# 一种新的非线性方程求根迭代法

高虹霓，　曹泽阳
（空军工程大学 导弹学院，陕西 三原　713800）

**摘　要**:提出了一个新的迭代公式,用此公式求解非线性方程根收敛速度快,且绝对收敛。此方法是用数值计算求解代数方程的比较有效的方法之一,具有一定的理论价值和应用价值。

**关键词**:非线性方程 ;迭代法;数值计算
**中图分类号**:O241　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2002)02-0084-03

## 1　非线性方程求根常用迭代法

迭代法是计算方法中的一种基本方法。非线性方程求根常用的迭代法主要有简单迭代法、牛顿迭代法和弦割法。

将方程$f(x)=0$化为一个同解的方程

$$x=q(x)$$

给定一个初值$x_0$,代入右端可算得一个$x_1=q(x_0)$,再将$x_1$代入右端,又可得$x_2=q(x_1)$,……,如此继续下去,会得到一个序列$\{x_k\}$,其中

$$x_{k+1}=q(x_k),\qquad k=0,1,2,\cdots\cdots$$

$\{x_k\}$称为迭代序列,$q(x)$称为迭代函数[1]。上面的公式称为迭代格式。可以证明,只要迭代序列收敛,一般总收敛于原方程的解。实际计算时,当迭代到一定程度,就取$x_{k+1}$作为原方程根的近似值。这种求根法称简单迭代法。牛顿迭代法就是为了保证迭代序列收敛,将$f(x)$在方程$f(x)=0$的近似根$x_k$处作泰勒展开,取前两项近似代替$f(x)$,用近似方程来代替原方程求解迭代函数即可。弦割法是用方程$f(x)=0$的近似根$x_k,x_{k-1}$对应的函数值作线性插值多项式代替$f(x)$,从而由近似方程求得迭代函数。下面介绍一种新的求根迭代法。

## 2　新的求根迭代法

### 2.1　迭代公式推导及其几何解释

设方程$f(x)=0$在$x_0$附近有一个根,将其化为同解方程$x=q(x)$。令$y_1=x$, $y_2=q(x)$,则$f(x)=0$的根即为两条线的交点,如图1中$k$点的$x$坐标$x^*$。为了求得$k$点,作法如下:首先由$x_0$找到$q(x)$曲线上的$A_0$点,过$A_0$点做$q(x)$曲线的切线,交直线$y_1$于$B_0$点,其横坐标为$x_1$;然后过$B_0$点做$x$轴的平行线,得三角形$C_0B_0A_0$,于是有:

$$y_1(x_1)-q(x_0)=(x_1-x_0)\cdot q'(x_0)\qquad(1)$$

由于$y_1(x_1)=x_1$,将式(1)展开整理得:

$$x_1=\frac{q(x_0)-q(x_0)\cdot x_0}{1-q\,x_0}$$

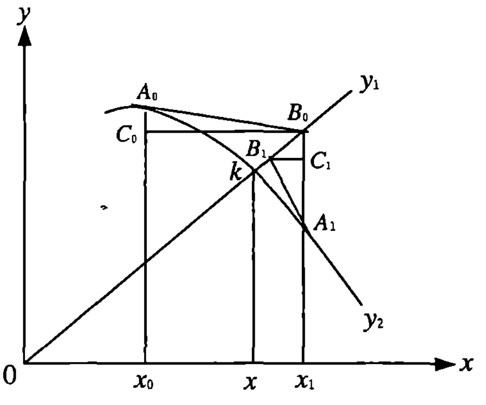


图1　新迭代法几何意义

**收稿日期**:2001-01-01
**作者简介**:高虹霓(1966-),女,陕西宝鸡人,讲师,硕士,主要从事管理科学与工程研究.

再由 $x_1$ 得 $q(x)$ 曲线上的 $A_1$ 点,过 $A_1$ 做 $q(x)$ 曲线的切线交 $y_1$ 于 $B_1$ 点;过 $B_1$ 做 $x$ 轴的平行线,得到三角形 $C_1B_1A_1$,与前类似得:

$$x_2 = \frac{q(x_1) - q'(x_1) \cdot x_1}{1 - q' x_1}$$

重复如上步骤,可得迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{q(x_k) - q'(x_k) \cdot x_k}{1 - q' x_k} \tag{2}$$

用式(2)一直迭代下去,直到某一个 $x_{k+1}$ 使得 $q(x_{k+1})$ 与 $y_1$ 的交点以一定的精度与 $q(x)$ 与 $y_1$ 的交点相重合,此时的 $x_{k+1}$ 即为方程 $f(x)=0$ 的根。

**2.2　收敛性及误差分析**

2.2.1　收敛性分析

简单迭代法的迭代函数为 $q(x)$,而新的迭代法是以 $[q(x) - q'(x)x]/[1 - q'(x)]$ 代替了 $q(x)$。令

$$Q(x) = \frac{q(x) - q'(x) \cdot x}{1 - q'(x)}$$

右端对 $x$ 求导数

$$Q'(x) = \frac{[q'(x) - q''(x)x - q'(x)] \cdot [1 - q'(x)] - [q(x) - q'(x)x] \cdot [-q''(x)]}{[1 - q'(x)]^2}$$

展开并化简得

$$Q'(x) = \frac{q''(x)[q(x) - x]}{[1 - q'(x)]^2}$$

由文献[2][3][4][5],当 $|Q'(x)| < 1$ 时,迭代是收敛的。在 $x = x^*$ 时,$q(x^*) = x$,则 $Q'(x^*) = 0$。这说明,迭代公式(2)收敛。

2.2.2　误差分析

令 $e_k = |x^* - x_k|$,将 $Q(x)$ 在 $x^*$ 附近展开,对于 $Q(x_k)$ 有

$$Q(x_k) = Q(x^*) + Q'(x^*)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}Q''(x^*)(x^* - x_k)^2 + \cdots\cdots$$

忽略二阶以上小量并考虑 $Q'(x^*) = 0$,便得

$$Q(x_k) = Q(x^*) = \frac{1}{2}Q''(x^*)(x^* - x_k)^2 = \frac{1}{2}Q''(x^*)e_k^2$$

亦即

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}Q''(x^*)e_k^2$$

$$e_{k+1} = \left|\frac{1}{2}Q''(x^*)\right|e_k^2$$

可见,此迭代法的误差 $e_{k+1}$ 与 $e_k$ 的平方成正比,说明新的迭代法具有平方收敛性。

## 3　算例与分析

下面用新的迭代法求解方程 $x = e^{-x}$ 在 $x = 0.5$ 附近的根,取精度 $\varepsilon = 10^{-2}$。

解:显然令 $q(x) = e^{-x}$ 为方便,将其代入迭代公式(2)得

$$x = \frac{e^{-x} + e^{-x} \cdot x}{1 + e^{-x}}$$

记录迭代结果如表 1 所示。

从表 1 可见,若要达到 $\varepsilon = 10^{-2}$,只迭代两次即可满足精度要求[6]。而用简单迭代法求解同一方程的根,要达到所要求的精度,迭代次数不少于 10 次,迭代结果如表 2 所示。

**表 1　新迭代法迭代结果**

| $k$ | $x_k$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.5 | |
| 1 | 0.566 31 | 0.066 31 |
| 2 | 0.567 13 | 0.000 82 |
| 3 | 0.567 14 | 0.000 1 |
| 4 | 0.567 14 | 0 |

表 2 简单迭代法迭代结果

| $K$ | $x_k$ | $x_k - x_{k-1}$ | $K$ | $x_k$ | $x_k - x_{k-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | | 6 | 0.564 86 | -0.006 31 |
| 1 | 0.606 53 | 0.106 53 | 7 | 0.568 44 | 0.003 58 |
| 2 | 0.545 24 | -0.061 29 | 8 | 0.566 41 | -0.002 03 |
| 3 | 0.579 70 | 0.034 46 | 9 | 0.567 56 | 0.001 15 |
| 4 | 0.560 06 | -0.019 64 | 10 | 0.566 91 | -0.000 65 |
| 5 | 0.571 17 | 0.011 11 | … | … | … |

由表 1、表 2 对比可以看出,新的迭代法比简单迭代法的收敛速度快很多,具有明显的优越性。

**参考文献:**

[1] 邓建中,葛仁杰,程正光. 计算方法[M]. 西安:西安交通大学出版社,1998.
[2] 孙永生. 函数逼近论[M]. 北京:北京师范大学出版社,1990.
[3] 徐士英. Banach 空间中的非线性逼近理论[M]. 北京:科学出版社,1997.
[4] 熊振翔. 插值多项式与插值样条[M]. 北京:国防工业出版社,1995.
[5] 陈翰馥. 随机逼近[M]. 上海:上海科学技术出版社,1996.
[6] 上海计算技术研究所. 电子计算机算法手册[M]. 上海:上海教育出版社,1985.

(编辑:田新华)

## A New Iterative Method for Solving Nonlinear Equation

GAO Hong - ni, CAO Ze - yang
(The Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)

**Abstract**: This paper presents a new iterative formula by which the solution of nonlinear equation had rapid and absolute convergence. This new method is of considerable value in theory and application and also is one of the effective techniques for solving algebraic equation by numerical calculation.

**Keywords**: nonlinear equation; iterative method; numerical calculation