空 军 工 程 大 学 学 报(自然科学版)
第1卷第1期 JOURNAL OF AIR FORCE ENGINEERING UNIVERSITY Vol.1 No.1
2000年4月 (NATURAL SCIENCE EDITION) Apr. 2000

一类分叉系统的间接状态反馈 H^∞ 控制方法

姚 宏[1]， 徐健学[2]

[1](空军工程大学 工程学院基础部，陕西 西安 710038)

[2](西安交通大学 非线性动力学研究所，陕西 西安 710049)

摘 要：针对工程实际中常见的一类具有非半简双零特征值高维分叉系统常出现自激振荡现象，根据非线性 H^∞ 控制理论，提出了一种非线性间接状态反馈 H^∞ 控制方法；设计了一个最优的 H^∞ 控制器，研究如何以最快速度消除系统的分叉。

关键词：分叉系统；状态反馈；H^∞ 控制；非半简；H^∞ 控制器

分类号：TP273 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-3516(2000)01-0025-05

H^∞ 控制理论，由 Zames[1] 自 80 年代初提出，它是用 H^∞ 范数作为目标函数进行优化设计。H^∞ 范数是定义 H 空间 $H_p(p=\infty)$ 上的范数。它是指拉氏变量 s 右半平面上解析有理函数矩阵的最大奇异值，在标量函数中幅频特性的极大值。在过去的十多年里，H^∞ 控制理论得到了长足发展，由于它优良的特性，得到了广泛的研究。

目前，线性控制系统的 H^∞ 控制理论已日趋完善，对线性 H^∞ 控制理论的研究的目的大多数都是在探索不同的解法，使 H^∞ 控制理论更便于在工程实际中应用。而对非线性控制系统来说，它与线性控制系统有很大的本质差异，它所产生的现象很复杂，如：混沌、分叉等。因此非线性控制系统 H^∞ 控制理论正受到越来越多的学者的关注[2,3]。近年来，针对不同的控制问题，涌现出许多新的解决方法。其中 Alberto[4] 等人从理论上得到了可测输出 y 的 H^∞ 控制器的解，它可以归结为讨论两个 Hamilton-Jacobi-Isaacs 微分不等式的解，但是它还难以用来解决工程实际中的问题。Jie[5] 提出一种求解 H^∞ 控制律的数值方法，为将非线性 H^∞ 控制的理论应用于工程打下了基础。本文的目的是针对工程实际中常遇到的一类高维问题，基于非线性 H^∞ 控制的理论和方法，考虑到系统固有的复杂动力学行为，提出一种间接状态反馈方法，设计了一个最优 H^∞ 控制器，讨论如何以最快速度消除系统的自激振荡。

1 非线性 H^∞ 控制理论基础

考虑如下形式的非线性控制系统

$$\begin{aligned} x &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x\in\mathscr{R}^n$ 为系统状态，$w\in\mathscr{R}^r$ 为外部扰动输入，$u\in\mathscr{R}^m$ 为控制输入，$z\in\mathscr{R}^s$ 为受控输出(惩罚变量)，$y\in\mathscr{R}^p$ 为测量输出，函数 $f(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$，$h_1(x)$，$h_2(x)$，$k_{11}(x)$，$k_{12}(x)$，$k_{21}(x)$ 均为连续函数。不妨假设 $f(0)=0$，$h_1(0)=0$，$h_2(0)=0$。非线性 H^∞ 控制的目的有两方面含义：在惩罚变量为 z 的情况下获得闭环稳定和衰减外部干扰的影响。

为了简化分析并且提供一个可解的控制器，采用标准假设[6]：

收稿日期：2000-1-17

基金项目：国家自然科学基金资助(1967502)

作者简介：姚 宏(1963-)，女，副教授(博士研究生)。

$$k_{11}(x)=0,\quad h_1^T(x)k_{12}(x)=0,\quad k_{12}^T(x)k_{12}(x)=I$$
$$k_{21}(x)g_1^T(x)=0,\quad k_{21}(x)k_{21}^T(x)=0 \tag{2}$$

定义 1： $(h(x)\cdot f(x))$（简记为$(h\cdot f)$）是局部可检测的，如果方程 $\dot{x}=f(x)$ 的解 $x(t)$ 使 $h(x(t))=0$ 意味着 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。

定义 2： $(f\cdot g)$是局部可达的，如果存在原点的某个邻域U，$\forall\ x\in U$，存在$T>0$及容许控制 $u(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$，使方程 $\dot{x}=f(x)+g(x)u(t)$ 从原点出发的解 $\varphi(t)$ $(\varphi(0)=0)$ 满足 $x=\varphi(T)$。

这样，标准非线性状态反馈 H^∞控制定义为：

定义 3： 系统(1)的 H^∞ 控制问题是可解的，如果存在 $\gamma_0>0$ 及控制 $u=a(x)\in C^0$ 并且 $a(0)=0$，使得对任何 $\gamma\geqslant\gamma_0$ 及 $T>0$，系统(1)在 $x(0)=0$ 使下式成立：

$$\int_0^T \|z(t)\|^2dt\leqslant\gamma^2\int_0^T\|w(t)\|^2dt \tag{3}$$

为了便于进一步研究，简要给出 Isaacs 方程。假设存在一个反馈控制律 $\alpha(x,w)$ 和一个半正定的连续函数 $V:\mathscr{R}^n\to\mathscr{R}$，对所有的 $t_1\geqslant t_0$ 满足下列不等式：

$$V(x(t_1))-V(x(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}L(x(t),w(t),\alpha(x(t),w(t)))ds\leqslant 0 \tag{4}$$

其中，

$$L(x,w,u)=\|h_1(x)+k_{12}(x)u\|^2-\gamma^2\|w\|^2 \tag{5}$$

并且 $x(t)$ 是如下闭环系统的积分曲线

$$x=f(x)+g_1(x)w+g_2(x)\alpha(x,w)$$

这样，控制律 $u=\alpha(x,w)$ 显然能反映满足式(3)要求的扰动衰减。实际上，对式(4)，若选取 $t_0=0,t_1=T$，从 $x=0,t=0$ 开始沿任何轨迹，我们可获得

$$V(x(t_1))-V(x(t_0))=V(x(T))\geqslant 0$$

若半正定函数 V 满足

$$V_x(f(x)+g_1(x)w+g_2(x)\alpha(x,w))+L(x,w,\alpha(x,w))\leqslant 0 \tag{6}$$

其中，V_x 表示 V 的 *Jacobian* 矩阵。注意下面的函数对于(w,u)是二次型的，

$$H(x,p^T,w,u)=p^T(f(x)+g_1(x)w+g_2(x)u)+L(x,w,u)$$

因为

$$H(x,p^T,w,u)=p^Tf(x)+h_1^T(x)h_1(x)+[p^Tg_1(x)\quad p^Tg_2(x)]\begin{bmatrix}w\\u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w\\u\end{bmatrix}^TR\begin{bmatrix}w\\u\end{bmatrix}$$

其中，

$$R=\begin{bmatrix}-\gamma^2I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$$

如果有一对(α_1,α_2)，且满足

$$\left(\frac{\partial H}{\partial w}\right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)}=0,\quad \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{(w,u)=(\alpha_1,\alpha_2)}=0 \tag{7}$$

则，$H(x,p^T,w,u)$ 可以表示为

$$H(x,p^T,w,u)=H(x,p^T,\alpha_1,\alpha_2)+\begin{bmatrix}(w-\alpha_1)\\(u-\alpha_2)\end{bmatrix}^TR\begin{bmatrix}(w-\alpha_1)\\(u-\alpha_2)\end{bmatrix}$$

由于 R 是非奇异的，所以式(7)中的解(α_1,α_2)是唯一存在的。并且有如下表达式

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1(x,p^T)\\\alpha_2(x,p^T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\gamma^2}g_1^T(x)p\\-\frac{1}{2}g_2^T(x)p\end{bmatrix}$$

现在，假设 α_1 和 α_2 是如下方程的解：

$$H(x,V_x,\alpha_1(x,V_x),\alpha_2(x,V_x))=0 \tag{8}$$

这样，可以选择

$$H(x,V_x,w,u)=-\gamma^2\|w-\alpha_1(x,V_x)\|^2+\|u-\alpha_2(x,V_x)\|^2 \tag{9}$$

则控制律为

$$u = \alpha(x,w) = \alpha_2(x,V_x) \tag{10}$$

等式(8)即为 Isaacs 方程的标准式。我们注意到。它可以进一步写为

$$V_x f(x) + h_1^T(x)h_1(x) - \begin{bmatrix}\alpha_1(x,V_x)\\ \alpha_2(x,V_x)\end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix}\alpha_1(x,V_x)\\ \alpha_2(x,V_x)\end{bmatrix} = 0$$

即,

$$V_x f(x) + h_1^T(x)h_1(x) + \gamma^2\alpha_1^T(x)\alpha_1(x) - \alpha_2^T(x)\alpha_2(x) = 0$$

或写成另外一种形式

$$V_x f(x) + h_1^T(x)h_1(x) + \frac{1}{4\gamma^2}V_x g_1(x)g_1^T(x)V_x^T - \frac{1}{4}V_x g_2(x)g_2^T(x)V_x^T = 0$$

这样,对非线性系统(1)的 H^∞ 控制,类似于线性系统 H^∞ 控制,它的状态反馈和输出反馈控制可以转化为研究一个或两个 Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程非负解的存在性问题。

2　间接状态反馈幂级数 H^∞控制方法

考虑非线性控制系统

$$\begin{aligned} x &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)\mu \\ z &= h(x) + k(x)\mu \end{aligned} \tag{11}$$

其中,$x\in\mathscr{R}^n$ 为系统状态,$w\in\mathscr{R}^r$ 为外部扰动输入,$\mu\in\mathscr{R}^m$ 为控制输入(参数),$z\in\mathscr{R}^s$ 为受控输出(惩罚变量),函数 $f(x)$,$g_1(x)$,$g_2(x)$,$h(x)$,$k(x)$均为连续函数,并且有 $f(0)=0$,$g_1(0)=0$,$g_2(0)=0$;另外,此系统具有非半简双零特征值,即系统固有的动力学行为很复杂,它会产生余维二分叉、Hopf 分叉等现象。根据非线性 H^∞控制标准假设,我们设

$$h^T(x)k(x) = 0,\ k^T(x)k(x) = R_0$$

其中,R_0 为非奇异常值矩阵。

根据非线性 H^∞控制理论可知,系统(11)的反馈控制律为:

$$\mu = -\frac{1}{2}R_0^{-1}g_2^T(x)V_x^T \tag{12}$$

其中,$V_x=[\frac{\partial V}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial V}{\partial x_2}\ \ \frac{\partial V}{\partial x_3}\cdots\ \ \frac{\partial V}{\partial x_n}]$表示 V 的 Jacobi 矩阵,是下列 Isaacs 方程的正定解。

$$V_x f(x) + h^T(x)h(x) + \frac{1}{4}V_x(\frac{g_1(x)g_1^T(x)}{\gamma^2} - g_2(x)R_0^{-1}g_2^T(x))V_x^T = 0 \tag{13}$$

γ 为大于零的实数。令系统(11)的状态反馈 H^∞控制的 Hamilton 函数为

$$H(x,p^T,w,u) = p^T[f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u] + \|h(x) + k(x)u\|^2 - \gamma^2\|w\|^2 \tag{14}$$

依据假设,它可以进一步表示为

$$H(x,p^T,w,u) = p^T f(x) + h^T(x)h(x) + [p^T g_1(x)\quad p^T g_2(x)]\begin{bmatrix}w\\ u\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}w\\ u\end{bmatrix}^T R\begin{bmatrix}w\\ u\end{bmatrix} \tag{15}$$

其中

$$R = \begin{bmatrix}-\gamma^2 I & 0\\ 0 & R_0\end{bmatrix} \tag{16}$$

依据非线性动力学理论,将 $H(x,p^T)$扩展定义为[5]:

$$H(x,p^T) = \frac{1}{2}x^T H_{xx}x + p^T H_{px}x + \frac{1}{2}p^T H_{pp}p + H^{[3+]}(x,p^T) \tag{17}$$

它的 Taylor 级数解为

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T px + V^{[3+]}(x) \tag{18}$$

其中 $V^{[3+]}(x)$表示 $V(x)$的 3 次及更高次幂各项之和,并且 p^T 满足如下方程:

$$\frac{1}{2}x^T H_{xx}x + x^T p^T H_{px}x + \frac{1}{2}x^T p^T H_{pp}px = 0 \tag{19}$$

$V^{[3+]}(x)$满足

$$V_x^{[3+]}(H_{px}+H_{pp}p)x=-\frac{1}{2}V_x^{[3+]}H_{pp}(V_x^{[3+]})^T-H^{[3+]}(x,V_x) \tag{20}$$

定义如下符号：

$$K^{(0)}=I,\quad K^{(1)}=K,\quad K^{(i)}=\underbrace{K\otimes K\otimes K\cdots\otimes K}_{i\text{ 项}}\quad(i=2,3,\cdots\cdots)$$

其中，$\otimes$表示 kroneker 积。设 $x=[x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]^T$，定义

$$x^{[0]}=I,\quad x^{[1]}=x$$

$$x^{[k]}=[x_1^k\quad x_1^{k-1}x_2\cdots x_1^{k-1}x_n\quad x_1^{k-2}x_2^2\quad x_1^{k-2}x_2x_3\cdots x_1^{k-2}x_1x_n\cdots x_n^k]\quad(k\geqslant 1)$$

然而有常数矩阵 S_k,D_k 满足如下关系：

$$x^{[k]}=S_kx^{(k)}\quad x^{(k)}=D_kx^{[k]} \tag{21}$$

例如，若取 $k=2$，则有

$$x^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^2\\x_1x_2\\x_2x_1\\x_2^2\end{bmatrix}\qquad x^{[2]}=\begin{bmatrix}x_1^2\\x_1x_2\\x_2^2\end{bmatrix}$$

对应的矩阵 S_2,D_2 分别为

$$S_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad D_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

这样，利用上述定义，$V(x)$可以表示为

$$V(x)=\frac{1}{2}x^Tpx+\sum_{k=3}^{\infty}p_kx^{[k]}\triangleq\frac{1}{2}x^TPx+V^{[3+]}(x) \tag{22}$$

定理 1 方程(22)的系数矢量 p_k 满足

$$p_kU_k=V_k \tag{23}$$

其中，$U_k=S_k\sum_{i=1}^{k}I^{(i-1)}\otimes(H_{px}+H_{pp}p)\otimes I_n^{(k-i)}D_k$。$V_k$ 唯一地由 $p,p_3,\cdots p_{k-1}$决定。并且 U_k 的特征值可由下式给出

$$\lambda=\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k} \tag{24}$$

其中，$i_1,i_2,\cdots i_k\in\{1,2,\cdots n\}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 为 $H_{px}+H_{pp}p$ 的特征值。

推论 1 如果对于 $k\geqslant 3$ 有下式成立，

$$\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_k}\neq 0,\quad i_1,i_2,\cdots i_k\in\{1,2,\cdots n\}$$

那么方程(23)有唯一解 p_k。

接下来作进一步的分析，首先有常值矩阵 G_k 使下式成立

$$p_kS_k\sum_{i=1}^{k}x^{(i-1)}\otimes I_n\otimes x^{(k-1)}=(x^T)^{(k-1)}G_k \tag{25}$$

将 p_kS_k 化为矩阵块，则有

$$p_kS_kx^{(i-1)}\otimes I_n\otimes x^{(k-i)}=(p_k^ix^{(k-i)})^T \tag{26}$$

通过比较可得

$$G_k=\sum_{i=1}^{k}(p_k^i)^T \tag{27}$$

经过整理则有

$$V_x^T=\sum_{k=2}^{\infty}G_k^Tx^{(k-1)} \tag{28}$$

此处 $G_2=P$，因此得到间接反馈控制律的近似解

$$\mu=-\frac{1}{2}R_0^{-1}g_2^T(x)(px+\sum_{k=3}^{\infty}G_k^TD_{k-1}x^{[k-1]}) \tag{29}$$

对非线性系统(1)，将 $f(x),g_1(x),g_2(x),h(x)$用 Taylor 级数展开，即

$$\begin{aligned}f(x)=Ax+f^{[2+]}(x),\quad g_1(x)=B_1+g_1^{[1+]}(x)\\g_2(x)=B_2+g_2^{[1+]}(x),\quad h(x)=C_1x+h^{[2+]}(x)\end{aligned} \tag{30}$$

这样,式(29)可以转换为

$$H_{px}^T p + pH_{px} + p^T H_{pp} p + H_{xx} = 0 \tag{31}$$

其中,

$$H_{px} = A, \quad H_{xx} = C_1^T C_1$$

$$H_{pp} = \frac{B_1 B_1^T}{\gamma^2} - B_2 R_0^{-1} B_2^T$$

到此可解出 p,获得最优 H^∞控制器,从而消除系统的分叉。

3　结束语

本文基于非线性 H^∞控制理论和方法,在标准假设(2)下,讨论了一类具有非半简双零特征值的高维控制系统分叉控制问题。提出了一种从参数控制到状态反馈的控制方法,给出了控制器设计准则,揭示了此类高维控制系统复杂的动力学本质与控制器设计的关系,为控制器的设计及系统实现有效稳定的控制提供了理论依据。

参 考 文 献

[1] G. Zames. Feedback and Optimal Sensitivity; Model/Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses[J]. IEEE Trans. on Auto. Contr. ,1981,28:301～320.

[2] A. J. Van der Schaft. L_2-gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H^∞ control[J]. IEEE Trans. on Auto. Contr. ,1992,37:770～784.

[3] A. Isidori, A. Astolfi. Disturbance Attenuation and H^∞ Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems[J]. IEEE Trans. on Auto Contr. ,1992,37:1283～1293.

[4] A. Isidori, W. Kong. H^∞ Control via Measurement Feedback for General Nonlinear System[J]. IEEE Trans. on Auto Contr. ,1995,40:466～472.

[5] Jie Huan. Numerical Approach to Computing Nonlinear H^∞ Control Laws[J]. J Gui Contr Dyn,1995,18:989～994.

[6] J. C. Doyle, and et. al. State-Space Solutions to Standard H_2 and H^∞ Control Problems[J]. IEEE Trans. on Auto Contr. ,1989,34:831～846.

An Indirect State Feedback H$^\infty$ Control Approach for A Bifurcation System

YAO Hong[1],　XU Jian-xue[2]

[1](Dept. of Basic Training of the Engineering Institute, AFEU. , Xi'an 710038, China)

[2](The Institute of Nonlinear Dynamic, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract. This paper presents the indirect state H$^\infty$ control approach to a multidimensional bifurcation system of actual engineering with non-semisimple double zero value, based on the nonlinear H$^\infty$ control theory. Under some conditions, parameterization formulas of all controllers are derived. The solution of the problem is shown to be related to the existence of solutions of a pair of Hamilton-Jacobi equations, which are associated with parameters and state feedback, respectively.

Key words: Bifurcation system; State feedback; H$^\infty$ control; Non-semisimple; H$^\infty$ controller