

# 不确定非线性系统变结构控制器设计

雷洪利, 张殿治, 刘文华

(空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:**传统的控制方法大多需要知道被控对象的数学模型,而许多复杂的实际系统,其准确的数学模型往往不易得到,或者难以求解。采用自适应滑模变结构控制方法,对形如  $x^{(n)} = f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t)$  的非线性系统进行跟踪控制,其中  $f(\underline{x}, t)$  和  $g(\underline{x}, t)$  为未知非线性函数,且其边界未知,  $d(t)$  为未知有界扰动,为减少对被控制对象信息的依赖性,没有利用专家知识,也没有利用被控对象的历史运行数据,通过利用基函数类神经网络动态逼近函数  $f(\underline{x}, t)$  和  $g(\underline{x}, t)$ ,对自适应调整控制系统输入,得出基于 RBF 网络的滑模变结构自适应控制方案,经过理论分析,证明了控制方案的稳定性。仿真结果表明了该方案的可行性的实用性。

**关键词:**非线性系统;基函数类神经网络;动态逼近;滑模变结构控制;鲁棒性;全局稳定性

**中图分类号:**N945.13 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2000)04-0076-04

最近几年,有许多诸如采用模糊逻辑系统,神经网络的自适应控制方案<sup>[1~3]</sup>,取得了很好的控制效果。文献[3]利用模糊系统逼近未知函数,需要预先知道未知函数精确的边界,这在许多实际系统中难以做到,有一定的局限性。为减少对被控对象信息的依赖性,本文利用神经网络设计控制器,对具有不确定性的复杂非线性系统进行控制,不需要知道被控对象的数学模型和控制边界,通过仿真,表明该控制方案具有很强的鲁棒性和实用性。最后,对设计方案进行了泛化。

## 1 滑模变结构控制

讨论如下非线性被控对象:  $x^{(n)} = f(x, x, \dots, x^{(n-1)}, t) + g(x, x, \dots, x^{(n-1)}, t)u + d(t)$

$$y = x \tag{1}$$

其中函数  $f(\underline{x}, t), g(\underline{x}, t)$  为未知界连续函数,式(1)的可控条件是对可控区域  $U \subset R^n$  内的  $\underline{x}$ ,有  $g(\underline{x}, t) \neq 0$  成立,不失一般性,对  $\underline{x} \in U$ ,设  $g(\underline{x}, t) > 0, d(t)$  是未知外界扰动且假定有上界  $D$ ,即  $|d(t)| \leq D, u$  和  $y$  分别表示系统的输入和输出,系统的状态矢量可测,为

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (x, x, \dots, x^{(n-1)})^T \in R^n \tag{2}$$

设期望状态为  $x_d(t)$ ,则该控制问题即状态  $\underline{x}$  对期望状态的跟踪,定义跟踪误差

$$\underline{e} = \underline{x}(t) - x_d(t) = (e, e, \dots, e^{(n-1)})^T \tag{3}$$

采用滑模控制,可定义滑动线方程  $s(\underline{e}) = \underline{c}\underline{e} = 0$

$\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, 1], c_i \in R$ ,且特征方程  $h(p) = p^n + c_{n-1}p^{n-1} + \dots + c_1$  的根均位于左半开平面内,  $p$  是

laplace 算子。应满足广义滑模存在条件:  $s \frac{ds}{dt} \leq 0$  不妨设  $s \operatorname{sgn}(s) \leq -\eta \quad \eta \in R, \eta \geq 0$  (5)

由式(4)可得

$$\begin{aligned} s &= c_1 \dot{e} + c_2 \ddot{e} + \dots + c_{n-1} e^{(n-1)} + e^{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + x^{(n)} - x_d^{(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) - x_d^{(n)} \end{aligned} \tag{6}$$

则有: 
$$\text{sgn}(s) \left[ \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + f(\underline{x}, t) + g(\underline{x}, t)u + d(t) - \dot{x}_d^{(n)} \right] \leq -\eta \tag{7}$$

若  $f(\underline{x}, t), g(\underline{x}, t)$  已知, 则正确的滑模控制 (SMC) 可以很容易地进行如下设计:

$$\left. \begin{aligned} S > 0, u_c &\leq g^{-1}(\underline{x}, t) \left( - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - d(t) - \eta \right) \\ S < 0, u_c &\geq g^{-1}(\underline{x}, t) \left( - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - d(t) + \eta \right) \\ S = 0, u_c &= g^{-1}(\underline{x}, t) \left( - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - d(t) \right) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

其中 (8) 式表示状态轨线在滑动面上, 所以 SMC 输入可取为

$$u_{eq} = g^{-1}(\underline{x}, t) \left[ - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - f(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - h\eta_1 \right] \tag{9}$$

其中  $\eta_1 > D + \eta \geq 0, h$  为变换函数,  $S > 0$  时,  $h = 1; s = 0; S < 0$  时,  $h = -1$ , 而  $f(\underline{x}, t)$  和  $g(\underline{x}, t)$  未知, 为此, 本文利用基函数类神经网络对函数  $f(\underline{x}, t), g(\underline{x}, t)$  进行自适应动态逼近, 得到自适应滑模变结构控制方案。

## 2 基于神经网络的自适应滑模控制 (NNBASMC)

所谓基函数类网络, 本文中是指一类神经网络, 其输出与网络的可调权值成线性关系。这类网络包括径向基函数 (RBF) 神经网络, B 样条网络, 小脑模型控制器等等。基函数类网络已被严格的理论证明具有通用的近似特性。为便于说明, 本文以径向基函数神经网络为例。

Broomhead 和 Lowe 将用于多变量插值的径向基函数 (RBF) 应用于神经网络设计<sup>[4]</sup>, 构成了径向基函数神经网络, 如图 1 所示, 该网络为三层前向网络, 输入层由信号源节点组成, 输入矢量直接映射到第二层的隐空间, 隐单元的变换函数是 RBF, 本文中取高斯函数, 即

$$G_i(\underline{x}) = g(\underline{x}, t_i) = \exp \left( - \frac{2}{2\sigma^2} \| \underline{x} - t_i \|^2 \right) \tag{10}$$

式中  $\underline{x} \in R^n$  为输入信号矢量,  $G_i(\underline{x}) (i = 1, 2, \dots, N)$  是第  $i$  个隐单元的变换函数,  $N$  为隐单元数,  $t_i$  为 RBF 中心。第三层为输出层, 考虑单输出情况, 则输出函数为

$$F(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N w_i G_i(\underline{x}) = W^T G(\underline{x}) \tag{11}$$

其中,  $W = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T, G(\underline{x}) = (G_1(\underline{x}), G_2(\underline{x}), \dots, G_N(\underline{x}))^T$ , 用下列定理来描述 RBF 的逼近特性。

**定理:** 对于任意定义在紧致子集  $R^n$  上的连续函数  $F(\underline{x})$  以及任意分段连续的自伴随算子的格林函数  $G(\underline{x}, t_i)$ , 存在函数  $F^*(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N w_i G(\underline{x}, t_i)$ , 使之对于所有的  $\underline{x}$  和任意正数  $\epsilon$ , 满足不等式:  $|F(\underline{x}) - F^*(\underline{x})| < \epsilon$

由于  $f(\underline{x}, t), g(\underline{x}, t)$  未知, 为了设计滑模控制系统, 得到等效控制输入, 因而采用 RBF 网络代替函数  $f(\underline{x}, t)$  和  $g(\underline{x}, t)$ , 即用

$$\hat{f}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_1} w_{fi} G_{fi}(\underline{x}) = W_f^T G_f(\underline{x}) \text{ 和 } \hat{g}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_2} w_{gi} G_{gi}(\underline{x}) = W_g^T G_g(\underline{x}) \tag{12}$$

分别动态逼近函数  $f(\underline{x}, t)$  和  $g(\underline{x}, t)$ , 则可得等效控制

$$u_{eq} = \hat{g}^{-1}(\underline{x}, t) \left[ - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - \hat{f}(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - h\eta_1 \right] \tag{13}$$

则由 (1) 和 (12) 可得 
$$\dot{e}^{(n)} = - \sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} + (f(\underline{x}, t) - \hat{f}(\underline{x}, t)) + (g(\underline{x}, t) - \hat{g}(\underline{x}, t))u_{eq} - h\eta_1 \tag{14}$$

则有 
$$\dot{s} = (f(\underline{x}, t) - \hat{f}(\underline{x}, t)) + (g(\underline{x}, t) - \hat{g}(\underline{x}, t))u_{eq} - h\eta_1 \tag{15}$$

定义最小逼近误差  $E_f = f(\underline{x}, t) - \hat{f}(\underline{x}, t)$  和  $E_g = g(\underline{x}, t) - \hat{g}(\underline{x}, t)$  
$$\tag{16}$$

记  $\hat{f}^* = \hat{f}(\underline{x}/W_f^*), \hat{g}^* = \hat{g}(\underline{x}/W_g^*)$  式 (15) 可改写为

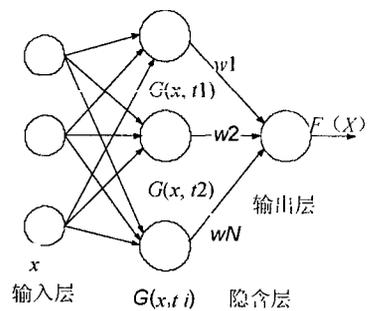


图 1 径向基函数神经网络

$$s = (E_f + \hat{f}^* - \hat{f}(\underline{x}, t)) + (E_g + \hat{g}^* - \hat{g}(\underline{x}, t))u_{eq} - h\eta_1 = [E_f + \theta_f^T G_f(\underline{x})] + [E_g + \theta_g^T G_g(\underline{x})]u_{eq} - h\eta_1 \tag{17}$$

其中:  $\theta_f = W_f^* - W_f, \theta_g = W_g^* - W_g$ 。考虑候选 Lyapunov 函数  $V = \frac{1}{2} \left( s^2 + \frac{1}{\gamma_1} \theta_f^T \theta_f + \frac{1}{\gamma_2} \theta_g^T \theta_g \right)$  (18)

$\gamma_1, \gamma_2$  为正常数, 则有

$$\frac{dV}{dt} = V = s\dot{s} + \frac{1}{\gamma_1} \theta_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\gamma_2} \theta_g^T \dot{\theta}_g = sE_f + s\theta_f^T G_f + s(E_g + \theta_g^T G_g)u_{eq} - sh\eta_1 + \frac{1}{\gamma_1} \theta_f^T \dot{\theta}_f + \frac{1}{\gamma_2} \theta_g^T \dot{\theta}_g = \frac{1}{\gamma_1} \theta_f^T (s\gamma_1 G_f + \dot{\theta}_f) + \frac{1}{\gamma_2} \theta_g^T (s\gamma_2 G_g u_{eq} + \dot{\theta}_g) + sE_f + sE_g u_{eq} - sh\eta_1 \tag{19}$$

采用自适应律  $\dot{\theta}_f = -s\gamma_1 G_f(\underline{x}), \dot{\theta}_g = -s\gamma_2 G_g(\underline{x})u_{eq}$  尽管  $E_f$  和  $E_g$  是最小逼近误差, 通过适当选择参数  $\eta_1$ , 有可能使  $V < 0$  成立, 即保证系统的稳定性, 然而, 这种方法是不完善的, 为了保证系统稳定, 并且对逼近误差具有较强的鲁棒性, 在式(12)的等效控制基础上, 考虑控制律

$$u^* = u_{eq} - \hat{g}^{-1}(\underline{x}, t) \text{sgn}(s) |E_f|_{\max} - \hat{g}^{-2}(\underline{x}, t) \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| \tag{20}$$

其中  $F_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i e^{(i)} - \hat{f}(\underline{x}, t) + \dot{x}_d^{(n)} - h\eta_1 - \text{sgn}(s) |E_f|_{\max}$ , 容易验证式(20)的控制律满足广义滑模存在条件(5)。采用自适应律  $\theta_f = -s\gamma_1 G_f(\underline{x}), \theta_g = -s\gamma_2 G_g(\underline{x})u^*$  (21)

对以上自适应控制律进行分析, 令  $V = 0.5 \theta_f^T \theta_f$ , 则有  $V = \theta_f^T \dot{\theta}_f = s\dot{s} \gamma_1^2 G_f^T G_f \leq 0$  成立, 同理, 令  $V_2 = 0.5 \theta_g^T \theta_g$ , 有  $V_2 = \theta_g^T \dot{\theta}_g = s\dot{s} \gamma_2^2 G_g^T G_g u^{*2} \leq 0$ , 所以任取  $t \geq 0, \theta_f, \theta_g$  有界, 且有如下稳定性定理。

**定理:** 对过程(1), 采用式(20)、(21)确定的自适应控制律, 则基于神经网络的闭环控制系统具有渐近稳定性。

证明: 用  $u^*$  替换式(14)、(15)中的  $u_{eq}$  则容易推得

$$s = (E_f + \hat{f}^* - \hat{f})(\underline{x}, t) + (E_g + \hat{g}^* - \hat{g}(\underline{x}, t))u^* - h\eta_1 - \text{sgn}(s) |E_f|_{\max} - \hat{g}^{-1} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| \tag{22}$$

式(19)变为

$$V = \frac{1}{\gamma_1} \theta_f^T (s\gamma_1 G_f(\underline{x}) + \dot{\theta}_f) + \frac{1}{\gamma_2} \theta_g^T (s\gamma_2 G_g(\underline{x})u^* + \dot{\theta}_g) - sh\eta_1 + sE_f + sE_g u^* - s \text{sgn}(s) |E_f|_{\max} - s \hat{g}^{-1} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| = -sh\eta_1 + sE_g u^* - s \hat{g}^{-1} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| + sE_f - s \text{sgn}(s) |E_f|_{\max} \leq -sh\eta_1 + sE_g u^* - s \hat{g}^{-1} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| = -sh\eta_1 + sE_g \hat{g}^{-1} F_1 - s \hat{g}^{-2} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| - s \hat{g}^{-1} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| \leq -sh\eta_1 - s \hat{g}^{-2} \text{sgn}(s) |E_g|_{\max} |F_1| \tag{23}$$

定理成立。

以上以径向基函数神经网络为例, 说明了利用基函数类神经网络对一类未知模型的非线性系统建立自适应控制器的设计方法, 实际上, 其它基函数类网络, 即输出与网络权值成线性关系的一类网络, 已被严格的理论证明具有逼近特性, 因此, 以上设计过程中的径向基函数神经网络可以很容易泛化为基函数类网络。

### 3 仿真结果

将基于神经网络的滑模控制器用于倒摆系统, 分析它在指定轨迹跟踪中的应用。倒摆

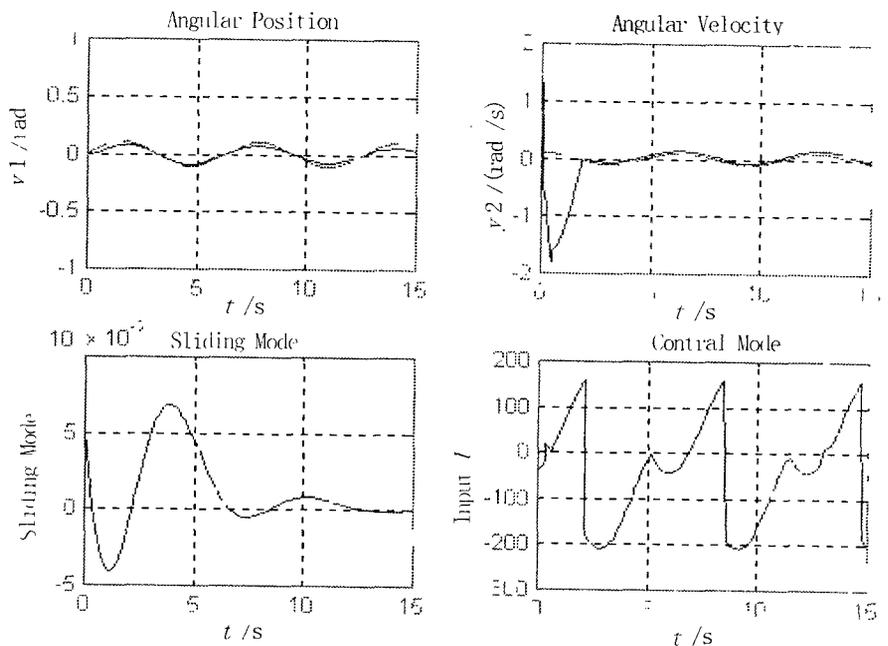


图2 仿真曲线

系统动态方程为

$$\ddot{X} = \frac{1}{l \left( \frac{4}{3} - \frac{m \cos^2(x)}{m + m_c} \right)} \left[ g \sin x - \frac{ml \dot{X}^2 \cos(x) \sin(x)}{m + m_c} + \frac{\cos(x)}{m + m_c} u \right] \quad (24)$$

式中  $g=9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度,  $m=0.1 \text{ kg}$  为杆质量,  $m_c=1 \text{ kg}$  为小车质量, 杆长度  $l=0.5 \text{ m}$ , 仿真中, 期望轨迹选为  $x_d(t) = \left[ \frac{\pi}{30} \sin(t) \quad \frac{\pi}{30} \cos(t) \right]^T$ ,  $c=[3 \ 1]$ ,  $\eta_1=1.03$ , 外加扰动为服从正态分布的随机信号, 最大幅度为 1, RBF 网络的基函数中心值及初始权值随机选取, 倒摆初始状态为  $(0 \ 0)$ 。用 MATLAB “ode23” 对整个闭环系统进行仿真, 结果如图 2 所示, 图 2 中分别为状态  $y_1=x$ ,  $y_2=\dot{x}$ , 滑模  $s$  以及控制量  $u$  随时间的变化曲线。可以看出, 系统能够很好地跟踪期望轨迹, 若根据运行结果采用  $k$ -均值算法选取基函数中心值, 则系统收敛速度及跟踪精度都有所提高。在仿真中发现, 系统对扰动不敏感, 即对扰动具有较强的鲁棒性。

## 4 结论

本文针对非线性系统比较复杂, 难以建立精确数学模型的特点, 采用基于神经网络的滑模变结构控制方案, 对一类仿射非线性进行自适应控制, 几乎不需要被控对象的任何数量信息, 具有较强的实用性。

### 参考文献:

- [1] Young-Moon park, Un-Chul Moon, Kwang Y Lee. A self-organizing fuzzy logic controller for dynamic systems using a fuzzy auto-regressive moving average model[J]. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 1995, 3(1): 75 - 82.
- [2] Ku C C, Lee K Y. Diagonal recurrent neural networks for dynamic systems control[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1995, 6(1): 144 - 155.
- [3] Byungkook Yoo, Woonchul Ham. Adaptive fuzzy sliding mode control of nonlinear system[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems 1998, 6(2): 315 - 321.
- [4] Broomhead Lowe. Multivariable functional interpolation and adaptive networks[J]. Complex Systems, 1998, 2(3): 21 - 35.

## Designing Sliding Mode Controller for Nonlinear System Based-on Neural Networks

LEI Hong-li, ZHANG Dian-zhi, LIU Wen-hua  
(The Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710038, China)

**Abstract:** Traditional controllers normally need the mathematical model of the plant. But it is very hard to get the precise mathematical model of the plant or to get its result. In order to minimize the dependence on the plant information, Adaptive Sliding Mode Control (ASMC) is applied to track and control a family nonlinear system. The scheme can function without any plant model, without expert knowledge, and without the previous plant data, which uses the radial based function neural networks to adjust the system input, so as to ensure the stability and adaptation. Its global stability is proved through theoretical analysis. The simulation of the controller shows its strong robustness and feasibility.

**Key words:** nonlinear system; based function neural networks; dynamic approximation; variable structure control system with sliding mode; robust; global stability