基于反馈控制理论的模糊控制数学模型

姚　群[1]，夏清国[2]，高德远[2]
(1. 空军工程大学 电讯工程学院，陕西 西安　710077;2. 西北工业大学 计算机科学系，陕西 西安　710072)

摘　要:模糊数学和模糊理论描述了比精确数学更为广泛的世界。在基于反馈的控制理论和技术应用领域中,许多控制对象和过程借助于模糊数学,可以将“模糊”和“精确”相互转换,使得系统内部是模糊的,而其输入和输出则是精确的,文中给出恒温控制的模糊控制数学模型。

关键词:模糊关系;模糊变换;模糊控制

中图分类号:O141.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1009-3516(2001)06-0030-04

数学历来以其精确性著称于世,然而作为人类认识世界的产物,数学也是对客观世界的反映。事实上,在我们的世界中,精确只是事物的一种特性。而模糊才是充满世界的事物的普遍性质[1]。

传统数学在表示和处理精确的数量关系和空间关系方面表现得非常出色。数学家们用不多的几个数学符号建立起一座座金碧辉煌的数学殿堂,使很多追随者流连忘返。概率论和统计学的出现和发展给人们提供了一种表示和处理世界的一种不确定性——随机性的有力工具。然而,这些数学工具在描绘另一种不确定性——模糊性时却难以直接发挥作用。模糊数学及其与各种传统数学的融合必将使人类对世界的认识达到一个新的高度。

虽然随机性和模糊性都表示事物的不确定性,但是二者有着质的不同。随机性所描述的事件或现象本身的含义是清楚而明确的,可以判断该事件在某特定时刻和特定条件下发生了还是没有发生。而模糊性所描述的现象或概念本身是模糊不清的。一个具体对象是否符合一个模糊概念是不能明确判定的。

由于随机性和模糊性的区别,表示随机性和模糊性的方法也不相同。随机性在概率论中用[0,1]间的一个数来度量,所有可能的互斥事件的概率总和为1。而模糊性虽然也能用[0,1]间的一个数来表示,但是这个数只表明该事件或现象在多大程度上具有这种模糊的属性。如要判断白纸上某些位置是否已被墨迹污染或未被污染,则可用[0,1]间的一个数表示一个位置在墨迹中的可能性。被描述对象的可能性的总和可以不是1。因此模糊性使用可能性来度量的,而不是用概率来度量的。

模糊理论描述了比精确数学更为广泛的世界,包含了精确数学的领域[2]。因此,当所描述的事物或现象退化为精确时,模糊的理论或方法必须与精确的理论和方法相一致。

1　模糊关系模糊变换

1.1　模糊关系的定义

定义:设 $X_1,X_2\cdots,X_N$ 是 N 个论域,定义在 $U=X_1\times X_2\times\cdots\times X_N$(或称定义在 $X_1,X_2,\cdots,X_N$)上的模糊集称为 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 间的 N 元模糊关系。记为

$\boldsymbol{R}:X_1\times X_2\times\cdots\times X_N\rightarrow[0,1]$

其隶属函数极为:$\mu_R(x_1,x_2\cdots,x_N)$,$x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots,x_n\in X_N$

$N+1$ 元组$(x_1,x_2\cdots,x_N)$称为模糊关系 $\boldsymbol{R}$ 中的一个模糊元组。$\mu_R(x_1,x_2\cdots,x_N)$称为该元组的隶属度。把定义在 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_N$ 上的所有模糊关系的全体记为 $F(X_1\times X_2\times\cdots\times X_N)$。

显然,二元模糊关系 $\boldsymbol{R}:X_1\times X_2\rightarrow[0,1]$和普通二元关系一样,也可以表示为矩阵形式。由此可以看出,

收稿日期:2001-05-11

作者简介:姚　群(1961-),女,陕西西安人,讲师,主要从事计算机网络安全、多媒体远程教育研究.

模糊关系是比一般集合论中的关系更为广泛的关系。

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 几种模糊关系

1)自反:设论域X,$\boldsymbol{R}$为定义在$X\times X$上的模糊关系,$\mu_R(x,y)$为隶属函数,$x\in X,y\in X$。若对$\forall x\in X$有$\mu_R=(x,x)=1$则$\boldsymbol{R}$是自反的。

2)对称:设$X\times X$上的模糊关系为$\boldsymbol{R}$,$\mu_R(x,y)$为隶属函数,$x\in X,y\in X$。若对$\forall x\in X$,$\forall y\in X$有$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$,则称$\boldsymbol{R}$是对称的。

3)传递:设$X\times X$上的模糊关系为$\boldsymbol{R}$,$\mu_R(x,y)$为隶属函数,$x\in X,y\in X$。若$\boldsymbol{R}$的λ-截关系$R_\lambda=\{(x,y)\mid\mu_R(x,y)\geqslant\lambda,(x,y)\in X\times X\}$对每一$\lambda\in[0,1]$都是传递的关系,则称$\boldsymbol{R}$是传递的。

4)模糊相似关系:若$X\times X$上的模糊关系$\boldsymbol{R}$:$\mu_R(x,y)$满足

①自反性:对$\forall x\in X$有$\mu_R(x,x)=1$

②对称性:对$\forall x,y\in X$有$\mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)$,则称R是一个模糊相似关系。

5)模糊等价关系:设$X\times X$上的模糊关系$\boldsymbol{R}$:$\mu_R(x,y)$满足自反性、对称性和传递性,则称$\boldsymbol{R}$是一个模糊等价关系。

这里传递性是指:对$\forall\lambda\in[0,1]$,$x\in X,y\in X,z\in X$都可由$\mu_R(x,y)\geqslant\lambda$和$\mu_R(y,z)\geqslant\lambda$推得$\mu_R(x,z)\geqslant\lambda$

1.3 模糊变换

设模糊关系$\boldsymbol{R}\in F(X,Y)$的隶属函数为$\mu_R(x,y)$,模糊集$\boldsymbol{A}\in F(X)$的隶属函数为$\mu_{\underset{x\in X}{A}}(x)$,若$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}$,且$\boldsymbol{B}$的隶属函数$\mu_B(y)=\vee(\mu_A(x)\wedge\mu_R(x,y))$

则称这是由模糊关系$\boldsymbol{R}$导出的一个模糊变换。它将定义在X上的模糊集$\boldsymbol{A}$变换成定义在Y上的模糊集$\boldsymbol{B}$。

当$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$时,$\boldsymbol{R}$可用一个模糊矩阵表示,$\boldsymbol{A}$可用一个模糊向量表示:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \qquad 0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$$

$$\boldsymbol{A}(a_1,a_2,\cdots,a_m),0\leqslant a_i\leqslant 1$$

于是$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{R}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,其中

$$b_j=\bigvee_{i=1}^{m}(a_i\wedge r_{ij}),j=1,2,..n$$

这里$\vee$和$\wedge$可以为任意一对对偶的并运算与交运算。例如$\vee=\max$,$\wedge=\min$。

2 模糊控制原理和模糊控制实例

基于反馈的控制理论和技术已被广泛应用到人们生产、生活的各个领域。但是由于世界的复杂性,许多控制对象和过程无法建立严格的数学模型。因此,模糊控制的出现是必然的。

模糊控制最早由Mamdani在70年代提出的。其具有以下特点:

1)被控对象的行为不需要严格的数学模型描述。控制指标和控制参数可以是模糊量。

2)控制方法以模糊数学为基础,采用模糊语言表示控制功能。从而使之直观易懂,便于控制知识的获取和表示。

3)为了与精确控制技术相配合,可以将“模糊”和“精确”相互转换,使得系统内部是模糊的,而输入输出则是精确的。

2.1 模糊控制原理

设 U 为论域，$x \in F(U)$ 为一个被控对象的输出。$x_0 \in F(U)$ 为控制指标。模糊控制问题实际上就是涉及一个依赖于模糊语言量的动作函数

$F(\delta)$:[模糊语言量]→动作

使得当被控对象的输出 x 与控制指标 x_0 的偏差为 $\delta = x - x_0$ 时，动作 $F(\delta)$ 将 $x - x_0$ 越来越小。这里，偏差 δ 时用模糊语言量“很大”、“较大”、“不大”、“不小”、“较小”、“很小”之类的模糊语言描述的。

模糊控制的核心是模糊控制与推理块，这有很多种方法实现，如利用模糊变换就可以实现之。这可以用一个模糊变换表示一条模糊规则，在输入和控制动作之间用一个变换关系 $\boldsymbol{R}$ 表示。若输入为 X，输出动作为 $\boldsymbol{A}$，则一条模糊规则可表示为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{R}$。如果 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的论域有限，则 $\boldsymbol{R}$ 可用矩阵表示。

2.2 模糊控制实例

恒温箱的恒温控制中，被控对象的输出是箱仓中的温度 t，控制指标是 t_0。由于温度计的读数是近似的，因此温度用模糊数表示，故 $\delta = t - t_0$，也是一个模糊数。定义 δ 为论域 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

上的模糊数。并把偏差分为 5 档：

1)负偏大：$\{1/-3,\ 0.5/-2,\ 0/-1,\ 0/0,\ 0/1,\ 0/2,\ 0/3\}$

2)负偏小：$\{0/-3,\ 0.5/-2,\ 1/-1,\ 0.5/0,\ 0/1,\ 0/2,\ 0/3\}$

3)无偏　：$\{0/-3,\ 0/-2,\ 0.5/-1,\ 1/0,\ 0.5/1,\ 0/2,\ 0/3\}$

4)正偏小：$\{0/-3,\ 0/-2,\ 0/-1,\ 0.5/0,\ 1/1,\ 0.5/2,\ 0/3\}$

5)正偏大：$\{0/-3,\ 0/-2,\ 0/-1,\ 0/0,\ 0/1,\ 0.5/2,\ 1/3\}$

分别用 5 档操作进行控制：加大热，加小热，关机器，制小冷，制大冷。这 5 种控制由定义在论域

$V = \{-40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40\}$

上的模糊数表示，V 中的元素表示每分钟的加热或制冷量(卡)，正值表示加热，负值表示制冷。

1)加大热：

$\{0/-40, 0/-30, 0/-20, 0/-10, 0/0, 0/10, 0/20, 0.5/30, 1/40\}$

2)加小热：$\{0/-40, 0/-30, 0/-20, 0/-10, 0/0, 0.5/10, 1/20, 0.5/30, 0/40\}$

3)关机器：

$\{0/-40, 0/-30, 0/-20, 0.5/-10, 1/0, 0.5/10, 0/20, 0/30, 0/40\}$

4)制小冷：$\{0/40, 0.5/-30, 1/-20, 0.5/-10, 0/0, 0/10, 0/20, 0/30, 0/40\}$

5)制大冷：

$\{1/-40, 0.5/-30, 0/-20, 0/-10, 0/0, 0/10, 0/20, 0/30, 0/40\}$

恒温箱温控的 5 条模糊规则为：

1)“负偏大”→“加大热”

2)“负偏小”→“加小热”

3)“无　偏”→“关机器”

4)“正偏小”→“制小冷”

5)“正偏大”→“制大冷”

显然，这 5 条规则可以表示为模糊关系

$\boldsymbol{R}$ = (负偏大 × 加大热) U (负偏小 × 加小热) U (无偏 × 关机器) U (正偏小 × 制小冷) U(正偏大 × 制大冷)

采用不同的蕴含算子可以得到不同的蕴含关系 $\boldsymbol{R}$。如 $a \to b$ 采用蕴含算子 $\min(a, b)$，则可求出蕴含关系矩阵 $\boldsymbol{R}$ ·

$$\text{负偏大} \times \text{加大热} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{负偏小} \times \text{加小热} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{无偏}\times\text{关机器}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0.5&0.5&0.5&0&0&0\\0&0&0&0.5&1&0.5&0&0&0\\0&0&0&0.5&0.5&0.5&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \text{正偏小}\times\text{制小冷}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0.5&0.5&0.5&0&0&0&0&0\\0&0.5&1&0.5&0&0&0&0&0\\0&0.5&0.5&0.5&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\text{正偏大}\times\text{制大冷}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0.5&0.5&0&0&0&0&0&0&0\\1&0.5&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0.5&1\\0&0&0&0&0&0.5&0.5&0.5&0.5\\0&0&0&0.5&0.5&0.5&1&0.5&0\\0&0.5&0.5&0.5&1&0.5&0.5&0.5&0\\0&0.5&1&0.5&0.5&0.5&0&0&0\\0.5&0.5&0.5&0.5&0&0&0&0&0\\1&0.5&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

显然,有了矩阵 $\boldsymbol{R}$,也就有了对恒温箱进行控制的依据。实际上,正如前面所述,对温度的控制过程就是使用变换矩阵 $\boldsymbol{R}$ 对当前系统状态进行控制的过程。

模糊数学是一门新兴学科,尚处在发展之中。其虽然仍不完善,但已在许多应用领域中表现出强大的生命力。随着研究的深入和广泛的应用,模糊数学必将成为数学宝库中耀眼夺目的一颗璀璨明星,为人类的发展做出巨大的贡献。

参考文献:

[1] 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术[M]. 北京:国防工业出版社,1998.
[2] 路耀华. 思维模拟与知识工程[M]. 北京:清华大学出版社,1997.

An Ambiguity Control Mathematical Model Based on the Theory of Feedback Control

YAO qun[1], XIA Qing - guo[2], GAO De - yuan[2]
(1. Dept. of Computer Science, Northwestem Polytechnical University, Xi'an, 710077; 2. The Telecommunication Engineering Institute of the Air Force Engineering University, Xi'an, 710072, China)

Abstract: Fuzzy mathematics and fuzzy theory present more extensive field than precise mathematics does. In application based on the theory and technique of feedback control, with fuzzy mathematics, many control subjects and processes can inter - exchange fuzziness with preciseison. As result, the inside of system is fuzzy, and its inputs and outputs are precise. This paper gave a kind of fuzzy control mathematical model about temperature invariableness.

Key words: fuzzy relation; fuzzy conversion; fuzzy control