

# 一种同位网格上的迎风 Galerkin 有限元方法

王旭<sup>1</sup>, 谷传纲<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学 工程学院, 陕西 西安 710038; 2. 西安交通大学 能源与动力工程学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:**通过 Green 定理将对流项变量从微分算子中分离出来,从插值函数入手引入迎风格式,是对强对流问题 Galerkin 有限元计算中对流项变量的一种新的处理方法。按这种方法采用局部斜迎风格式及速-压同位网格公式,构成了一种对高 Reynolds 数流体流动数值模拟比较有效的有限元方法。数值试验表明,采用该方法能较好地提高计算精度。

**关键词:**有限元方法;微分算子;局部斜迎风格式;同位网格法;数值模拟

**中图分类号:**O357 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-3516(2000)03-0019-04

采用有限元方法对流动与传热问题进行数值模拟,需解决两个问题,其一是如何对对流项变量引入迎风格式,其二是如何避免出现棋盘式的压力场。早期的方法是通过对控制方程进行权函数不同于形函数的加权剩余法<sup>[1]</sup>,以及对速度与压力采用非同位的存储法<sup>[2]</sup>。这些方法既导致了计算的复杂性,又导致了计算的不精确性。Rice 等采用流线迎风格式<sup>[3]</sup>,以及在对连续性方程的离散中将单元结点的压力梯度近似为单元积分点上的压力梯度的方法<sup>[4]</sup>,才较好地解决了这些问题。但流线迎风格式对高 Reynolds 数流动的数值模拟仍存在较严重的假扩散。本文给出一种新的对流项处理方法,即采用 Green 定理,将对流项变量从有限元积分方程的微分算子中分离出来,使对流项变量与对坐标的导数无关,从而根据流动特性,可采用常系数的迎风格式。本文以一种局部斜迎风格式对这种方法予以验证,并在速-压同位网格法的基础上,建立一种新型的流动问题有限元方法。

## 1 控制方程与一般有限元公式

设稳态的粘性不可压层流流动的控制方程为

$$\text{动量方程} \quad \nabla \cdot (\rho v \varphi - \mu \nabla \varphi) = S \tag{1}$$

$$\text{连续性方程} \quad \nabla \cdot (\rho v) = 0 \tag{2}$$

式中  $\rho$  表示流体密度,  $\mu$  表示粘性系数。当  $\varphi=u, S=S_u-\partial p/\partial x$  时,式(1)表示  $x$  方向的动量方程。当  $\varphi=v, S=S_v-\partial p/\partial y$  时,式(1)表示  $y$  方向的动量方程。

将计算域离散为四边形单元网格。在单元  $e$  上采用多项式插值及等参变换得到

$$\varphi = N_j(\xi, \eta) \varphi_j \tag{3}$$

式中  $N_j(\xi, \eta)$  为插值形函数,简记为  $N_j$ , 满足

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_j}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4}$$

对式(1)、(2)进行加权剩余法为

$$\sum_e \left[ \int_{A^e} N_i \nabla \cdot (\rho v \varphi) dA - \int_{A^e} N_i \nabla \cdot (\mu \nabla \varphi) dA \right] = \sum_e \int_{A^e} N_i S dA \tag{5}$$

$$\sum_e \left[ \int_{A^e} N_l \nabla \cdot (\rho v) dA \right] = 0 \quad (6)$$

其中  $l$  为单元  $e$  上对应于某一给定结点  $k$  的局部结点号。

## 2 动量方程的迎风格式方法

### 2.1 局部斜迎风格式

通过等参变换

$$x = N_j x_j, \quad y = N_j y_j \quad (7)$$

将正规单元上的 Gauss 积分点  $(\xi_G, \eta_G)$  变换为物理单元上的  $(x_G, y_G)$ 。并通过

$$u = N_j u_j, \quad v = N_j v_j \quad (8)$$

得到  $(x_G, y_G)$  上的速度矢量  $v_G$ 。过  $(x_G, y_G)$  作平行于  $v_G$  的直线, 与某一单元边  $\overline{TQ}$  相交于  $(x_U, y_U)$ 。如果满足:

- (1)  $(x_U, y_U)$  在  $(x_G, y_G)$  的上游方向;
- (2)  $(x_U, y_U)$  分别到  $(x_T, y_T)$ 、 $(x_Q, y_Q)$  的长度之和与  $\overline{TQ}$  长度相等。

则称  $(x_U, y_U)$  为  $(x_G, y_G)$  在单元上的迎风点。于是定义

$$\varphi_G = (1 - l_{TU}/l_{TQ})\varphi_T + (l_{TU}/l_{TQ})\varphi_Q = N_j^G \varphi_j \quad (9)$$

其中  $l_{TU}$ 、 $l_{TQ}$  分别为线段  $\overline{TU}$ 、 $\overline{TQ}$  的长度。

### 2.2 动量离散化方程

对式(5)左端第二项与右端项采用一般 Galerkin 有限元过程离散。对式(5)左端第一项采用 Green 定理, 对单元  $e$

$$\int_{A^e} N_l \nabla \cdot (\rho v \varphi) dA = \int_{\Gamma^e} N_l (\rho v \cdot n) \varphi d\Gamma - \int_{A^e} (\rho v \cdot \nabla N_l) \varphi dA \quad (10)$$

其中  $d\Gamma$  仅在边界单元的边界边上对总装方程有效,  $n$  为微元  $d\Gamma$  上的单位外法向量。对式(10)右端第一项亦按一般 Galerkin 有限元过程处理

$$\int_{\Gamma^e} N_l (\rho v \cdot n) \varphi d\Gamma = -\text{sign}(\eta) \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} N_l (u \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}) \varphi|_{\eta=\pm 1} d\xi + \text{sign}(\xi) \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} N_l (u \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - v \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}) \varphi|_{\xi=\pm 1} d\eta \quad (11)$$

其中在正规单元上,  $\Gamma_1: (-1 \leq \xi \leq 1, \eta = -1)$ ,  $\Gamma_2: (\xi = 1, -1 \leq \eta \leq 1)$ ,  $\Gamma_3: (-1 \leq \xi \leq 1, \eta = 1)$ ,  $\Gamma_4: (\xi = -1, -1 \leq \eta \leq 1)$ 。对  $v$  与  $\varphi$  在单元边上按线性插值。

在式(10)右端第二项中, 变量  $\varphi$  已与微分算子  $\nabla$  无关, 因而可按常系数插值格式处理。采用式(9)给出的局部斜迎风格式及 Gauss 积分

$$\int_{A^e} (\rho v \cdot \nabla N_l) \varphi dA = \left\{ \sum_G a_G [\rho v_G \cdot (\nabla N_l)_G] N_j^G |J|_G \right\} \varphi_j \quad (12)$$

其中  $a_G$  为对应于点  $G$  的积分权系数。最终由式(5)得到

$$a_k \varphi_k = \sum a_{nb} \varphi_{nb} + \sum_e \int_{A^e} N_l S dA \quad (13)$$

对应于  $x$  方向与  $y$  方向的动量方程, 式(13)为

$$a_k u_k = \sum a_{nb} u_{nb} + \sum_e \int_{A^e} N_l (S_u - \partial p / \partial x) dA \quad (14)$$

$$a_k v_k = \sum a_{nb} v_{nb} + \sum_e \int_{A^e} N_l (S_v - \partial p / \partial y) dA \quad (15)$$

## 3 速—压同位的压力方程

对式(6)左端项采用 Green 定理, 对单元  $e$

$$\int_{A^e} N_l \nabla \cdot (\rho v) dA = \int_{\Gamma^e} N_l (\rho v \cdot n) d\Gamma - \int_{A^e} (\rho v \cdot \nabla N_l) dA \quad (16)$$

同理, 式(16)左端第一项仅在计算域边界单元的边界边上对总装方程有效, 采用与式(11)类似的积分方法, 速度矢量  $v$  用边界规定值或上一轮迭代值代入。

为通过式(16)建立压力方程,记

$$\hat{u}_k = \left( \sum a_{nb} u_{nb} + \sum \int_{A^e} N_i S_u dA \right) / a_k \tag{17}$$

$$\hat{v}_k = \left( \sum a_{nb} v_{nb} + \sum \int_{A^e} N_i S_v dA \right) / a_k \tag{18}$$

及 
$$K_k = \left( \sum \int_{A^e} N_i dA \right) / a_k \tag{19}$$

则式(14)、(15)可近似为

$$u_k = \hat{u}_k + K_k (-\partial p / \partial x)_k \tag{20}$$

$$v_k = \hat{v}_k + K_k (-\partial p / \partial y)_k \tag{21}$$

将式(20)、(21)代入式(16)右端第二项,在每一个 Gauss 积分点上,通过形函数对单元结点的  $\hat{u}_i$ 、 $\hat{v}_i$  及其  $K_i$  进行线性插值,并用单元上的压力梯度  $(-\partial N_j / \partial x)_e p_j$ 、 $(-\partial N_j / \partial y)_e p_j$  替代式(20)、(21)中的压力梯度  $(-\partial p / \partial x)_k$ 、 $(-\partial p / \partial y)_k$ 。在单元上得到

$$\int_{A^e} (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla N_i) dA = \int_{A^e} \rho \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} N_i \hat{u}_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} N_i \hat{v}_i \right) dA - \int_{A^e} \rho \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( N_i K_i \frac{\partial N_j}{\partial x} p_j \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( N_i K_i \frac{\partial N_j}{\partial y} p_j \right) \right] dA \tag{22}$$

其中对  $i, j$  分别按单元结点数取和。代回式(16),并逐单元组装,即得结点  $k$  的压力离散方程

$$c_k p_k = \sum c_{nb} p_{nb} + d_k \tag{23}$$

式(23)将结点  $k$  上的压力与其所有相邻结点的压力连系起来,避免了棋盘式压力场的产生。

### 4 算法与算例

对式(14)、(15)采用逐点法求解,对式(23)采用波前法求解,并通过 SIMPLER 方法耦合迭代。

**算例 1** 计算域及边界条件如图 1 所示。在  $61 \times 11$ (下部,均匀) +  $41 \times 10$ (上部,均匀)(1 000 个单元, 1081 个结点)的网格上,对不同 Reynolds 数 ( $Re = 2\rho H_1 / (3\mu)$ ) 的流动进行数值模拟。按图 1 中对速度分离点与附着点的规定,表 1 给出了对各参数值的模拟结果。由于文献[5]中只对相应的实验结果与数值模拟结果以图示形式给出,并未给出具体数据,因此表 1 未对本文结果与文献[5]中结果进行量化比较。但粗略比较可知,在  $Re \geq 400$  时,本文的结果较之文献[5]中的数值模拟结果,更与实验相吻合。其中,  $Re = 1\ 000$  时的速度场如图 2 所示。

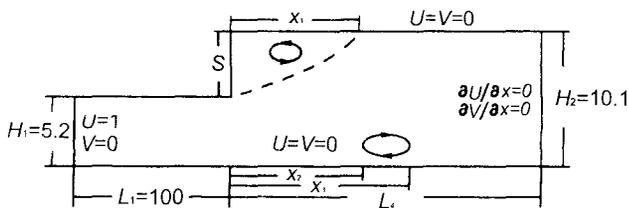


图 1 后台阶流的计算域及边界条件

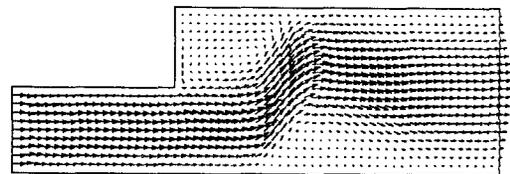


图 2  $Re=1000$  时后台阶流的速度场

表 1 后台阶流主涡的分离点与附着点位置

Re	200	400	600	800	1 000	1 200
$x_1/S$	6.122 4	9.183 7	12.244 9	13.265 3	14.285 7	14.285 7
$x_2/S$			11.224 5	11.224 5	12.244 9	12.244 9
$x_3/S$			17.346 9	22.449 0	27.551 0	30.612 2

**算例 2** 作为对回流问题数值模拟的试验,图 3 给出本文对二维空穴流<sup>[6]</sup>在  $Re = 100, 400, 1\ 000$  时,过计算域中点垂直线与水平线上的数值模拟结果。所采用的网格为  $41 \times 41$  及  $61 \times 61$  的非均匀网格,网格分布服从从内外层厚度比为 1.05 的指数法则。

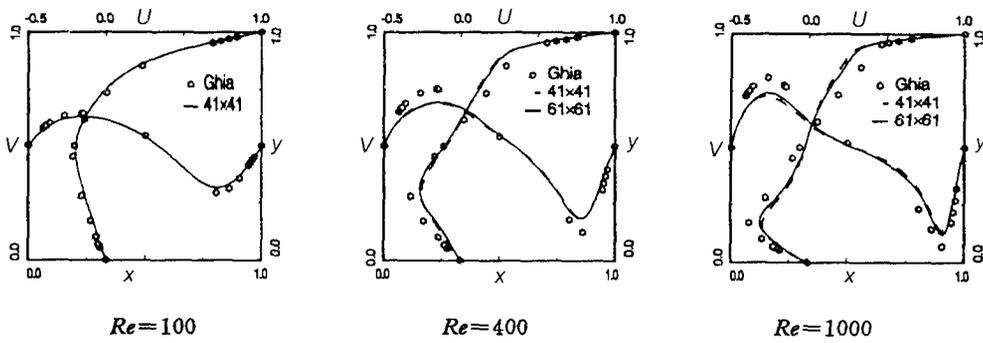


图3 二维空穴流的模拟结果

## 5 结论

通过 Green 定理,将对流项变量从控制方程积分形式的微分算子中分离出来,是本文对 Galerkin 有限元方法建立的一种新的对流项变量处理方法。通过具体建立并采用局部斜迎风格式,以及在速—压同位网格上对压力方程进行离散,最终建立了一种适用于对各种区域上的流体流动在同位网格上进行数值模拟的迎风有限元方法。从算例可以看出,该方法既适用于对强对流问题的数值模拟,也适用于对回流问题的数值模拟。

从本文引入迎风格式的过程可知,在适当定义单元上体积分方法的前提下,除可采用本文建立的局部斜迎风格式外,还可采用其它更有效的迎风格式以及高阶插值格式。

### 参 考 文 献

- [1] Mizukami A, Hughes T J R. A Petrov-Galerkin Finite Element Method for Convection-Dominated Flows: An Accurate Upwinding Technique for Satisfying the Maximum Principle[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1985, 50:181 - 193.
- [2] Hughes T G, Taylor C. *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*[M]. Swansea, U K: Pineridge Press Limited, 1980.
- [3] Rice J G, Schnipke R J. A Monotone Streamline Upwind Finite Element Method for Convection-Dominated Flows[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1985, 48:313 - 327.
- [4] Rice J G, Schnipke R J. An Equal-Order Velocity-Pressure Formulation That Does Not Exhibit Spurious Pressure Modes[J]. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1986, 58:135 - 149.
- [5] Armaly B F, Durst F, Pereira J C F, et al. Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow[J]. *J Fluid Mech*, 1983, 127:473 - 496.
- [6] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method[J]. *J Comput phys*, 1982, 48:387 - 411.

## A Co-Located Upwind Scheme-Based Galerkin Finite Element Method

WANG Xu<sup>1</sup>, GU Chuan-gang<sup>2</sup>

(1. The Engineering Institute, AFEU., Xi'an 710038, China; 2. Energy and Power Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** Invoking Green's theorem to separate the convection variable from the differential operator of weighted residual equation is a new strategy of using upwind scheme in Galerkin finite element method. As an example, the locally skewed upwind scheme is proposed. By implementing this strategy in conjunction with the equal-order velocity-pressure formulation, the convection-dominated fluid flow can be obtained more accurate simulation in complex geometrics. This paper not only has established this new method, but also has proved its accuracy is rather encouraging by its application to some typical examples and comparisons with other literatures.

**Key words:** finite element method; differentiator; locally skewed upwind scheme; equal-order velocity-pressure formulation; numerical simulation