第1卷第3期 空军工程大学学报(自然科学版) Vol. 1 No. 3
2000年8月 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE EDITION) Aug. 2000

关于丢番图方程$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$的非负解的研究

梁放驰， 井爱雯
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要:运用初等方法给出了若$q_i=(a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_r)(i=1,2,\cdots,r)$中至少有一个大于1，则当$n=\sum_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod_{i=1}^{r}q_i-\sum_{i=1}^{r}a_i$时，丢番图方程$\sum_{i=1}^{r}a_ix_i=n$无非负解。

关键词:丢番图方程；非负解；互素
中图分类号:O156.7 **文献标识码**:A **文章编号**:1009-3516(2000)03-0092-03

对于丢番图方程

$$\sum_{i=1}^{r}a_ix_i = n \tag{1}$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_r$和n均为正整数，并且$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1,r\geqslant 2$，可以证明存在一个正整数$M$，使得当$n=M$时，方程(1)无非负解。

华罗庚教授曾在文献[1]中提出并证明了当$n=ab-a-b((a,b)=1,a,b>0)$时，方程$ax+by=n$无非负解；刘丽等在文献[2]中给出了在$a,b,c>0,(a,b,c)=1$，且$\frac{a}{(a,c)}|b$及$\frac{a}{(a,b)}|c$的条件下，当$n=b(a,c)+c(a,b)-a-b-c$时，方程$ax+by+cz=n$无非负解。本文将对此结论作进一步推广。

1 引理及定理证明

引理1:设$a,b,c>1,(a,b,c)=1$，若$(a,b),(b,c)$与(a,c)中至少有一个大于1，则 $a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c>0$。

证明:设$a=(a,b)(a,c)p,b=(a,b)(b,c)q,c=(a,c)(b,c)r$，其中$p,q,r\in z^+$，

(1)若$(a,b)>1,(b,c)>1,(a,c)>1$时，

$$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c$$
$$=(a,b)(b,c)(a,c)[p(1-\frac{1}{(b,c)})+q(1-\frac{1}{a,c})+r(1-\frac{1}{(a,b)})-1]>\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+\frac{r}{2}-1>0,$$

(2)若$(a,b)>1,(b,c)>1,(a,c)=1$时，

$$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c$$
$$=(a,b)(b,c)[p(1-\frac{1}{(b,c)}+r(1-\frac{1}{(a,b)})-1]>\frac{p}{2}+\frac{r}{2}-1\geqslant 0$$

(3)若$(a,b)>1,(b,c)=1,(a,c)=1$时，则$c=r\geqslant 2$，

$$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c$$
$$=c(a,b)-(a,b)-c>0$$

综上可知，引理1成立。

收稿日期:2000-01-15
作者简介:梁放驰(1974-)，男，陕西兴平人，助教，本科，主要从事基础数学研究.

引理2：设$a_1,a_2,\cdots,a_r>1$，且$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$，$r\geqslant 2$，若$q_i(i=1,2,\cdots,r)$中至少有一个大于1，则$n=\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i-\sum\limits_{i=1}^{r}a_i>0$。

证明：设$a_i=\frac{p_i}{q_i}\prod\limits_{i=1}^{r}q_i$，$p_i\in Z^+$，$(1\leqslant i\leqslant r)$，下面分两种情况来讨论，

(1)若$q_i(1\leqslant i\leqslant r)$中只有一个大于1，不妨设$q_r>1$，$q_i=1$，$(1\leqslant i\leqslant r-1)$，则$n=\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i-\sum\limits_{i=1}^{r}a_i=a_rq_r-a_r-q_r>0$。

(2)若$q_i(1\leqslant i\leqslant r)$中至少有两个大于1，则其中至少有一个大于2(否则若$q_i=q_j=2$，$(1\leqslant i<j\leqslant r)$，则$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=2$与$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$矛盾。)，则$n=\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i-\sum\limits_{i=1}^{r}a_i=\prod\limits_{i=1}^{r}q_i[\sum\limits_{i=1}^{r}p_i(1-\frac{1}{q_i})-1]>0$。

综合可知，引理2得证。

定理1：设$a,b,c>1$，且$(a,b,c)=1$，若$(a,b),(b,c),(a,c)$中至少有一个大于1，则当$n=a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c$时，不定方程$ax+by+cz=n$无非负解。

证明：若$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)-a-b-c=ax+by+cz\qquad(x,y,z\geqslant 0)$

则　$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)=a(x+1)+b(y+1)+c(z+1)$

那么　$(b,c)|x+1,(a,c)|y+1,(a,b)|z+1$

从而有　$x+1\geqslant(b,c),y+1\geqslant(a,c),z+1\geqslant(a,b)$(等号不能同时成立)

所以　$a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)-(a,b)(b,c)(a,c)\geqslant a(b,c)+b(a,c)+c(a,b)$

即　$-(a,b)(b,c)(a,c)\geqslant 0$

矛盾，从而定理1得证。

利用定理1的方法，很容易推广出更一般的结果，即有下面的定理2。

定理2：设$a_1,a_2,\cdots,a_r>1$，且$(a_1,a_2,\cdots,a_r)=1$，$r\geqslant 2$，若$q_i(i=1,2,\cdots,r)$中至少有一个大于1，则当$n=\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i-\sum\limits_{i=1}^{r}a_i$时，方程(1)无非负解。

证明：若$\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i-\sum\limits_{i=1}^{r}a_i=\sum\limits_{i=1}^{r}a_ix_i\qquad(x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,r)$

则　$\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i(x_i+1)$

那么　$q_i|x_i+1\qquad(1\leqslant i\leqslant r)$

从而有　$x_i+1\geqslant q_i\qquad(1\leqslant i\leqslant r)$(等号不能同时成立)

所以　$\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i-\prod\limits_{i=1}^{r}q_i\geqslant\sum\limits_{i=1}^{r}a_iq_i$

即　$\prod\limits_{i=1}^{r}q_i\leqslant 0$

矛盾，定理2得证。

注：(1)定理1中若令$c=0$，$(a,b)=1$，则当$n=ab-a-b$时方程$ax+by=n(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$无非负解，这就是文献[1]中的结论。

(2)定理1中若令$a=(a,b)(a,c)$，即有$\frac{a}{(a,c)}|b,\frac{a}{a,b}|c$，则当$n=b(a,c)+c(a,b)-a-b-c$时方程$ax+by+cz=n(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$无非负解，这就是文献[2]中的结论。

(3)若$a_i(i=1,2,\cdots r)$中至少有一个等于1，则方程(1)一定有非负解。

2　结束语

本文给出了方程(1)无非负解的条件，至于定理中的条件如何改进，还有待于进一步研究解决。

参 考 文 献

[1] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979.

[2] 刘丽,毕守东,王良明. 不可由 $ax+by+cz$ 表出的最大正整数[J]. 工科数学,1996,12(3):90－92

On the Nonnegative Solution of Diophantus Equation $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$

LIANG Fang-chi, JING Ai-wen

(The Missile Institute, AFEU., Sanyuan 713800, China)

Abstract: The existence problem of nonnegative solution of Diophantus equation $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = n$ is discussed by using the elementary method, and a kind of non-existence condition for the nonnegative solution of it is given in this paper.

Key words: diophantus equation; nonnegative solution; relatively prime