

# 基于线性预测的参数谱估计优化方法

王乐宁, 戴国宪, 刘 晖

(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

**摘 要:**基于观测数据特征结构的考虑,在针对性分析传统参数谱估计方法的基础上结合线性预测理论提出了参数模型反射系数估计的优化方法,以熵谱估计的形式对算法作了进一步研究,并通过仿真实验验证了优化算法的改善性能及工程可实现性。

**关键词:**参数谱估计;线性预测;熵谱估计;反射系数

**中图分类号:**TP16 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2004)01-0068-04

数字信号处理中的非参数直接谱估计方法通常是用相关函数估值的 FFT 变换作为功率谱密度的估计值。它的估计方差比较大,分辨率约等于观测数据长度的倒数。因此在短数据、低信噪比的情况下,相应算法的稳健性和分辨率都比较差。

对于实际待处理的信号而言,通常都具有随机特性,数字处理的量化过程也会引入随机噪声,因此,典型观测数据就是窄带过程中确定性信号与复噪声信号的叠加<sup>[1-2]</sup>。通过对比分析,我们认为采用基于线性预测理论的组合谱估计方法来改进算法对参数模型反射系数的估计,可以较好地解决微弱信号的检测问题,并且在短数据的情况下保持较好的分辨率和算法稳健性。

## 1 优化组合算法模型

### 1.1 自回归参数模型正则方程的建立

以观测数据的特征结构为着眼点,引入算法参数模型的选择,使模型适应于数据特征的分析要求。对于低分辨率的谱估计算法,估计方差较大的缺陷源于估计过程中隐含地采用了一个假设,即除了能得到的  $N$  个数据外,序列的其它值均被认为是 0,或等效地认为序列的相关函数值除了能估计出的有限个值以外,其它的值也当作 0 处理。实际的工程实现中其它数据并不可能完全为 0。因此,基于线性预测的理论,应当预测观测区间以外的数据,以填补出一个足够长度的数据时区。

首先建立自回归(AR)参数模型,模型的输出是现在的输入和过去  $p$  个输出的加权和。AR 参数模型可较好地反映出功率谱中的峰值,建立其正则方程,反映 AR 的模型参数  $a_k$  和  $x(n)$  的自相关函数的关系。以  $\sigma^2$  表示白噪声方差,考虑到自相关函数的偶对称性  $r_x(m) = r_x^*(m)$ ,有

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k r_x(m-k) & m \geq 1 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_x(k) + \sigma^2 & m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

AR 模型是在最小平方意义上对数据的拟合,即构造一个在线性预测理论基础之上的准则,而递推  $p$  阶 AR 模型的  $p+1$  个参数。利用  $x(n)$  在  $n$  时刻以前的  $p$  个数据  $\{x(n-p), x(n-p+1), \dots, x(n-1)\}$  来预测  $n$  时刻的  $x(n)$  值,则

收稿日期:2002-12-04

作者简介:王乐宁(1975-),男,甘肃兰州人,博士生,主要从事武器系统电子对抗、阵列信号处理、软件无线电研究;  
戴国宪(1938-),男,辽宁沈阳人,教授,博士生导师,主要从事电磁场与微波技术、武器系统电子对抗等研究。

$$\hat{x}(n) = - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \tag{2}$$

因此,总的预测误差功率为

$$\rho = E\{e^2(n)\} = E\{[x(n) + \sum_{k=1}^p a_k x(n-k)]^2\} \tag{3}$$

### 1.2 信息熵的引入

由此构造最大熵谱估计线性预测参数递推结构。

假定信源由集合  $X$  的  $m$  个事件组成,信源产生事件  $x_i$  的概率为  $P(x_i)$ ,定义整个信源  $m$  个事件的平均信息量为

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m P(x_i) \ln p(x) \tag{4}$$

若信源  $X$  是一个高斯随机过程,则其单个样本的熵正比于

$$H(x_i) \propto \int_{-\pi}^{\pi} \ln P_{MEM}(e^{j\omega}) d\omega = T(P) \tag{5}$$

利用 Lagrange 乘子法,在约束  $\int P_{MEM}(e^{j\omega}) d\omega = r_x(m)$  的条件下令  $T(P)$  最大,得到建立在自相关函数外推基础上的最大熵谱

$$P_{MEM}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma^2}{|1 + \sum a_k e^{j\omega k}|^2} \tag{6}$$

式中:  $m = 0, 1, \dots, p$ ;  $a_k$  是通过 Yule - Walker 方程导出的 AR 模型参数<sup>[3]</sup>。

### 1.3 系统前向、后向预测方程的建立

利用同一组数据同时实现前向、后向预测,分别以上标  $f$  和  $b$  表示其预测状态。得到

$$\hat{x}^f(n-p) = - \sum_{k=1}^p a^f(k) x(n-p+k), \quad \hat{x}^b(n-p) = - \sum_{k=1}^p a^b(k) x(n-p+k) \tag{7}$$

相应的预测误差为  $e(n-p) = x(n-p) - \hat{x}(n-p)$ , 预测误差功率  $\rho = E\{|e(n)|\}^2$ , 根据线性最小均方误差估计的正交原理,得到预测的 Wiener - Hopf 方程:

$$\rho_{min} = r_x(0) + \sum_{k=1}^p a(k)r_x(k), \quad r_x(m) = - \sum_{k=1}^p a(k)r_x(m-k) \tag{8}$$

继而导出前向、后向预测误差和反射系在不同阶次的递推关系

$$e_m^f(n) = e_{m-1}^f(n) + k_m e_{m-1}^f(n-1), \quad (e_m^b(n) = e_{m-1}^b(n-1) + k_m^* e_{m-1}^b(n)) \tag{9}$$

式中  $k_m$  为反射系数,又可以看作前向和后向预测误差之间的相关系数  $k_m = a_m(m)$ , 且

$$k_m = \frac{-\langle e_{m-1}^b(n-1), e_{m-1}^f(n) \rangle}{\|e_{m-1}^f(n)\| \cdot \|e_{m-1}^b(n-1)\|} = - \frac{\text{cov}(e_{m-1}^b(n-1), e_{m-1}^f(n))}{\sqrt{\text{var}(e_{m-1}^f(n))} \cdot \sqrt{\text{var}(e_{m-1}^b(n-1))}} \tag{10}$$

由上述不同阶次时的递推关系,即可导出线性预测的改进型 Lattice 网络结构,它比单纯的延迟线结构有较小的舍入误差,具有良好的性能。

## 2 优化算法分析与性能仿真

### 2.1 预测误差功率极小值

典型的 Burg 算法<sup>[4]</sup> 由于相邻阶 AR 参数之间的 Levinson 约束关系,只是对  $p_m = a_m(m)$  求前、后向预测误差功率的极小值,限制了算法的精度。而建立在数据基础上求解 AR 模型系数的熵谱估计算法可以大大提高分辨率。这里尝试取消上述限制,对所有  $a_k$  求解前、后向预测误差功率的极小值,并依据此数据求解 AR 模型参数的估值。令

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial a_k(m)} = 2 \sum_{i=1}^m a_i(m) \cdot r_n(k, i) \tag{11}$$

为新的约束条件,其中  $k = 1, 2, \dots, m$ , 且

$$r_m(k, i) = \sum_{n=0}^{N-m-1} [(x(n+m-1)x^*(n+m-k) + x(n+k)x^*(n+i))] \quad (12)$$

最小预测误差功率可以由下式求得

$$\rho_{\min} = \sum_{k=1}^{m+1} a_k(m) \cdot r_m(0, k) \quad (13)$$

预测误差功率取前向、后向两种情况之和,即  $\rho^b = 1/2(\rho^f + \rho^b)$ , 求和范围从  $p$  至  $N-1$ , 等效于  $e^f(n)$ 、 $e^b(n)$  前后都不加窗。

## 2.2 递推结构分析

当阶次  $m$  由 1 至  $p$  时,  $e^f(n)$ 、 $e^b(n)$  仍有前述递推关系。这样,  $\rho^b$  仅是反射系数  $k_m$  的函数<sup>[5]</sup>。在阶次  $m$  时, 令  $\rho_m^b$  相对  $k_m$  为最小, 即可估计出反射系数。此时得到的反射系数为

$$\hat{k}_m = \frac{-2 \sum_{n=m}^{N-1} e_{m-1}^f(n) \cdot e_{m-1}^{b*}(n-1)}{\sum_{n=m}^{N-1} |e_{m-1}^f(n)|^2 + \sum_{n=m}^{N-1} |e_{m-1}^b(n-1)|^2} \quad (14)$$

取模后, 反射系数  $|\hat{k}_m| < 1$ 。

以上均假定在第  $(m-1)$  阶时的模型参数已经求出, 因此在阶次  $m$  时的 AR 模型系数仍然可以由 Levinson 算法递推求出

$$\hat{a}_m(k) = \hat{a}_{m-1}(k) + \hat{k}_m \hat{a}_{m-1}(m-k), \quad \hat{\rho}_m = (1 - |\hat{k}_m|^2) \hat{\rho}_{m-1} \quad (15)$$

上述过程是建立在数据基础上的递推, 从而避开了估计自相关函数。定义式(14)的分母为  $Den_m$ , 则  $Den_m$  可以由  $Den_{m-1}$  和  $\hat{k}_{m-1}$  递推计算, 有效提高递推计算速度, 即

$$Den_m = [1 - |\hat{k}_m|^2] \cdot Den_{m-1} - |e_{m-1}^f(m)|^2 - |e_{m-1}^b(N-1)|^2 \quad (16)$$

## 2.3 仿真实验结果

为了检验功率谱优化算法的性能, 取两组窄带过程的试验数据作为比较基础。A 组为 32 点复序列, 归一化频率分别为  $f_1 = 0.27, f_2 = 0.31, f_3 = -0.32, f_4 = -0.17$ ; B 组为 128 点复序列, 由复数噪声加 5 个复正弦信号组成,  $f_1 = 0.15, f_2 = 0.16, f_3 = 0.242, f_4 = -0.28, f_5 = -0.39$ 。其中复噪声分别通过 10 阶的 FIR 系统, 不同频率点处对应不同的信噪比。A 组  $f_3, f_4$  的信噪比很小, 目的是检验算法对微弱信号的检测能力; B 组  $f_1$  和  $f_2$  靠得很近, 目的是检验算法的分辨能力, 仿真结果如图 1~4 所示。

可以看到, 利用优化算法求出的归一化自回归功率谱曲线具有良好的微弱信号检测能力和较高的频率分辨率。在阶次较低时对微弱信号的检测能力已经得到了改善, 当  $p = 20$  时已经可以分辨出较近的两个正弦信号; 阶数增加到  $N/2$  时分辨率已经相当好。值得注意的是算法中的高阶次估计产生了微小的谱线分裂和频率偏移现象, 这是递推过程中反射系数关于前向、后向预测误差本身的估计误差。我们将对其作自适应加权处理, 以进一步改善估计精度。由于建模时略去了滑动平均(MA)部分的存在, 因而噪声部分的谱线并不平滑, 这一点可以通过调整模型阶次而获得改善, 也可以选用最佳预测误差准则作优化。

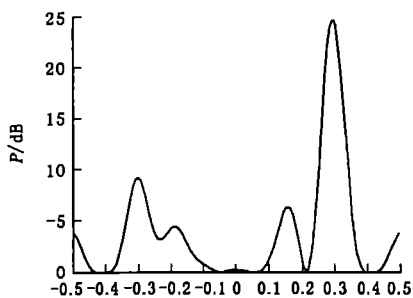


图1 A组数据低阶模型估计曲线

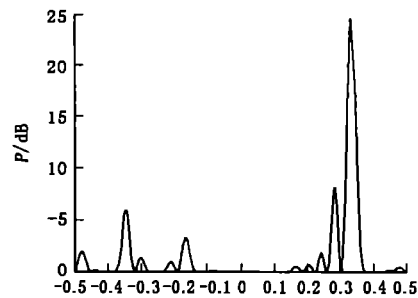


图2 A组数据高阶模型估计曲线

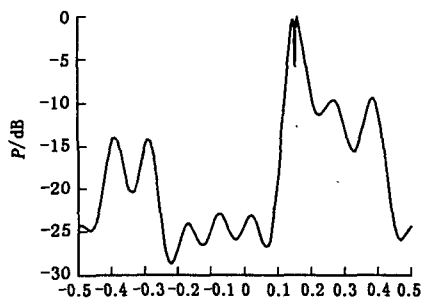


图3 B组数据低阶模型估计曲线

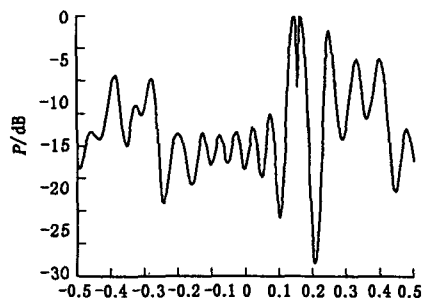


图4 B组数据高阶模型估计曲线

### 3 结束语

上述基于线性预测理论的回归熵谱估计优化方法采用了相关函数的最大熵延拓,不需要对数据加窗,因而使得谱分辨率大大提高,而且还较好地解决了谱旁瓣的干扰问题。在算法中,我们利用自相关阵的 *Toeplitz* 性质及相关递推方法,使谱分析的运算量大为减小,仿真实验结果表明,这种方法具有良好的谱估计性能。

#### 参考文献:

- [1] Kay S M. 现代谱估计原理与应用[M]. 北京: 科学出版社,1994.
- [2] 雷洪利. 不确定非线性系统变结构控制器设计[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2001,(4):76-80.
- [3] Papules A. Maximum Entropy and Spectral Estimation: a Review[J]. IEEE Trans, ASSP. 1991, ASSP-29(6):1176-1186.
- [4] Burg J P. Maximum Entropy Spectral analysis. [D]. Dep. Geophysics, Stanford, CA,1995.
- [5] Xu You, Xiao Xian-ci. A high performance spectral estimation method - the AMW algorithm[A]. Proc. IEEE ICASSP-87 [C]. 1997. 2093-2096.

(编辑:田新华)

## Research on Linear Prediction Based on Optimal Parametric Spectral Estimation

WANG Le-ning, DAI guo-xian, LIU Hui

(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan, Shaanxi 713800, China)

**Abstract:** In view of the feature structure of observed data, research is made to improve parametric spectral estimation. Based on linear prediction theory, an optimal method for reflection coefficient estimation is proposed and simultaneously the performance of the algorithm is also analyzed by adopting entropy spectral estimation. The above optimal algorithm is confirmed by computer simulation and has provided a feasible reference for engineering implementation.

**Key words:** parametric spectral estimation; linear prediction; entropy spectral estimation; reflection coefficient