

对平面激波的数值研究

张建邦, 王旭

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

摘要:从数学分析的角度,定量地研究造成平面激波脱体的物理条件。将来流 Mach 数 M_1 、壁面转折角 δ 以及激波角 β 所满足的函数关系式转换为代数方程,建立完整的平面激波激波角的数值计算方法,给出激波前后气流物理量的变化关系。

关键词:超音速流;平面激波;代数方程;数值求解

中图分类号: O335 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-3516(2001)04-89-91

超音速流在尖楔物体表面所形成的平面激波是一种最主要的激波形式,它的强弱以及所形成的激波角完全由来流 Mach 数和壁面转折角所确定,其关系为^[1]

$$\tan \delta = \cotan \beta \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{1 + M_1^2 (\Gamma - \sin^2 \beta)}, \quad \Gamma = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (1)$$

式中 γ 为气体绝能指数(对于空气 $\gamma = 1.4$), δ 为壁面转折角, β 为激波面与来流方向的夹角,简称激波角。

由于激波前后气流物理量的变化主要由来流 Mach 数 M_1 和激波角 β 所确定,而 β 又由 M_1 和壁面转折角 δ 所确定。要确定激波前后气流物理量的变化,必须从式(1)由 M_1 和 δ 确定出 β 。但从式(1)可以看出, β 无法以 M_1 和 δ 的显式表示。因此,对于给定的 M_1 和 δ ,必须通过数值方法确定相应的 β 。本文依据严格的数学方法,给出由式(1)确定 β 的具体数学过程,从而从量化的角度,揭示出平面激波的本质,进而给出激波前后气流物理量的变化关系。

1 造成激波脱体的物理条件

当壁面转折角 δ 大于来流 M_1 所能转折的最大角度时,便会造成激波脱体而形成脱体激波,这时式(1)便失去了意义。因此,应首先由式(1)确定在给定 M_1 下壁面的最大转折角 δ_{\max} 以及在给定 δ 下的最小来流 Mach 数 $M_{1\min}$ 。

壁面最大转折角 δ_{\max} 在式(1)两边对 β 求导,并令 $\frac{d\delta}{d\beta} = 0$, 使得

$$\gamma M_1^4 \sin^4 \beta + (2M_1^2 - \Gamma M_1^4) \sin^2 \beta - (1 + \Gamma M_1^2) = 0 \quad (2)$$

记 $x = \sin^2 \beta$, $a = \gamma M_1^4$, $b = 2M_1^2 - \Gamma M_1^4$, $c = -(1 + \Gamma M_1^2)$, 则式(2)为一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

求解并去掉负根和大于1的正根,设其根为 x_1, x_2 。再将 $\beta_i = \arcsin \sqrt{x_i}$ ($i = 1, 2$) 代入式(1),通过比较,即可求得相应于给定 M_1 的 $\delta_{\max}(M_1)$ 。

在式(1)两边对 M_1 求导,通过化简,即可得到

$$\frac{d\delta}{dM_1} = \frac{2\Gamma M_1 \cos^2 \delta \cotan \beta}{[1 + M_1^2 (\Gamma - \sin^2 \beta)]^2} \geq 0 \quad (4)$$

所以, δ 是 M_1 的增函数。在式(2)中令 $M_1 \rightarrow \infty$, 得到

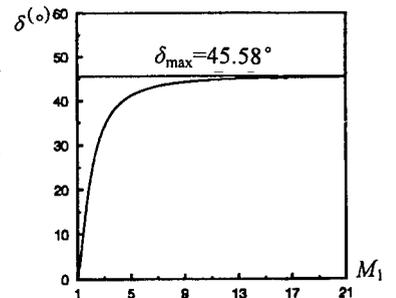


图1 不同 M_1 所对应的最大壁面转折角 δ_{\max}

$$\gamma \sin^4 \beta - \Gamma \sin^2 \beta = 0 \quad (5)$$

解得 $\beta = \arcsin \sqrt{\Gamma/\gamma}|_{\gamma=1.4} = 67.79^\circ$, 从而由式(1)

$$\delta_{\max}(\infty) = \arctan \frac{\sin \beta \cos \beta}{\Gamma - \sin^2 \beta} \Big|_{\beta=67.79^\circ} = 45.58^\circ \quad (6)$$

上述推导表明,对于给定的来流 M_1 ,当 $\delta \geq \delta_{\max}(M_1)$ 时,便会产生脱体激波,而当 $\delta \geq 45.58^\circ$ 时,无论 M_1 有多大,都必然产生脱体激波。 $\delta_{\max}(M_1)$ 的变化曲线如图 1 所示。

最小来流 Mach 数 M_{\min} 为表述简便,令 $\tan \delta = A, M_1^2 = M$,则由式(1)得到

$$M = \frac{A + \cotan \beta}{A \sin^2 \beta + \cotan \beta \sin^2 \beta - A\Gamma} \quad (7)$$

在式(7)中对 β 求导,并令 $\frac{dM}{d\beta} = 0$,得到

$$2A\Gamma - 2A \sin^2 2\beta - (1 + A^2) \sin 2\beta = (1 - A^2) \sin 2\beta \cos 2\beta \quad (8)$$

两边平方并整理化简,得到

$$(1 + A^2)^2 \sin^4 2\beta + 4A(1 + A^2) \sin^3 2\beta + 4A^2(1 - 2\Gamma) \sin^2 2\beta - 4A\Gamma(1 + A^2) \sin 2\beta + 4A^2\Gamma^2 = 0 \quad (9)$$

记 $x = \sin 2\beta, a = (1 + A^2)^2, b = 4A(1 + A^2), c = 4A^2(1 - 2\Gamma), d = -4A\Gamma(1 + A^2), e = 4A^2\Gamma^2$ 。显然,对于任何 $0 \leq \delta \leq \delta_{\max}$,有 $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0, e > 0$ 。故由笛卡尔符号法则^[2],代数方程

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (10)$$

有 2 个正根且满足 $x_i \leq 1 + \min\{|b/a|, |c/a|, |d/a|\}, (i=1,2)$ 。将 $0 \leq x_i \leq 1$ 的正根代入

$$\beta_{i1} = \frac{1}{2} \arcsin x_i, \quad \beta_{i2} = \frac{1}{2} (\pi - \arcsin x_i), (i=1,2) \quad (11)$$

再由式(8)剔除掉增根,通过式(7)进行比较,得到对应于给定 δ 的最小来流 Mach 数 M_{\min} ,如图 2(a) 所示,当 $\delta = 25^\circ$ 时, $M_{\min} = 2.125$ 。在壁面转折角一定的情况下,只要 $M_1 < M_{\min}$,便会产生脱体激波。

2 计算 Mach 角 β

对式(1)两边平方,并在

$$\tan^2 \delta = \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin^2 \beta} \frac{M_1^4 \sin^4 \beta - 2M_1^2 \sin^2 \beta + 1}{1 + 2M_1^2(\Gamma - \sin^2 \beta) + M_1^4(\Gamma - \sin^2 \beta)^2}$$

中,记 $x = \sin^2 \beta, A = \tan^2 \delta, M = M_1^2$,得到

$$(1 + A)M^2 x^3 - (2AM + 2AM^2\Gamma + M^2 + 2M)x^2 + (A + 2AM\Gamma + AM^2\Gamma^2 + 2M + 1)x - 1 = 0 \quad (12)$$

进一步记 $a = (1 + A)M^2, b = -(2AM + 2AM^2\Gamma + M^2 + 2M), c = A + 2AM\Gamma + AM^2\Gamma^2 + 2M + 1, d = -1$,将式(12)表示为

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (13)$$

显然,对于任何 $0 \leq \delta \leq \delta_{\max}$,有 $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$ 。由笛卡尔符号法则,方程(13)有 3 个正根 x_i ,满足 $x_i \leq 1 + \min\{|b/a|, |c/a|\}, (i=1,2,3)$ 。由 $x_i \leq 1$ 的正根得到 $\beta_i = \arcsin \sqrt{x_i}$,再代入式(1),剔除掉增根,最后得到对应于 M_1 的 2 个激波角

$$\beta_i = \arcsin \sqrt{x_i}, (i=1,2) \quad (14)$$

3 数值方法与计算结果

对于三阶与四阶代数方程 $f(x) = 0$,采用数值方法进行求解。

在数值方法中,先根据代数方程根的个数采用逐步扫描法对根区间进行分离,即按给定的整数 n ,对根区间 $(0, x_R)$ 进行 $2^{i-1}n (i=1,2,\dots)$ 等分,得到分点 $0 \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2^n-1} \equiv x_R$,其中 x_R 为根区间的右端点。扫描每一子区间 (x_{k-1}, x_k) ,检验 $f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) < 0$ 的个数。直至 $f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) < 0$ 的子区间 $(x_{k-1},$

x_k) 的个数等于方程根的个数。然后,在每一选定的根子区间上,采用 Brent 方法求出代数方程相应的根^[2]。

对于给定的 $0 < \delta < 45.58^\circ$, β 的求解过程为:建立代数方程式(10),根据上述方法得到最小来流 Mach 数 $M_{1\min}$,然后判定来流 Mach 数 M_1 是否构成脱体激波;当 $M_1 > M_{1\min}$ 时,再建立代数方程(13)并求解,即可得到相应的两个激波角。图 2(a) 给出了 $1 \leq M_1 \leq 5$ 上对应于 $\delta = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 40^\circ$ 的计算结果。其中实线对应于弱激波,虚线对应于强激波, $\delta = 0^\circ$ 对应于 Mach 角 $\beta = \arcsin \frac{1}{M_1}$ 。当 $\delta = 45^\circ$ 时, $M_{1\min} = 14.10$, 图 2(a) 中不再给出相应的激波曲线。

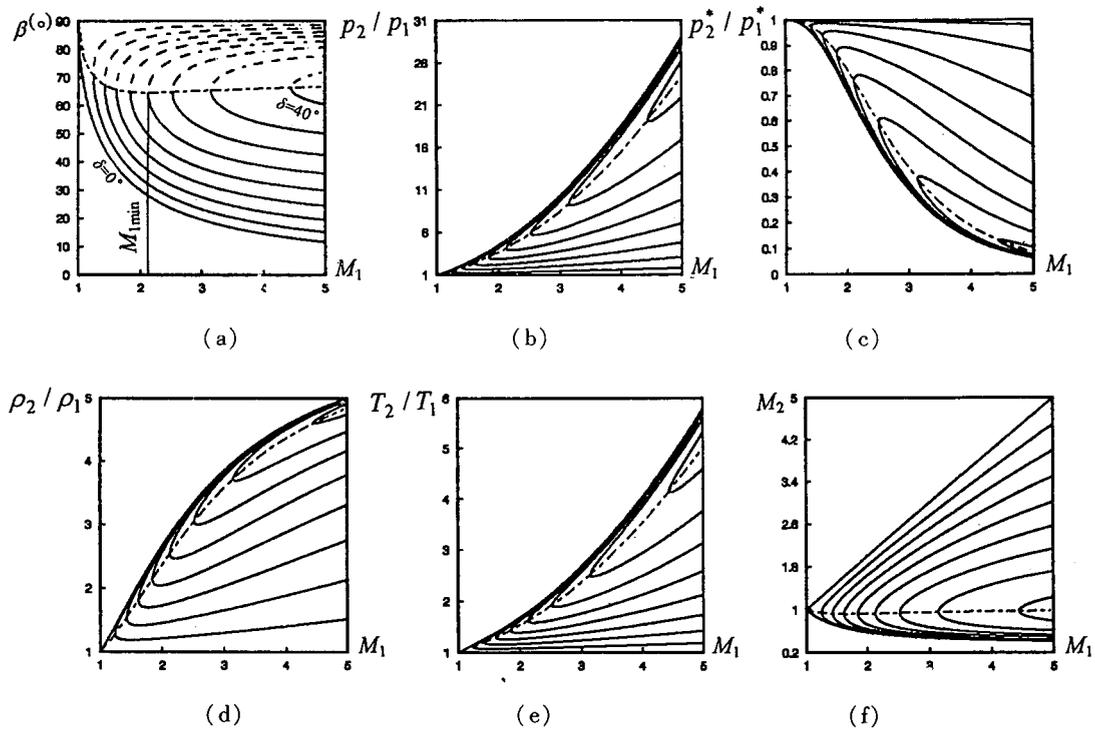


图 2 激波前后气流物理量的变化关系

求出 β 角后,激波前后气流物理量的变化关系便很容易确定^[3]。对应于图 2(a) 中不同的 δ , 图 2(b) ~ 图 2(f) 分别给出了激波前后气流压力、总压、密度、温度以及相应的气流 Mach 数 M_2 随 M_1 的变化关系,其中下标 1 表示波前物理量,下标 2 表示波后物理量。

参考文献:

[1] 陈廷楠,王平军. 应用流体力学[M]. 北京:航空工业出版社,2000.
 [2] Forsythe G. 计算机数值计算方法[M]. 计九三. 北京:清华大学出版社,1987.
 [3] 潘锦珊. 气体动力学基础[M]. 北京:国防工业出版社,1989.

The Numerical Study on Planar Shock Waves

ZHANG Jian-bang, WANG Xu

(The Engineering Institute of the Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: From the point of mathematical analysis, it quantitatively studies the physical conditions of forming a separated shock wave. Through translation of the function of source flow Mach number, deflection angle of passage and angle of shock wave into algebraic equation, it formulates an integrated numerical calculation method for the shock wave angles, and then plots the relation curves of physical variables between front and behind of shock waves.

Key words: supersonic flow; planar shock wave; algebraic equation; numerical calculation