一类成虫竞争模型的定性分析

李建全， 杨友社
(空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安 710077)

摘 要:对一类成虫竞争模型进行分析,得到了该模型在时滞 τ 充分小时解的有界性,以及各类平衡点存在的充要条件,并通过构造 Liapunov 泛函得到了平衡点局部稳定的充分条件和吸引域。

关键词:平衡点;稳定性;吸引域;时滞
中图分类号:O175.12 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2002)02-0087-04

时滞是自然界中广泛存在的一种客观现象。时滞的引入常常所建立的数学模型更符合实际。文献[1]中指出,若某种群的幼虫需要经过 τ 时刻才能成长为成虫,并且每个成虫的生育率为 $B(N(t))$($N(t)$ 为 t 时刻该种群的成虫总数),每个幼虫的死亡率为 d,则 t 时刻幼虫总数 $E(t)$ 为

$$E(t)=\int_{t-\tau}^{t}B(N(s))N(s)e^{-d(t-s)}\mathrm{d}s,\text{即}$$

$$E'(t)=B(N(t))N(t)-B(N(t-\tau))N(t-\tau)e^{-d\tau}-dE(t)$$

也就是在 t 时刻由幼虫转化为成虫的速率为 $B(N(t-\tau))N(t-\tau)e^{-d\tau}$。

考虑甲乙两种群成虫间的竞争模型。假设甲乙两种群的幼虫成熟期均为 τ,记甲(乙)种群中每个成虫的生育率为 $b_1(b_2)$,每个幼虫的死亡率为 $d_1(d_2)$,每个成虫的死亡率为 $d_3(d_4)$,种内作用系数为 $d_5(d_6)$。假设乙种群对甲种群、甲种群对乙种群的作用系数分别为 μ_1、μ_2。以上各参数均为正的。如果记甲乙两种群在 t 时刻的成虫总数分别为 $x=x(t)$、$y=y(t)$,则可得到带有成熟期的两种群成虫竞争模型为

$$\begin{cases}x'=b_1e^{-d_1\tau}x(t-\tau)-d_3x-d_5x^2-\mu_1xy\\ y'=b_2e^{-d_2\tau}y(t-\tau)-d_4y-d_6x^2-\mu_2xy\end{cases}\tag{1}$$

并带有初始条件 $x(t)=\phi_1(t)\in C([-\tau,0],R^+),y(t)=\phi_2(t)\in C([-\tau,0],R^+)$ (2)

在该模型中总假设 $b_1>d_3,b_2>d_4$,否则,即使没有竞争,种群也会灭绝。

1 解的性态

易知,在初始条件(2)下系统(1)的解保持是正的。事实上,如果存在时刻 t_0 使 $x(t)(y(t))$ 首次为零,则有 $x'(t_0)\leqslant 0(y'(t_0)\leqslant 0)$。而 $x(t)(y(t))$ 在区间 $[-\tau,t_0-\tau]$ 上为正的,所以这是不可能的。

定理1 当时滞参数 τ 充分小时,系统(1)在初始条件(2)下的解是有界的,即存在 $M>0$,使得 $x(t)<M,y(t)<M$。

证明 (以下仅证明 $x(t)<M$,同理可证 $y(t)<M$)

假设 $x(t)$ 无界,则任意给定 $M>0$,存在 $t_0>0$ 使得 $x(t_0)>M$,且 $x'(t_0)>0$,由系统(1)有

$$x'(t_0)<b_1e^{-d_1\tau}x(t_0-\tau)-d_3x(t_0)-d_5x^2(t_0)=$$

$$x(t_0)\left[b_1e^{-d_1\tau}\frac{x(t_0-\tau)}{x(t_0)}-d_3-d_5x(t_0)\right]$$

因为 $\lim\limits_{\tau\to 0}\left[e^{-d_1\tau}\frac{x(t_0-\tau)}{x(t_0)}\right]=1$,所以当 M 充分大,τ 充分小时必有 $x'(t_0)<0$. 故出现矛盾。

收稿日期:2001-09-10
作者简介:李建全(1965-),男,山西万荣人,副教授,博士生,主要从事微分方程定性理论及其应用研究.

2 平衡点的存在性

记 $\varphi_1(\tau)=b_1e^{-d_1\tau}-d_3,\varphi_2(\tau)=b_2e^{-d_2\tau}-d_4$. 容易得出下列结论:

对于系统(1),平衡点 $P_0(0,0)$ 始终存在;当 $0<\tau<(1/d_2)\ln(b_2/d_4)$ 即 $\varphi_2(\tau)>0$ 时,平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6$ 存在;当 $0<\tau<(1/d_1)\ln(b_1/d_3)$ 即 $\varphi_1(\tau)>0$ 时,平衡点 $P_2(\varphi_1(\tau)/d_5,0)$ 存在;当 τ 满足条件:1) $\varphi_1(\tau)>0,\varphi_2(\tau)>0$; 2) $\frac{\mu_1}{d_6}<\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi_2(\tau)}<\frac{d_5}{\mu_2}$ 或 $\frac{d_5}{\mu_2}<\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi_2(\tau)}<\frac{\mu_1}{d_6}$,时,正平衡点 $P_3(x^*,y^*)$ 存在,且 $x^*=\frac{\varphi_1d_6-\varphi_2\mu_1}{d_5d_6-\mu_1\mu_2},y^*=\frac{\varphi_2d_5-\varphi_1\mu_2}{d_5d_6-\mu_1\mu_2}$。

3 平衡点的局部稳定性及其吸引域

首先对系统(1)进行变量代换,分别使各平衡点均移至原点。对于平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6)$,令 $y=u+\varphi_2(\tau)/d_6$,则系统(1)变为

$$\begin{cases}x'=b_1e^{-d_1\tau}x(t-\tau)-(d_3+\mu_1\varphi_2(\tau)/d_6)x-(d_5x+\mu_1u)x\\ u'=b_2e^{-d_2\tau}u(t-\tau)-(\mu_2\varphi_2(\tau)/d_6)x-(2b_2e^{-d_2\tau}-d_4)\mu-(d_6u+\mu_2x)u\end{cases}\tag{3}$$

对于平衡点 $P_2(\varphi_1(\tau)/d_5,0)$,令 $x=u+\varphi_1(\tau)/d_5$,则系统(1)变为

$$\begin{cases}u'=b_1e^{-d_1\tau}u(t-\tau)-(2b_1e^{-d_1\tau}-d_3)u-(\mu_1\varphi_1(\tau)/d_5)y-(d_5u+\mu_1y)u\\ y'=b_2e^{-d_2\tau}y(t-\tau)-(d_4+\mu_2\varphi_1(\tau)/d_5)y-(\mu_2u+d_6y)y\end{cases}\tag{4}$$

对于平衡点 $P_3(x^*,y^*)$,令 $x=u+x^*,y=v+y^*$,则系统(1)变为

$$\begin{cases}u'=b_1e^{-d_1\tau}u(t-\tau)-(b_1e^{-d_1\tau}+d_5x^*)u-\mu_1x^*v-(d_5u+\mu_1v)u\\ v'=b_2e^{-d_2\tau}v(t-\tau)-\mu_2y^*u-(b_2e^{-d_2\tau}+d_6y^*)v-(\mu_2u+d_6v)v\end{cases}\tag{5}$$

引理 1 $\frac{d}{dt}[\int_{t-\tau}^{t}ds\int_{s}^{t}\varphi(\theta)d\theta]=\tau\varphi(t)-\int_{t-\tau}^{t}\varphi(\theta)d\theta$

引理 2 设 $F(u,v)=P(u,v)+Q(u,v)$。如果 $P(u,v)$ 为负定二次型,且 $\lim\limits_{\substack{u\to0\\v\to0}}\frac{Q(u,v)}{P(u,v)}=0$,则存在原点的某个邻域,使 $F(u,v)$ 在其内为负定的。

3.1 讨论平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6)$

为了使表达形式简单,记 $a_1=b_1e^{-d_1\tau},a_2=d_3+\mu\varphi_2(\tau)/d_6,a_3=d_3,a_4=\mu_1,c_1=b_2e^{-d_2\tau},c_2=\mu_2\varphi_2(\tau)/d_6,c_3=2b_2e^{-d_2\tau}-d_4,c_4=\mu_2,c_5=d_6$,则系统(3)即为

$$\begin{cases}x'=a_1x(t-\tau)-a_2x-(a_3x+a_4u)x,\\ u'=c_1u(t-\tau)-c_2x-c_2x-c_3u-(c_4x+c_5u)u\end{cases}\tag{6}$$

定理 2 记 $A_1=\alpha_1(a_2-a_1),A_2=\alpha_1a_1(2a_1+2a_2+1)+\alpha_2c_1c_2,B_1=\alpha_2(c_3-c_1),B_2=\alpha_2c_1(2c_1+c_2+2c_3+1)$。其中正数 α_1,α_2 满足 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>\frac{c_2{}^2}{4(a_2-a_1)(c_3-c_1)}$。当 $\frac{b_1-d_3}{b_2-d_4}<\frac{\mu_1}{d_6}$ 且 $\varphi_2(\tau)>0,\varphi_1(\tau)/\varphi_2(\tau)<\mu_1/d_6$, $\tau<[A_2B_1+A_1B_2-\sqrt{(A_2B_1-A_1B_2)^2+A_2B_2\alpha_2{}^2c_2{}^2}]/A_2B_2,\tau<2A_1/A_2,\tau<2B_1/B_2$ 时,系统(6)的平衡点(0,0)是局部渐近稳定的,即系统(1)平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6)$ 是局部渐近稳定的。

证明 记 $\psi_1(\theta)=\alpha_1x^2(\theta-\tau)+a_2x^2(\theta)+[a_3x(\theta)+a_4u(\theta)]^2x^2(\theta)$

$\psi_2(\theta)=c_1u^2(\theta-\tau)+c_2x^2(\theta)+c_3u^2(\theta)+[c_4x(\theta)+c_5u(\theta)]^2u^2(\theta)$

取 $V_2=\frac{\alpha_1x^2+\alpha_2u^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}ds\int_{s}^{t}[\alpha_1a_1\psi_1(\theta)+\alpha_2c_1\psi_2(\theta)]d\theta+\frac{\tau}{2}\int_{t-\tau}^{t}[\alpha_1a_1{}^2x^2(\theta)+\alpha_2c_1{}^2u^2(\theta)]d\theta$, 并利用不等式 $ab\leqslant(a^2+b^2)/2$ 和引理 1,可得

$$V|_{(6)} \leqslant -(A_1-\frac{\tau}{2}A_2)x^2-(B_1-\frac{\tau}{2}B_2)u^2-\alpha_2c_2ux-[\alpha_1x^2(a_3x+a_4u)+\alpha_2u^2(c_4x+c_5u)]+\tau[\alpha_1a_1(a_3x+a_4u)^2x^2+\alpha_2c_1(c_4x+c_5u)^2u^2]/2$$

当满足 $\tau<2A_1/A_2$，$\tau<2B_1/B_2$，$\tau<[A_2B_1+A_1B_2-\sqrt{(A_2B_1-A_1B_2)^2+A_2B_2\alpha_2^2c_2^2}]/(A_2B_2)$ 时，$-(A_1-\tau A_2/2)x^2-(B_1-\tau B_2/2)u^2-\alpha_2c_2ux$ 为负定的，则由引理2知 $V|_{(6)}$ 在原点的某个邻域内为负定的，所以根据文献[3]定理3.3成立。

注:1)定理2的条件可行性说明。A_1、A_2、B_1、B_2、α_1、α_2 均可能与 τ 有关。因为 $b_2>d_4$、$\frac{b_1-d_3}{b_2-d_4}<\frac{\mu_1}{d_6}$，根据 $\varphi_1(\tau)$、$\varphi_2(\tau)$ 对 τ 的连续性，存在充分小的 τ，使 $\varphi_2(\tau)>0$、$\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi_2(\tau)}<\frac{\mu_1}{d_6}$。根据假设当 $\tau=0$ 时有 $c_2>0$、$a_2-a_1>0$、$c_3-c_1>0$，所以对充分小的 τ，存在 α_1、$\alpha_2(\alpha_1(0)>0,\alpha_2(0)>0)$ 满足 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>\frac{c_2^{\ 2}}{4(a_2-a_1)(c_3-c_1)}$。因此，当 $\tau=0$ 时，$A_1>0$、$A_2>0$、$B_1>0$、$B_2>0$，所以满足 $\tau<2A_1/A_2$、$\tau<2B_1/B_2$ 的充分小 τ 是存在的，因此存在充分小的 τ 值，使定理2的条件满足。

2)　记

$$G_1(x,y)=-(A_1-\frac{\tau}{2}A_2)x^2-(B_1-\frac{\tau}{2}B_2)(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6})^2-\alpha_2c_2x(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6})+\frac{\tau}{2}[\alpha_1a_1(a_3x+a_4(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6}))^2x^2+\alpha_2c_1(c_4x+c_5(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6}))^2(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6})^2]-[\alpha_1x^2(a_3x+a_4(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6}))+\alpha_2(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6})^2(c_4x+c_5(y-\frac{\varphi_2(\tau)}{d_6}))]$$

在定理2的条件下，依证明过程知由满足 $G_1(x,y)<0$ 且 $x>0$、$y>0$ 的点以及平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6)$ 所组成的区域即是平衡点 $P_1(0,\varphi_2(\tau)/d_6$ 的一个吸引域。

3.2　讨论平衡点 $P_2(\varphi_1(\tau)/d_5,0)$

记　$a_1=b_1e^{-d_1\tau}$，$a_2=2b_1e^{-d_1\tau}-d_3$，$a_3=\mu_1\varphi_1(\tau)/d_5$，$a_4=d_5$，$a_5=\mu_1$，$c_1=b_2e^{-d_1\tau}$，$c_2=d_4+\mu_2\varphi_1(\tau)/d_5$，$c_3=\mu_2$，$c_4=d_6$。则系统(4)变为

$$\begin{cases}u'=a_1u(t-\tau)-a_2u-a_3y-(a_4u+a_5y)u\\ y'=c_1y(t-\tau)-c_2y-(c_3u+c_4y)y\end{cases}\tag{7}$$

类似于定理2的证明，我们有

定理3　记 $A_1=\alpha_3(a_2-a_1)$，$A_2=\alpha_3a_1(2a_1+2a_2+a_3+1)$，$B_1=\alpha_4(c_2-c_1)$，$B_2=\alpha_4c_1(2c_1+2c_2+1)+\alpha_3a_1a_3$，其中正数 α_3、α_4 满足 $\alpha_4/\alpha_3>a_3^2/[4(c_2-c_1)(a_2-a_1)]$。当 $(b_1-d_3)/(b_2-d_4)>d_5/\mu_2$ 且 $\varphi_1(\tau)>0$、$\varphi_1(\tau)/\varphi_2(\tau)>d_5/\mu_2$、$\tau<[A_2B_1+A_1B_2-\sqrt{(A_2B_1-A_1B_2)^2+A_2B_2\alpha_2^2c_2^2}]/A_2B_2$、$\tau<2A_1/A_2$、$\tau<2B_1/B_2$ 时，系统(7)的平衡点(0,0)是局部渐近稳定的，即系统(1)平衡点 $P_2(\varphi_1(\tau)/d_5,0)$ 是局部渐近稳定的。

记

$$G_2(x,y)=-(A_1-\frac{\tau}{2}A_2)(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})^2-(B_1-\frac{\tau}{2}B_2)y^2-\alpha_3a_3y(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})+\frac{\tau}{2}[\alpha_3a_1(a_4(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})+a_2y)^2(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})^2+\alpha_4c_1(c_3(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})+c_4y)^2y^2]-[\alpha_3(a_4(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})+a_5y)(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})^2+\alpha_4(c_3(x-\frac{\varphi_1(\tau)}{d_5})+c_4y)y^2]$$

在定理3的条件下，由满足 $G_2(x,y)<0$ 且 $x>0$、$y>0$ 的点及平衡点所组成的区域是平衡点 $P_2(\varphi_1(\tau)/d_5,0)$ 的一个吸引域。

3.3　讨论正平衡点 $P_3(x^*,y^*)$

为了讨论正平衡点 $P(x^*,y^*)$ 方便，记 $a_1=b_1e^{-d_1\tau}$，$a_2=b_1e^{-d_1\tau}+d_5x^*$，$a_3=\mu_1x^*$，$a_4=d_5$，$a_5=\mu_1$，$c_1=b_2e^{-d_2\tau}$，$c_2=\mu_2y^*$，$c_3=b_2e^{-d_2\tau}+d_6y^*$，$c_4=\mu_2$，$c_5=d_6$。则系统(5)即为

$$\begin{cases}u'=a_1u(t-\tau)-a_2u-a_3v-(a_4u+a_5v)u\\ v'=c_1v(t-\tau)-c_2u-c_3v-(c_4u+c_5v)v\end{cases}\tag{8}$$

已知 $a_2>a_1$，$c_3>c_1$，容易看出，若 $c_2a_3-(a_2-c_1)(c_3-c_1)<0$ 即 $\mu_1\mu_2<d_5d_6$，则系统(8)在 $\tau=0$ 时零点是局部渐近稳定的[2,4]。

类似于定理 3 的证明,我们有

定理 4 记 $A_1=a_2-a_1$, $A_2=[a_1(2a_1+2a_2+a_3+1)+c_1a_3]/2$, $B_1=c_3-c_1$, $B_2=[c_1(2c_1+c_2+2c_3+1)+a_1c_2]/2$。当 $\varphi_1(\tau)>0$、$\varphi_2(\tau)>0$、$\mu_1/d_6<\varphi_1(\tau)/\varphi_2(\tau)<d_5/\mu_2$、$A_1-A_2\tau>0$、$B_1-B_2\tau>0$、$(A_1-A_2\tau)(B_1-B_2\tau)-c_2a_3>0$ 时,系统(8)的平衡点(0,0)是局部渐近稳定的,即系统(1)正平衡点 $P_3(x^*,y^*)$ 是局部渐近稳定的。

记
$$G_3(x,y)=-c_2(A_1-\tau A_2)(x-x^*)^2-a_3(B_1-\tau B_2)(y-y^*)^2-2c_2a_3(x-x^*)(y-y^*)-[c_2(a_4(x-x^*)+a_5(y-y^*))(x-x^*)^2+a_3(c_4(x-x^*)+c_5(y-y^*))(y-y^*)^2]+\tau[a_1c_2(a_4(x-x^*)+a_5(y-y^*))^2(x-x^*)^2+a_3c_1(c_4(x-x^*)+c_5(y-y^*))^2(y-y^*)^2]/2$$

在定理 4 的条件下,由满足 $G_3(x,y)<0$ 且 $x>0$、$y>0$ 的点以及平衡点 $P_3(x^*,y^*)$ 组成的区域是平衡点 $P_3(x^*,y^*)$ 的一个吸引域。

4 后记

本文通过构造 Liapunov 泛函得到了系统各平衡点局部稳定的充分条件,即各参数和时滞 τ 所满足的条件以及相应的吸引域。当各参数确定时,用其条件可估计 τ 的取值范围。如果只需考虑系统各平衡点的局部稳定性,则仅考虑系统(3)、(4)、(5)相应的线性系统即可。这时所构造的 Liapunov 泛函比较简单,估计 τ 的取值范围也容易些,但得不到系统各平衡点的吸引域。

参考文献:

[1] Cooke K L, van den P Driessche, Zou X. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models [J]. J Math Biol, 1999, 39(2): 332-352.

[2] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥:安徽教育出版社, 1996.

[3] Kuang Yang. Delay differential equations and with application dynamic [M]. Boston: Academic Press Inc., 1993.

[4] 李建全,王国正. 一类平面微分系统的极限环的不存在性[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2001, 2(2): 78-81.

(编辑:门向生)

Qualitative Analysis of a Type of Competitive Model of Adult Population

LI Jian-quan, YANG You-she

(The Telecommunication Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: In this paper, by analyzing the competitive model of adult population, the solution boundedness of the model at time delay and the sufficient conditions of the existence of its various equilibrium points are obtained. Simultaneously the sufficient conditions and attractive regions of local steady of the equilibrium points are obtained by constructing Liapunov functional.

Keywords: equilibrium point; stability; attractive regions; delay