随机模型参数不确定时结构失效概率的区间估计

郭书祥, 冯立富
(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘 要:在缺乏足够数据或信息不完整的情况下,给出失效概率的界限,比给出一确定的单值具有更高的可信度。本文用区间变量描述随机可靠性模型参数的不确定性,提出了考虑随机模型分布参数不确定性时,机械结构失效概率的区间估计方法。实际算例表明:结构的失效概率对随机模型参数的偏差非常敏感。说明在进行可靠性建模时,对模型的可靠性必须给予足够的重视。

关键词:随机模型;失效概率;区间变量,结构可靠性
中图分类号:TH122;TB114.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2003)02-0084-03

实际工业系统的分析和设计中,由于各种因素的影响,不确定性的存在是在所难免的。这就要求人们必须在不确定性存在的前提下进行分析和决策。能合理考虑各种不确定性的可靠性方法应运而生。传统的随机可靠性方法,是以概率论和随机过程为基础,用随机变量或随机过程描述不定参量的不确定性。所建立的是一种随机模型。随机可靠性理论已成功地应用于各种工业系统的可靠性评估,并成为工程中处理不确定性的重要工具和应用最为普遍的方法。近年来,一些学者对随机可靠性模型的应用和适用性提出不少质疑[1-3],并提出了一些非概率的可靠性方法[3-6],以及一些概率界限的估计方法[7-8]。矛盾的焦点主要在于随机模型的可靠性问题,即随机模型(包括分布型式及分布参数等)能否准确描述实际的工业系统。实际工程中,随机模型的分布参数是由随机试验结果进行统计推断而得出的。众所周知,这些参数与抽样母体及样本容量等密切相关,也与测试手段和对环境的模拟能力等有关,实际上也具有一定程度的不确定性。这一点已逐渐为人们所认识,而且,随机模型对模型参数非常敏感[2-3],随机模型的小误差可导致概率计算出现很大误差。因此,如何进行合理的随机可靠性建模,便显得十分重要。本文考虑随机模型参数的不确定性,提出了用区间变量描述模型参数的不确定性时,结构失效概率的区间估计方法。

1 分布参数为区间变量时失效概率的区间估计

结构的随机可靠性可由结构功能满足一定要求的概率来度量。结构的功能通常可由按失效准则确定的功能函数来表征。设 $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为结构的基本随机变量的集合。

$$M=g(x)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{1}$$

为由结构的失效准则确定的功能方程。失效面 $\{x|\ g(x)=0\}$ 将结构的基本参量空间分为失效域 $\Omega_f=\{x|\ g(x)<0\}$ 和安全域 $\Omega_s=\{x|\ g(x)>0\}$ 两部分。结构处于失效状态的概率可表示为

$$P_f=\int_{\Omega_f}\cdots\int f(x_1\cdots x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\cdots\mathrm{d}x_n \tag{2}$$

式中:$f(x_1\cdots\cdots x_n)$ 为随机变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的联合概率密度函数。式(2)通常很难直接求积分,一般可利用近似解析法(如FORM/SORM)或数值仿真法(如重要抽样法)等求解[9]。

随机可靠性模型中,随机变量的均值和标准差是最主要和最常用的两个决定性参数。假设各随机变量的均值和标准差均有一定的不确定性,且可用区间限界。由区间变量的一般表达式[6],将随机变量 x_i 的均值

收稿日期:2002-06-12
作者简介:郭书祥(1964-),男,陕西商州人,教授,博士,主要从事可靠性工程和优化设计研究.

$\tilde{\mu}_{xi}$和标准差$\tilde{\sigma}_{xi}$分别表示为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\mu}_{xi}&=\mu_i^c+\mu_i^r\delta_{\mu i}\\ \tilde{\sigma}_{xi}&=\sigma_i^c+\sigma_i^r\delta_{\sigma i}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中:μ_i^c、μ_i^r和σ_i^c、σ_i^r分别为$\tilde{\mu}_{xi}$、$\tilde{\sigma}_{xi}$的均值和离差。$\delta_{\mu i}$、$\delta_{\sigma i}\in[-1,1]$为标准化区间变量。由于随机模型参数为区间变量,因而,结构的失效概率亦为区间变量。其上、下边界可按如下方法求得。

1.1 一般情况

在结构可靠性分析中,结构的功能函数一般为各随机变量的单调函数。不妨设

$$\frac{\partial M}{\partial x_i}>0(i=1,2,\cdots,m),\frac{\partial M}{\partial x_j}<0(j=m+1,\cdots,n)\tag{4}$$

则在可靠性计算中,令式(3)中的

$$\delta_{\mu i}=-1(i=1,2,\cdots,m),\delta_{\mu j}=1(j=m+1,\cdots,n),\delta_{\sigma k}=1(k=1,\cdots,n)\tag{5}$$

代入可靠性计算模型,可求得失效概率的上界P_f^u。再令

$$\delta_{\mu i}=1(i=1,2,\cdots,m),\delta_{\mu j}=-1(j=m+1,\cdots,n),\delta_{\sigma k}=1(k=1,\cdots,n)\tag{6}$$

代入可靠性计算模型,可求得失效概率的下界P_f^l。从而可得失效概率的可能范围$P_f\in[P_f^l,P_f^u]$。按照这里的符号规则进行参数转换后,失效概率可按常规的一般方法求解。

1.2 双变量情况

在机械结构和零部件的可靠性设计中,由失效准则确定的功能方程通常可表为

$$M=g(R,S)=R-S=0\tag{7}$$

式中:R和S分别表示结构或元件的广义强度和广义应力,可为其它基本变量的函数。由传统的随机可靠性方法,在R和S服从正态分布时,对应的可靠性指标为

$$\beta=\frac{\bar{R}-\bar{S}}{\sigma_R^2+\sigma_S^2}\tag{8}$$

当$\bar{R}$、$\bar{S}$、σ_R、σ_S等参量的不确定性可用区间限界时,将其表示为式(9),代入式(8)可得式(10)。

$$\left.\begin{aligned}\bar{R}&=\bar{R}^c+\bar{R}^r\delta_R\\ \bar{S}&=\bar{S}^c+\bar{S}^r\delta_S\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}\sigma_R&=\sigma_R^c+\sigma_R^r\delta_{\sigma R}\\ \sigma_S&=\sigma_S^c+\sigma_S^r\delta_{\sigma S}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$\tilde{\beta}=\frac{\bar{R}-\bar{S}+(\bar{R}^r\delta_R-\bar{S}^r\delta_S)}{\sqrt{(\sigma_R^c+\sigma_R^r\delta_{\sigma R})^2+(\sigma_S^c+\sigma_S^r\delta_{\sigma S})^2}}\tag{10}$$

根据式(5)、(6)的符号规则,可得可靠性指标$\tilde{\beta}$的上、下边界分别为

$$\beta^u=\frac{\bar{R}^c-\bar{S}^c+\bar{R}^r+\bar{S}^r}{\sqrt{(\sigma_R^c-\sigma_R^r)^2+(\sigma_S^c-\sigma_S^r)^2}}=\frac{\bar{R}^u-\bar{S}^l}{\sqrt{(\sigma_R^l)^2+(\sigma_S^l)^2}}\tag{11}$$

$$\beta^l=\frac{\bar{R}^c-\bar{S}^c-\bar{R}^r-\bar{S}^r}{\sqrt{(\sigma_R^c+\sigma_R^r)^2+(\sigma_S^c+\sigma_S^r)^2}}=\frac{\bar{R}^l-\bar{S}^u}{\sqrt{(\sigma_R^u)^2+(\sigma_S^u)^2}}\tag{12}$$

这里的上标u和l分别表示相应参量的上、下边界。从而可求得失效概率$\tilde{P}_f\in[P_f^l,P_f^u]=[\Phi(-\beta^u),\Phi(-\beta^l)]$。式中:$\Phi(\cdot)$为标准正态概率分布函数。

2 算例分析

已知某机械零件的广义强度R和所承受的广义应力S均服从正态分布。强度均值 的名义值为580 MPa,且有最大偏差17.2 MPa;其标准差σ_R的名义值为44.8 MPa,有最大偏差1.34 MPa;应力均值$\bar{S}$的名义值为360 MPa,最大偏差为10.8 MPa;其标准差σ_S的名义值为30.6 MPa,最大偏差为0.92 MPa。由该零件的失效准则可建立形如式(7)的功能方程。由于R、S均服从正态分布,将有关数据代入式(8)~(12),可求得其可靠性指标的名义值及上、下界限分别为$\beta^c=4.0551$, $\beta^u=4.7123$, $\beta^l=3.4360$。对应的失效概率分别为$P_f^c=2.506\times10^{-5}$, $P_f^l=1.225\times10^{-6}$,$P_f^u=2.952\times10^{-4}$。易得$P_f^u/P_f^c=11.78$,$P_f^u/P_f^l=241.03$。

由以上计算结果可看出,随机模型分布参数的偏差对计算的失效概率的影响很大。该算例中,失效概率的最大值是名义值的11.78倍,是最小值的241.03倍。而实际上,随机参量的偏差均不超过名义值的3%。一般,失效概率的计算偏差随模型参数偏差的增大而增大,也随结构本身可靠度的增大而增大。对可靠性要

求较高的零部件的设计,当分布参数不确定时,应以式(12)所示联结方程作为可靠性设计的依据。

3 结论

本文用区间变量描述随机模型参数的不确定性,提出了考虑概率分布参数不确定性时,结构失效概率的区间估计方法。实际算例表明:结构的失效概率对随机可靠性模型参数的偏差非常敏感。尤其是当结构的可靠性较高时,模型参数的小偏差可导致计算的失效概率出现很大偏差。因此,在进行可靠性建模时,对模型的可靠性必须给予足够的重视。在实际工程中,因为实际问题的复杂性,不确定性存在于物理和数学建模的各个方面和各个环节。很多情况下,对很多事物,要用一精确值描述系统的性能或行为较为困难。但若退一步,用一范围或区间来描述则要容易得多。而且,在缺乏足够数据或信息不完整的情况下,给出失效概率的界限或区间,比给出一确定的单值具有更高的可信度,也更有意义。因此,本文方法有一定的实用价值。

参考文献:

[1] Ben - Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics [M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1990.

[2] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling [J]. Computers & Structures, 1995,56(6):871 - 895.

[3] Ben - Haim Y. A non - probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994,14(4):227 - 245.

[4] Ben - Haim Y. Robust Reliability in the Mechanical Sciences [M]. Berlin: Springer - Verlag, 1996.

[5] 郭书祥,吕震宙,冯元生. 机械静强度可靠性设计的非概率方法[J]. 机械科学与技术,2000,19(S):106 - 107.

[6] 郭书祥,吕震宙,冯元生. 基于区间分析的结构非概率可靠性模型[J]. 计算力学学报,2001,18(1):56 - 60.

[7] Cui W, Blockley D I. On the bounds for structural system reliability [J]. Structural Safety, 1991, 9(4):247 - 259.

[8] Sarveswaran V, Smith J W, Blockley D I. Reliability of corrosion - damaged steel structures using interval probability theory [J]. Structural Safety, 1998, 20(3): 237 - 255.

[9] 郭书祥,冯元生,吕震宙。随机有限元方法和结构可靠性[J]. 力学进展,2000,30(3):343 - 350.

[10] 郭书祥,冯立富. 概率可靠性模型的可靠性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2000,1(5):72 - 74.

(编辑:姚树峰)

Interval Estimation of Failure Probability of Structures In Uncertain Parameters of Stochastic Model

GUO Shu - xiang, FENG Li - fu

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: Uncertainties present everywhere in the physical and mathematical models. In most cases, it is difficult to describe the performance of systems using a precisely single number. But it is easy to describe the condition by using a range or an interval to represent it. In the reliability computation, when insufficient accurate data are available or the information is incomplete, a range representation of probability of failure may be more confident than the representation by a single number. In this paper, uncertainties of the parameters of stochastic model of reliability are described by intervals. A procedure is presented for the interval estimation of failure probability of mechanical structures when the distribution parameters are uncertain. It is shown by a numerical example that the probability of failure may be very sensitive to the possible errors of stochastic model. So enough attention must be paid to the reliability of stochastic modeling.

Key words: stochastic model; probability of failure; interval variable, structural reliability