}\tag{4}$$

式中 $A=\frac{K}{H}$，同时，记 $R_0=\frac{\beta A}{d(d+\alpha+\gamma)}$

2　SIS 模型分析

由于 $y=0$ 是系统(3)的解，所以当初值 $y(0)=0$ 时,$y(t)\equiv0$;当 $y(0)>0$ 时,$y(t)>0$ 。又 $\frac{dx}{dt}|_{x=0}=A+\gamma y>0$。同时，由系统(3)有

$$\frac{d(x+y)}{dt}=A-d(x+y)-\alpha y\leqslant A-d(x+y)$$

所以$\lim\limits_{t\to\infty}\sup[x(t)+y(t)]\leqslant\frac{A}{d}$。因此，易知集

$$D=\{(x,y):x>0,y\geqslant0,x+y\leqslant\frac{A}{d}\}$$

为系统(3)的正不变集，故以下仅在集 D 内讨论。

通过直接计算可得：

定理 1　当 $R_0\leqslant1$ 时，系统(3)仅有无病平衡点 $P_0(x_0,y_0)=(\frac{A}{d},0)$；当 $R_0>1$ 时，除无病平衡点 P_0外系统(3)还有唯一的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e)$，其中

$$x_e=\frac{A-(d+\alpha)y_e}{d},\quad y_e=\frac{\beta A-d(d+\alpha+\gamma)}{d\gamma+(d+\beta)(d+\alpha)}$$

定理 2　对于系统(3)，当 $R_0<1$ 时,无病平衡点 P_0是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,地方病平衡点 P_e是全局渐近稳定的。

证　直接计算可得系统(3)在平衡点 P_0和 P_e处的 Jacobi 矩阵分别为

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}-d & \gamma-\dfrac{\beta A}{d}\\ 0 & (d+\alpha+\gamma)(R_0-1)\end{pmatrix}$$

和

$$J(P_e)=\begin{pmatrix}-d-\dfrac{\beta y_e}{1-y_e} & \gamma-\dfrac{\beta x_e}{(1+y_e)^2}\\ \dfrac{\beta y_e}{1-y_e} & -\dfrac{\beta x_e y_e}{(1+y_e)^2}\end{pmatrix}$$

由 $J(P_0)$ 易知，当 $R_0<1$ 时,P_0是局部渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,P_0是不稳定的。

同时有 $\mathrm{tr}J(P_e)<0$ 。由于 x_e和 y_e满足$\frac{\beta y_e}{1+y_e}=d+\alpha+\gamma$，所以有 $\det J(P_e)=\frac{y_e}{1+y_e}=[(d+\beta)(d+\alpha+$

$\gamma)-\beta\gamma]>0$。因此,P_e 是局部渐近稳定的。

1) 由系统(3)中的第2个方程有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant y[\beta x-(d+\alpha+\gamma)]\leqslant y(d+\alpha+\gamma)(R_0-1)$$

这里用到 $x\leqslant\frac{A}{d}$。因此,当 $R_0<1$ 时,$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。结合 P_0 的局部渐近稳定性可知:当 $R_0<1$ 时,P_0 是全局渐近稳定的。

2) 取 Dulac 函数 $B(y)=\frac{1+y}{y}$,则对系统(3)有

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}=-[\beta+d+\alpha+\gamma+d\cdot\frac{1+y}{y}]<0$$

所以系统(3)不存在闭轨线。结合 P_e的局部渐近稳定性可知:当 $R_0>1$ 时,P_e 是全局渐近稳定的。

3 SIRS 模型分析

类似于系统(3),系统(4)有正不变集

$$\Omega=\{(x,y,z):x>0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z\leqslant\frac{A}{d}\}$$

直接计算易得:

定理3 当 $R_0\leqslant1$ 时,系统(4)仅有无病平衡点 $P_0(x_0,y_0,z_0)=(\frac{A}{d},0,0)$;当 $R_0>1$ 时,系统(4)除无病平衡点 P_0 外,还有唯一的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e,x_e)$,其中

$$x_e=\frac{d+\alpha+\gamma}{\beta}(1+y_e)\quad,\quad z_e=\frac{\gamma y_e}{d+\varepsilon}\quad,\quad y_e=\frac{\beta a-d(d+\alpha+\gamma)}{(d+\alpha+\gamma)(d+\beta)-\frac{\varepsilon\gamma\beta}{d+\varepsilon}}$$

定理4 对于系统(4),当 $R_0<1$ 时,P_0是局部渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,P_0 是不稳定的,P_e 是局部渐近稳定的。

证 直接计算可得系统(4)在 P_0 和 P_e处的 Jacobi 矩阵分别为

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}-d & -\frac{\beta A}{d} & \varepsilon\\ 0 & (d+\alpha+\gamma)(R_0-1) & 0\\ 0 & \gamma & -(d+\varepsilon)\end{pmatrix}$$

和

$$J(P_e)=\begin{pmatrix}-(d+\frac{\beta y_e}{1+y_e}) & -\frac{\beta x_e}{(1+y_e)^2} & \varepsilon\\ \frac{\beta y_e}{1+y_e} & -\frac{\beta x_e y_e}{(1+y_e)^2} & 0\\ 0 & \gamma & -(d+\varepsilon)\end{pmatrix}$$

由 $J(P_0)$ 可知:当 $R_0<1$ 时,P_0 是局部渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,P_0 是不稳定的。

由于 x_e和 y_e满足方程$\frac{\beta x}{1+y}-(d+\alpha+\gamma)=0$,所以,

$$J(P_e)=\begin{pmatrix}-(d+\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e}) & -\frac{(d+\alpha+\gamma)^2}{\beta x_e} & \varepsilon\\ \frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e} & -\frac{(d+\alpha+\gamma)^2y_e}{\beta x_e} & 0\\ 0 & \gamma & -(d+\varepsilon)\end{pmatrix}$$

因此,$J(P_e)$ 的特征方程为

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

其中

$$a_1=2d+\varepsilon+\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{\beta x_e}(\beta+d+\alpha+\gamma)$$

$$a_2=(d+\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e})(\frac{(d+\alpha+\gamma)^2y_e}{\beta x_e}+d+\varepsilon)+\frac{(d+\alpha+\gamma)^2y_e}{\beta x_e}(d+\varepsilon)+\frac{(d+\alpha+\gamma)^3y_e}{\beta x_e^2}$$

$$a_3=\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e}[\frac{d+\alpha+\gamma}{\beta}(d+\varepsilon)(d+\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e})+\frac{(d+\alpha+\gamma)^2}{\beta x_e}(d+\varepsilon)-\varepsilon\gamma]$$

再次应用等式 $\beta x_e=(d+\alpha+\gamma)(1+y_e)$，有

$$a_2=\frac{(d+\alpha+\gamma)^2y_e}{x_e}(\frac{d}{\beta}+1)+\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e}(\frac{d}{\beta}+1)(d+\varepsilon)+d(d+\varepsilon)$$

$$a_3=\frac{(d+\alpha+\gamma)y_e}{x_e}[(d+\alpha+\gamma)(d+\varepsilon)(\frac{d}{\beta}+1)-\varepsilon\gamma]>0$$

直接计算知 $a_1a_2-a_3>0$ ，所以 P_e是局部渐近稳定的。

定理 5　对于系统(4)，当 $R_0<1$ 时，P_0是全局渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，P_e是全局渐近稳定的。

证　1) 在集 Ω 内有 $x\leqslant\frac{A}{d}$。由系统(4)中的第 2 个方程有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant y[\beta x-(d+\alpha+\gamma)]\leqslant y[(d+\alpha+\gamma)(R_0-1)]$$

因此，当 $R_0<1$ 时，$\lim_{t\to\infty}y(t)=0$。结合 P_0的局部渐近稳定性可知，当 $R_0<1$ 时，P_0 全局渐近稳定的。

2) 为了便于讨论 P_e的全局渐近稳定性，记 $u=x+y+z$ ，则系统(4)等价于系统(5)。

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y[\frac{\beta(u-y-z)}{1+y}-(d+\alpha+\gamma)]\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\gamma y-(d+\varepsilon)z\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=A-du-\alpha y\end{cases}\tag{5}$$

系统(4)的平衡点 P_e对应系统(5)的平衡点 $P'_e(y_e,z_e,u_e)$（其中 $u_e=x_e+y_e+z_e$），于是系统(5)等价于系统(6)。

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta y[\frac{u-u_e}{1+y_e}-\frac{z-z_e}{1+y_e}-\frac{(u-z)(y-y_e)}{(1+y)(1+y_e)}-(\frac{y}{1+y}-\frac{y_e}{1+y_e})\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\gamma(y-y_e)-(d+\varepsilon)(z-z_e)\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-d(u-u_e)-\alpha(y-y_e)\end{cases}\tag{6}$$

定义 Liapunov 函数

$$V(y,z,u)=\frac{1}{\beta}(y-y_e-y_e\ln\frac{y}{y_e})+\frac{(z-z_e)^2}{2\gamma(1+y_e)}+\frac{(u-u_e)^2}{2\alpha(1+u_e)}$$

则其沿着系统(6)的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{(1+u-z)(1+y_e)^2}{(1+y_e)(1+y)}-\frac{(d+\varepsilon)(z-z_e)^2}{\gamma(1+y_e)}-\frac{d(u-u_e)^2}{\alpha(1+y_e)}$$

因为 $u\geqslant z$ ，所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 关于 (y_e,z_e,u_e)是负定的。因此系统(5)的平衡点 P'_e是全局渐近稳定的，即系统(4)的平衡点 P_e 是全局渐近稳定的。

参考文献:

[1] Hethcote H W. The Mathematics of Infectious Disease [J]. SIAM Review, 2000, 42(2): 599 - 653.
[2] Cappasso V. Mathematical Structures of Epidemic Systems [M]. Springer - Verlag: Heidelberg, 1993.
[3] 李建全, 杨友社. 一类带有确定隔离期的传染病模型的稳定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学学报), 2003, 4 (3):83 - 86.
[4] Busenberg S, Van Den Driessche P. Analysis of A Disease Transmission Model in A Population with Varying Size [J]. J Math Biol, 1990, 28(2): 257 - 270.
[5] Hethcote H W, Van Den Driessche P. Some Epidemiological Models with Nonlinear Incidence [J]. J Math Biol, 1991, 28 (2): 271 - 287.
[6] Liu Wei - min, Levin S A, Iwasa Yoh. Influence of Nonlinear Incidence Rates Upon The Behavior of SIRS Epidemiological Models [J]. J Math Biol, 1986, 23(1): 187 - 204.
[7] Liu Wei - min, Hethcote H W, Levin S A. Dynamical Behavior of Epidemiological Model with Nonlinear Incidence Rates [J]. J Math Biol, 1987, 25(2): 359 - 380.
[8] Ruan Shigui, Wang Wendi. Dynamical Behavior of An Epidemic Model with A Nonlinear Incidence Rate [J]. J Diff Equs, 2003, 188(1): 135 - 163.
[9] 李建全,杨友社. 一类成虫竞争模型的定性分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(2):87 - 90.
[10] 李建全,杨友社,杨国平. 一类 SIS 流行病传染模型的全局分析[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002,3(5):88 - 90.

(编辑:门向生)

Qualitative Analysis of Nonlinear Incidence Rate for Two Epidemic Models

LI Jian - quan[1], WANG La - di[2,3], YANG You - she[1]

(1. The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710077, China; 2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, China; 3. Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: Two epidemic models with nonlinear incidence rate are investigated in this paper, and the threshold of the existence of various equilibrium is found. By means of constructing Dulac function and Liapunov function, the necessary and sufficient conditions that guarantee the global asymptotic stability of disease - free equilibrium and endemic equilibrium are obtained.

Key words: epidemic model; threshold; equilibrium; stability