

基于解耦原子范数最小化的二维 DOA 估计

彭加强, 郑桂妹

(空军工程大学防空反导学院, 西安, 710051)

摘要 近年来,原子范数最小化算法成为 DOA 估计领域的重要工具。针对二维 DOA 估计中解耦原子范数最小化 DANM 算法只适用于单快拍的场景,提出一种适用于多快拍场景的改进 DANM 算法。首先,通过改变 DANM 算法中的优化模型结构,进一步将基于矢量化传统 2D ANM 求解模型解耦为 2 个一维 ANM 求解模型,使其适用于多快拍的场景;其次,为了避免大快拍所带来的高维度计算,将接收数据及其转置的协方差矩阵分别作为 2 个维度 ANM 求解模型的计算数据用于模型求解,使该维度的 ANM 求解模型维数限定于有限的传感器数目;最后,通过 MUSIC 算法求出每个维度的 DOA,并利用简单的 2D 配对方法进行配对得到 2D DOA 估计。数值仿真结果证明该算法保持了 ANM 类算法的估计性能优势,与 DANM 算法相比提高了估计精度和稀疏恢复能力,与基于对偶的 2D ANM 算法相比显著缩短了计算时间。

关键词 2D DOA 估计;ANM;DANM

DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2021.01.010

中图分类号 TN953⁺.5 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2021)01-0055-07

A Two-Dimensional DOA Estimation Based on Decoupled Atomic Norm Minimization

PENG Jiaqiang, ZHENG Guimei

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract In recent years, the atomic norm minimization (ANM) algorithm has become an important tool in the field of DOA estimation. Aimed at the problem that the DANM is only suitable for single snapshot, an improved decoupled atomic norm minimization algorithm is proposed for both single snapshot and multiple snapshots models. Firstly, through changing the primal optimized model structure in the DANM algorithm, the traditional two-dimensional ANM algorithm based on vectorization is further decoupled into two one-dimensional ANM solution models to make it suitable for multiple snapshots models. Secondly, in order to avoid the high-dimensional calculations brought by the large snapshot, the covariance matrix of the received data and the covariance matrix of the transpose of the received data are used as the calculation data of the two 1D ANM solution model for model solving, so that the size of the dimension of ANM model is limited to the number of sensors. Finally, the DOA of each dimension are obtained by multiple signal classification algorithm, and the 2D DOA estimation is obtained by a simple 2D pairing method. The proposed algorithm maintains the estimation performance advantages of ANM algorithms. Compared with the

收稿日期: 2020-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(61971438);陕西省自然科学基金(2019JM-155);陕西省青年托举人才项目(20180109)

作者简介: 彭加强(1989—),男,重庆涪陵人,硕士生,研究方向:空间谱估计。E-mail:781652556@qq.com

引用格式: 彭加强, 郑桂妹. 基于解耦原子范数最小化的二维 DOA 估计[J]. 空军工程大学学报(自然科学版), 2021, 22(1): 55-61. PENG Jiaqiang, ZHENG Guimei. A Two-Dimensional DOA Estimation Based on Decoupled Atomic Norm Minimization[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2021, 22(1): 55-61.

DANM algorithm, this algorithm improves the estimation accuracy and sparse recovery ability. And compared with the duality-based 2D ANM algorithm, the CPU time is significantly shortened. The algorithm is valid.

Key words two-dimensional DOA estimation; ANM; DANM

2D DOA 估计技术应用十分广泛,比如 MIMO 雷达的波离角和波达角联合估计、二维阵列的方位角和俯仰角联合估计等都可以归为 2D DOA 估计问题。得益于 1D DOA 估计问题的成功应用,子空间类超分辨算法被顺利地推广到 2D DOA 估计问题,比如 2D 酉信号参数旋转不变估计技术(unitary estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, U-ESPRIT)^[1], 2D 多重信号分类算法(multiple signal classification, MUSIC)^[2]等。该类算法在已知信源数目、获得多快拍采样数据及信号源非相干的情况下可以取得较好的估计性能,但其中任一条件不满足就会导致其估计性能下降,甚至失效。

近年来,基于压缩感知技术框架的有效替代算法被引入到 2D DOA 估计领域,取得了丰硕的研究成果。传统的压缩感知算法将信号源可能出现的空域按维度划分为有限个网格点,在真实目标方位准确地落在既设网格上时展现出了优良的估计性能,能够适用于单快拍、信源相干、数据缺失等复杂场景。比如正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)^[3], 稀疏贝叶斯学习(sparse bayesian learning, SBL)^[4]等算法。反之,如果真实信号源没有落在既设网格上则会造成网格失配的问题,估计性能也会随之下降,甚至失效。另外,传统压缩感知算法还必须满足成对等距特性(pairwise isometry property, PIP)^[5]及高密度网格划分。为克服以上问题,一种新的基于原子范数理论和范德蒙德分解定理的无网格连续压缩感知技术被提出,称为原子范数最小化(atomic norm minimization, ANM)^[6]。ANM 通过拓普利兹(Toeplitz)矩阵将观测数据中阵列流行矩阵的范德蒙德结构投射到对应的半定规划(semi-definite programming, SDP)模型,并通过 SDP 优化模型的求解获得恢复的信号实现超分辨。相比于传统压缩感知算法,其无需对空域进行网格划分,有效避免了网格失配的问题以及 PIP 限制。但根据 Caratheodory 的理论,Toeplitz 矩阵的范德蒙德分解在高维空间中不成立,因此 1D ANM 不能直接扩展到 2D DOA 估计。幸运的是,通过接收数据的矢量化操作及一种包含 2 个维度范德蒙德结构的双重 Toeplitz 矩阵的构造,Chi 等人成功解决了该问题,并率先将矢量化 ANM(VANM)应用于 2D DOA 估计^[7],但对接收测量数据的矢量化操作

及双重 Toeplitz 矩阵的构造使得该算法计算代价巨大,不能应用于实际中的场景。基于对偶的 2D ANM^[8]从 VANM 的对偶问题出发进行求解,但并没有减轻 VANM 的高计算量。

为减轻繁重的计算负担,Tian 等人提出一种新的解耦原子范数最小化算法(decoupled atomic norm minimization, DANM)^[9-11]。DANM 将 VANM 中的矢量原子集替换为矩阵原子集,并推导出相应的 SDP 模型,该模型天然地将 VANM 中的双重 Toeplitz 矩阵解耦为 2 个分别包含一维范德蒙德结构的 Toeplitz 矩阵,从而将 2D DOA 估计问题转换为 2 个 1D DOA 估计问题,该算法在保持 ANM 类算法优良估计性能的同时显著降低了计算复杂度,相较于 VANM 降低了几个数量级。但原始的基于均匀矩形阵列(uniform rectangle array, URA)的 DANM 算法目前只能工作于单快拍,对于多快拍 DANM 的研究只见于特殊的阵列结构,如文献[12~13]基于 L 型阵列 2 个子阵的互协方差矩阵对 DANM 进行了相应地改进,使其能够适用于多快拍的场景,文献[14]针对互质阵列对 DANM 进行了相应地改进。同时,其他对 DANM 的研究也局限于单快拍,如文献[15]利用交替方向乘法(alternating direction method of multipliers, ADMM)研究了单快拍 DANM 的快速算法,文献[16]利用 DANM 进行 MIMO 雷达角度和距离的单快拍联合估计。

为使 DANM 适用于多快拍,本文提出一种改进的解耦原子范数最小化方法。

1 信号模型

考虑空间远场 K 个窄带信号作用于一个 $N \times M$ 的均匀矩形阵列,阵元间距为半波长,如图 1 所示,其 L 次快拍采样数据表示为 $s_{k,l} \in \mathbb{C}^{K \times L}$ 。鉴于第 k 个入射信号的俯仰角 φ_k 、方位角 θ_k 同其与 x 、 y 轴之间的夹角 α_k 、 β_k 具有如下关系:

$$\varphi_k = \arcsin(\sqrt{\cos^2(\alpha_k) + \cos^2(\beta_k)}) \quad (1)$$

$$\theta_k = \arctan\left(\frac{\cos(\beta_k)}{\cos(\alpha_k)}\right) \quad (2)$$

即求出 α_k 、 β_k 便可根据式(1)~(2)得到 θ_k 、 φ_k ,因此本文使用 α_k 、 β_k 进行信号建模分析。则 x 、 y 维的阵列导向矢量、流行矩阵分别为:

$$\mathbf{a}_x(\alpha_k) = [1, e^{-j\pi \sin(\alpha_k)}, \dots, e^{-j\pi(N-1)\sin(\alpha_k)}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_y(\beta_k) = [1, e^{-j\pi \sin(\beta_k)}, \dots, e^{-j\pi(M-1)\sin(\beta_k)}]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_x = [\mathbf{a}_x(\alpha_1), \mathbf{a}_x(\alpha_2), \dots, \mathbf{a}_x(\alpha_K)] \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_y = [\mathbf{a}_y(\beta_1), \mathbf{a}_y(\beta_2), \dots, \mathbf{a}_y(\beta_K)] \quad (6)$$

第 l 次快拍数据及所有快拍数据可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(l) &= \sum_{k=1}^K s_{k,l} \mathbf{a}_x(\alpha_k) \mathbf{a}_y^T(\beta_k) = \mathbf{A}_x \mathbf{S} \mathbf{A}_y^T \\ \mathbf{S} &= \text{diag}(s_{1,l}, s_{2,l}, \dots, s_{K,l}) \\ \mathbf{Y}(l) &= \mathbf{X}(l)^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L)] \\ \mathbf{Y} &= [\mathbf{Y}(1), \mathbf{Y}(2), \dots, \mathbf{Y}(L)] \end{aligned} \quad (8)$$

2D DOA 估计就是要将所有的 α_k 和 β_k 从观测数据 $\mathbf{X}$ 或 $\mathbf{Y}$ 中恢复出来。本文中我们主要以无噪数据的形式进行建模,但也会对有噪的情况进行讨论。

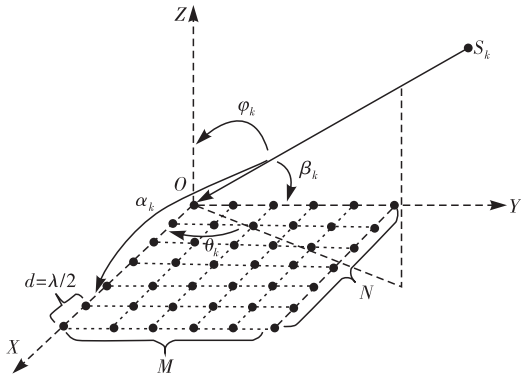


图 1 URA 信号模型

2 2D DOA 估计中的原子范数最小化算法

2.1 基于矢量的原子范数最小化算法

根据文献[7],接收信号数据 $\mathbf{X}(l)$ 可以被矢量化为以下表达式:

$$\mathbf{x}(l) = \text{vec}(\mathbf{X}(l)) = \sum_{k=1}^K s_{k,l} \mathbf{a}_y(\beta_k) \otimes \mathbf{a}_x(\alpha_k) \quad (9)$$

相应地原子集 $\mathbf{A}_V$ 可以表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_V &= \{\mathbf{a}_y(\beta_k) \otimes \mathbf{a}_x(\alpha_k), \alpha_k, \beta_k \in [-90, 90]\} = \\ &= \{\mathbf{a}(\gamma), \gamma \in [-90, 90] \times [-90, 90]\} \end{aligned} \quad (10)$$

利用矩阵变量 $\mathbf{P} = [u_{l_1, l_2}] \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2M-1)}$ 构造双重 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P})$, 其中 $-N < l_1 < N, -M < l_2 < M$ 。

$$\mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_{-1} & \cdots & \mathbf{P}_{-(N-1)} \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_0 & \cdots & \mathbf{P}_{-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{N-1} & \mathbf{P}_{N-2} & \cdots & \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{l_1} = \begin{bmatrix} u_{l_1, 0} & u_{l_1, -1} & \cdots & u_{l_1, -(M-1)} \\ u_{l_1, 1} & u_{l_1, 0} & \cdots & u_{l_1, -(M-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{l_1, M-1} & u_{l_1, M-2} & \cdots & u_{l_1, 0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

无噪时,包含 2D DOA 信息的双重 Toeplitz 矩阵可以通过计算式(13)中的原子范数最小化得到;有噪时,则可通过计算式(14)中的原子范数最小化得到。式(14)中 $\mathbf{x}$ 表示待恢复数据, $\epsilon = \sqrt{m}\sigma$ 表示与噪声水平相关的标量,其中 m 表示观测采样数, σ 表示噪声协方差的平方根。

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{X}(l)\|_{\mathbf{A}_V} = \\ \inf \left\{ \sum_k |s_{k,l}| \mid \mathbf{X}(l) = \sum_k s_{k,l} \mathbf{a}(\gamma), \mathbf{a}(\gamma) \in \mathbf{A}_V \right\} = \\ \min_{\substack{\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2M-1)} \\ v \in \mathbb{C}}} &\left\{ \frac{1}{2}(v + \text{trace}(\mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P}))) \right\} \\ \text{s. t. } &\begin{bmatrix} v & \mathbf{x}^H(l) \\ \mathbf{x}(l) & \mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P}) \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{X}(l)\|_{\mathbf{A}_V} = \\ \inf \left\{ \sum_k |s_{k,l}| \mid \mathbf{X}(l) = \sum_k s_{k,l} \mathbf{a}(\gamma), \mathbf{a}(\gamma) \in \mathbf{A}_V \right\} = \\ \min_{\substack{\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{(2N-1) \times (2M-1)} \\ v \in \mathbb{C} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{NM}}} &\left\{ \frac{1}{2}(v + \text{trace}(\mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P}))) \right\} \\ \text{s. t. } &\begin{bmatrix} v & \mathbf{x}^H \\ \mathbf{x} & \mathbf{T}_{2D}(\mathbf{P}) \end{bmatrix} \succeq 0 \\ &\|\mathbf{x} - \mathbf{x}(l)\|_2^2 \leq \epsilon \end{aligned} \quad (14)$$

从式(11)~(14)中可以得出 VANM 优化模型中半定约束矩阵的维数为 $(NM+1) \times (NM+1)$,这就直接导致了 VANM 的高计算量,当维数 N 和 M 较大时甚至到了不可接受的地步。

2.2 解耦原子范数最小化算法

根据文献[9],由(7)可以得到另一种矩阵形式的原子集合:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_M &= \{\mathbf{a}_x(\alpha_k) \mathbf{a}_y^T(\beta_k), \alpha_k, \beta_k \in [0, 2\pi]\} = \\ &= \{\mathbf{A}_\gamma, \gamma \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中的每一个原子为秩 1 矩阵,在单快拍情况下对应的原子范数为:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}(l)\|_{\mathbf{A}_M} &= \inf \left\{ \sum_k |s_{k,l}| \mid \mathbf{X}(l) = \right. \\ &\left. \sum_k s_{k,l} \mathbf{A}(\gamma), \mathbf{A}(\gamma) \in \mathbf{A}_M \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

为从式(16)中求出各维度的 DOA,引入以下定理。

定理 对于一个 $N \times M$ 的数据矩阵:

$$\mathbf{X}(l) = \sum_{k=1}^K s_{k,l} \mathbf{A}(\gamma) \quad (17)$$

定义最小角度间隔为 $\Delta_{\min, x} = \min_{i \neq j} |\sin \alpha_{x,i} - \sin \alpha_{x,j}|$, $\Delta_{\min, y} = \min_{i \neq j} |\sin \beta_{y,i} - \sin \beta_{y,j}|$, 如果它们满足:

$$\Delta_{\min, x} \geq \frac{1.19}{[(N-1)/4]}, \Delta_{\min, y} \geq \frac{1.19}{[(M-1)/4]} \quad (18)$$

则式(17)为式(16)的最优解。进而,式(16)可

通过式(19)进行有效求解。

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{X}(l) \|_{A_M} = \\ & \min_{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{NM}} (\text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y))) \right\} \\ & \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \mathbf{X}^H(l) \\ \mathbf{X}(l) & \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 和 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$ 表示一重 Toeplitz 矩阵, 分别使用 $\mathbf{u}_x$ 和 $\mathbf{u}_y$ 作为其第 1 行进行构造。在有噪情况下, 式(19)将变为以下 SDP 求解模型:

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{NM}} (\text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y))) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \| \mathbf{X}(l) - \hat{\mathbf{X}} \|_F^2 \right\} \\ & \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \hat{\mathbf{X}}^H \\ \hat{\mathbf{X}} & \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式中: λ 为权重因子; $\hat{\mathbf{X}}$ 为待恢复的数据。

在得到 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 和 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$ 后, 便可通过以下分解得到 x 维和 y 维的 DOA,

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_x) = \mathbf{A}_x \mathbf{D}_x \mathbf{A}_x^H, \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) = \mathbf{A}_y \mathbf{D}_y \mathbf{A}_y^H \quad (21)$$

式中: $\mathbf{D}_x$ 、 $\mathbf{D}_y$ 为对角矩阵, 在得到各维度 DOA 后再通过配对程序得到最终的 2D DOA。

3 本文算法

3.1 算法步骤

为使 DANM 适用于多快拍, 本文对其进行如下改进。

步骤 1 将式(19)中的约束条件由 1 个改为 2 个对等条件, 得到如下 SDP 求解模型:

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{X}(l) \|_{A_M} = \min_{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{NM}} (\text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \right. \\ & \left. \text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)) + \text{trace}(\mathbf{Z}_1) + \text{trace}(\mathbf{Z}_2)) \right\} \\ & \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) & \mathbf{X}(l) \\ \mathbf{X}^H(l) & \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \mathbf{Y}(l) \\ \mathbf{Y}^H(l) & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

式中: $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 、 $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 表示埃尔米特 Toeplitz 矩阵。而 $\mathbf{X}(l)$ 、 $\mathbf{Y}(l)$ 在如下表述下可分别视为 x 维和 y 维的 1D 多快拍接收数据^[11]。

$$\begin{cases} \mathbf{X}(l) = \mathbf{A}_x \mathbf{S} \mathbf{A}_y^T = \mathbf{A}_x \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_y = \mathbf{S} \mathbf{A}_y^T \\ \mathbf{Y}(l) = \mathbf{A}_y \mathbf{S} \mathbf{A}_x^T = \mathbf{A}_y \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_x = \mathbf{S} \mathbf{A}_x^T \end{cases} \quad (23)$$

虽然文献[11]中提到一种次优的完全分解的解耦方法, 即对两个维度分别使用 1D ANM 进行计算, 但本文算法并非该次优方法的复制。原因如下:

1) 本文算法只需 1 个优化求解模型, 而文献[11]中方法需要 2 个。

2) 文献[11]分析到该完全分离的次优解耦方法忽视了 2 个维度的联合信息, 而本文算法将 2 个维

度的信息约束于 1 个目标函数, 保留了 2 个维度的联合信息。

步骤 2 为使多快拍数据能够代入式(19)中运算求解而不增加模型的维度, 本文参考文献[17]中 V. C 大快拍降维部分内容, 分别使用 $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Y}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{R}_x$ 、 $\mathbf{R}_y$ 替换式(19)中的单快拍数据 $\mathbf{X}(l)$ 、 $\mathbf{Y}(l)$, 得到最终的多快拍 DANM SDP 求解模型如下。

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{X} \|_{A_M} = \min_{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{NM}} (\text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \right. \\ & \left. \text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)) + \text{trace}(\mathbf{Z}_1) + \text{trace}(\mathbf{Z}_2)) \right\} \\ & \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) & \mathbf{R}_x \\ \mathbf{R}_x^H & \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \mathbf{R}_y \\ \mathbf{R}_y^H & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

相应地, 在有噪情况下, 令 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 、 $\hat{\mathbf{R}}_y$ 表示待恢复的接收数据协方差估计变量, 则求解模型变为如下形式

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{R}}_y} \left\{ \frac{\lambda}{2\sqrt{NM}} (\text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \text{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)) + \right. \\ & \left. \text{trace}(\mathbf{Z}_1) + \text{trace}(\mathbf{Z}_2) + \frac{1}{2} \| \mathbf{R}_x - \hat{\mathbf{R}}_x \|_F^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \| \mathbf{R}_y - \hat{\mathbf{R}}_y \|_F^2 \right\} \\ & \text{s. t.} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) & \hat{\mathbf{R}}_x \\ \hat{\mathbf{R}}_x^H & \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \hat{\mathbf{R}}_y \\ \hat{\mathbf{R}}_y^H & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (25)$$

在本文中加权因子 λ 的取值与文献[6]的 3.2 节选择正则化参数中阵元个数大于 3 时的取值一致。

步骤 3 通过 CVX 工具箱求得 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)$ 和 $\mathbf{T}(\mathbf{u}_y)$, 分别使用 MUSIC 算法得出 x 维和 y 维的 DOA, 表示为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_x = (\hat{\alpha}_{x,1}, \hat{\alpha}_{x,2}, \dots, \hat{\alpha}_{x,K})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_y = (\hat{\beta}_{y,1}, \hat{\beta}_{y,2}, \dots, \hat{\beta}_{y,K})$ 。

步骤 4 通过如下配对程序进行配对得到 2D DOA。

1) 计算 $\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{a}_x^T(\hat{\alpha}_{x,i}) \mathbf{X}(l) \mathbf{a}_y(\hat{\beta}_{y,j})$, 其中 $\mathbf{X}(l)$ 为任一次快拍数据。

2) 通过 $\mathbf{P}_{i,j}$ 中 K 个较大值的下标索引得到 2D DOA。

3.2 复杂度计算

给出本文算法、DANM 和基于对偶的 2D ANM 算法的计算复杂度, 以便为后续数值仿真环节提供理论支撑。

SDP 求解器每一次迭代大约需要 $O(P^3 + P^2) = O(P^3)$ 步^[11], 迭代次数最多为 $O(\sqrt{P} \log(1/\epsilon))$ 。其中, P 表示 SDP 模型约束中的半定矩阵的大小, ϵ 表示恢复精度。因此, 总的时间复杂度为 $O(P^{3.5} \log(1/\epsilon))$ 。而对于范德蒙德分解, 其计算复杂度为 $O(P^2 L)$ 。其中 P 表示 Toeplitz 矩阵的大小, L 表示 Toeplitz 矩阵的秩。由此可得 DANM 算法的 SDP 求解计算

复杂度为 $O((N+M)^{3.5}\log(1/\epsilon))$, 范德蒙德分解计算复杂度为 $O((N^2+M^2)K)$ 。而本文算法相比于 DANM 在 SDP 模型上仅多了一个同等维数的约束半定矩阵, 且后续采用范德蒙德分解求取 DOA 的矩阵维数与 DANM 是相同的。因此, 本文算法的 SDP 求解复杂度应大于 $O((N+M)^{3.5}\log(1/\epsilon))$, 而小于 2 个独立优化约束中具有同等维数半定矩阵, 即小于 $O(2(N+M)^{3.5}\log(1/\epsilon))$ 。同时, 本文算法的范德蒙德分解计算复杂度同样为 $O((N^2+M^2)K)$ 。

又根据文献[8], 基于对偶的 2D ANM 的计算复杂度为 $O((NM+L)^{3.5}\log(1/\epsilon) + UVL(NM+1))$ 。其中 L 表示快拍数, U, V 分别表示 2 个维度 DOA 搜索的次数。

4 数值仿真

本文数值仿真部分在一台 Intel(R) Core(TM) i5-5200U@2.2 GHz 处理器上完成, SDP 模型使用 CVX 工具箱进行求解, 统计误差分析采用均方根误差 (root mean squared error, RMSE) 及其平方 (均方误差)。其中, N 表示蒙特卡罗仿真次数。

$$RMSE =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2 \times NK} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K [(\hat{\alpha}_k^i - \alpha_k^i)^2 + (\hat{\beta}_k^i - \beta_k^i)^2]} \quad (26)$$

4.1 角度估计性能分析

假设 $N=M=10, K=3, x, y$ 维入射角度分别为 $\alpha_x = [-35^\circ, 2^\circ, 31^\circ], \beta_y = [-29^\circ, 5^\circ, 37^\circ]$ 。DANM、OMP 及本文算法均采用单快拍, SNR 取 0 dB; U-ESPRIT 采用 20 次快拍, SNR 取 10 dB, OMP 网格间隔取 2° 。从图 2 中可以看出 DANM 和本文算法可以准确地估计出 3 个信号源的 2D DOA, 而 OMP 算法遭受了严重的网格失配问题, 这一结果与信号源角度和网格间隔的设置相对应。可见, 在 $[-40^\circ, 40^\circ] \times [-40^\circ, 40^\circ]$ 的空域范围内, 只有 x 维中的 2° 落在网格上, 但其 y 维对应的角度 5° 又不在网格上, 因此导致 OMP 算法整体估计失效。而 U-ESPRIT 算法作为子空间类经典超分辨率算法在既定条件下的估计精度相比于本文算法和 DANM 明显需要更大的快拍和更高的 SNR。

图 3 中, 对 U-ESPRIT、DANM 及本文算法在 SNR 取 0 : 5 : 20 dB 时对 3 个信源的 2D DOA 估计 RMSE 进行了 50 次蒙特卡罗仿真。其中 U-ESPRIT 采用 200 次快拍, 本文算法采用 5 次快拍, DANM 采用单快拍。从仿真结果来看, 图 3 进一步体现了 ANM 类算法相比于子空间类算法在估计精度上的优势, 同时, 基于多快拍的 DANM 相比原 DANM 在估计精度上取得了较大的提升。

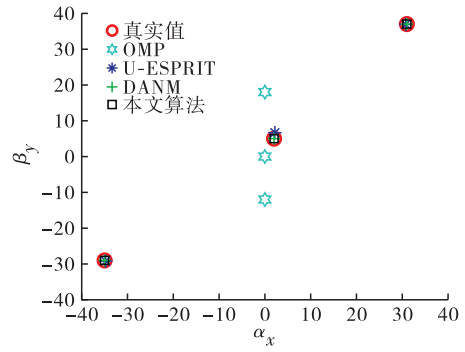


图 2 不同算法的 2D DOA 估计

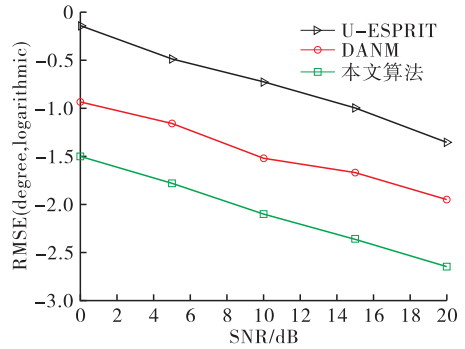


图 3 RMSE 性能比较

4.2 运行时间比较

假设 $K=2$, 在图 4 中 $N=M=8:22$, DANM 采用单快拍, 本文算法采用 200 次快拍, 2 个独立 ANM 求解的次优 DANM^[11] 采用 200 次快拍; 在图 5 中 $N=M=8:20$, 基于对偶的 2D ANM 和本文算法均采用 5 次快拍。为了更公平地进行比较, 运行时间均以 cvx_cputime 进行统计, 该时间也是各算法所需运行时间的主要部分。从图 4 来看, 虽然本文算法采用 200 次快拍, 但在 $N=M=22$ 时所需运行时间相比单快拍的 DANM 仅增加了 0.812 s, 而次优 DANM 的运行时间远大于本文算法, 近似为 DANM 的 2 倍。在图 5 中可以清晰地看到, 本文算法相比基于对偶的 2D ANM 在运行时间上显著降低, 在 2 个维度的维数都增加到 20 时, 基于对偶的 2D ANM 需要 1 749.343 75 s, 而本文算法仅需 11.406 3 s。

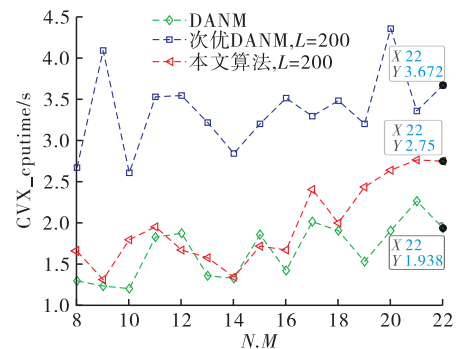


图 4 解耦 ANM 算法运行时间比较

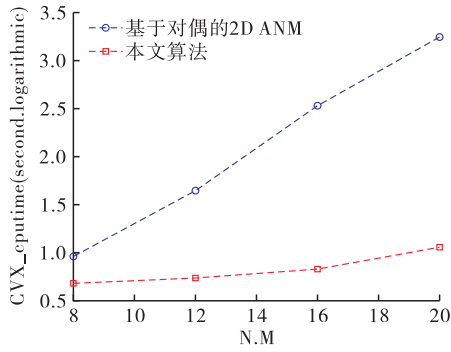


图5 本文算法与基于对偶的2D ANM在多快拍下的运行时间比较

4.3 无噪情况下的稀疏恢复能力比较

假设 $N=M=10, K=4$, 2个维度的DOA分别为 $\alpha_x = [-5^\circ, 8^\circ, 17^\circ, 31^\circ]$, $\beta_y = [0^\circ, 10^\circ, 23^\circ, 37^\circ]$. DANM采用单快拍, 本文算法采用10个快拍, 针对每个稀疏信号分别采用50次蒙特卡罗仿真。仿真中采用数据压缩的形式构造稀疏信号, 数据压缩比定义为:

$$\rho = \frac{|K_x| |K_y|}{NM} \quad (27)$$

式中: $K_x \in [N]$, $|K_x| = 2, 3, \dots, 10$ 表示 x 维的阵元索引集合, $K_y \in [M]$, $|K_y| = 2, 3, \dots, 10$ 表示 y 维的阵元索引集合。令 $\Omega = K_x \times K_y$ 表示稀疏面阵的阵元索引集合, K_x 和 K_y 在满足集合个数要求的情况下进行随机选取, 相当于对阵元个数 ≥ 4 的任意稀疏面阵接收数据进行恢复。类似于文献[10], DANM和本文算法分别使用式(28)~(29)进行仿真计算。其中 $\mathbf{X}^\circ, \mathbf{R}_x^\circ, \mathbf{R}_y^\circ$ 分别表示对应地完整接收数据及其协方差矩阵。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} = \underset{\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y}{\operatorname{argmin}} & \left\{ \frac{1}{2\sqrt{NM}} (\operatorname{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \operatorname{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y))) \right\} \quad (28) \\ \text{s. t. } & \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \hat{\mathbf{X}}^H \\ \hat{\mathbf{X}} & \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) \end{bmatrix} \succeq 0, \hat{\mathbf{X}}_\Omega = \mathbf{X}_\Omega^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_x, \hat{\mathbf{R}}_y = \underset{\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y}{\operatorname{argmin}} & \left\{ \frac{1}{2\sqrt{NM}} (\operatorname{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_x)) + \operatorname{trace}(\mathbf{T}(\mathbf{u}_y))) + \right. \\ & \left. \operatorname{trace}(\mathbf{Z}_1) + \operatorname{trace}(\mathbf{Z}_2) \right\} \quad (29) \\ \text{s. t. } & \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_x) & \hat{\mathbf{R}}_x \\ \hat{\mathbf{R}}_x^H & \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{u}_y) & \hat{\mathbf{R}}_y \\ \hat{\mathbf{R}}_y^H & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & \hat{\mathbf{R}}_{x\Omega} = \mathbf{R}_{x\Omega}^\circ, \hat{\mathbf{R}}_{y\Omega} = \mathbf{R}_{y\Omega}^\circ \end{aligned}$$

从图6中可以看到, DANM在压缩比为36%

时才能精确恢复所有数据, 而本文算法在压缩比为16%时便可以实现, 体现出更强的稀疏恢复能力。

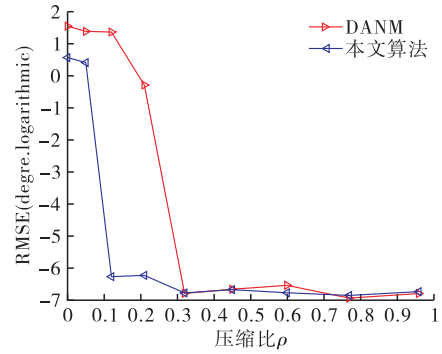


图6 稀疏恢复性能比较

4.4 快拍数对本文算法的影响

鉴于ANM类算法天然地适用于小快拍场景, 同时考虑到实际应用场景中计算效率的问题, 在本次实验中, 假设快拍数 $L = 5 : 5 : 100$, SNR取20 dB, 2个维度的DOA分别为 $\alpha_x = [3^\circ, 17^\circ, 31^\circ]$, $\beta_y = [10^\circ, 23^\circ, 37^\circ]$, 阵元数目与4.3节中相同, 采用50次蒙特卡罗仿真。

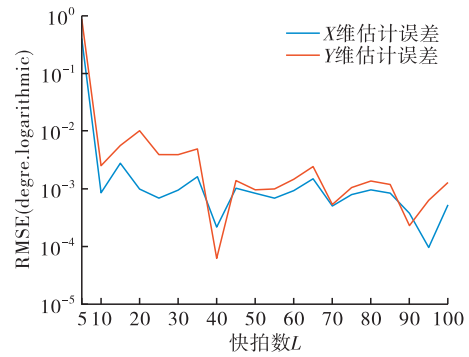


图7 快拍数对本文算法估计性能的影响

从图7中可以看出, 随着快拍数的增长, 2个维度的估计误差总体呈现下降趋势, 快拍数10和40为曲线的2个拐点。在快拍数达到10次以后, 估计误差基本处于0.01~0.001之间, 该结果表明本文算法同样适用于小快拍, 保持了ANM类算法的优势; 在快拍数达到40次以后, 估计误差又出现了明显的区域性下降。因此, 在实际应用中可根据阵元数、信源数及实时性要求等条件, 选择大于等于10次的快拍数进行数据处理。

4.5 信源数估计能力分析

本次实验采用均方误差作为评判依据, 并设定 $\text{RMSE} < 0.01$ 视为能够正确估计, 2个维度的DOA按照 $\alpha_x = [0^\circ, 10^\circ, \dots]$, $\beta_y = [10^\circ, 20^\circ, \dots]$ 进行设定, SNR取20 dB, 阵元数目与4.3节中相同, 采用50次蒙特卡罗仿真。根据文献[11], 理论上本文算法能够正确估计出9个信源, 但限于压缩感知类算法对稀疏性的要求, 从图8可见, 本文算法只能准确估计出5个。

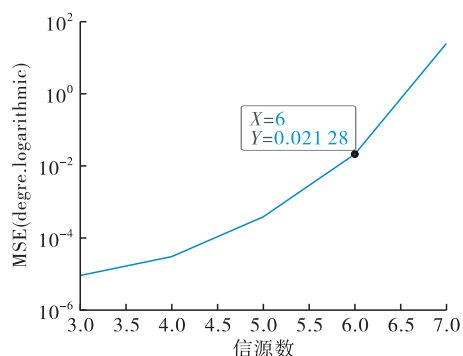


图 8 本文算法在不同信源数下的估计性能

5 结语

本文详细阐述了将 DANM 方法由单快拍推广至多快拍的一种改进方法和步骤,并对改进方法的角度估计性能、稀疏恢复能力、计算复杂度、对快拍数的依赖性等方面进行了对比分析。数值仿真结果表明,本文算法在保留 DANM 高效运算能力的同时,提高了有噪声信号的估计精度和无噪稀疏信号的恢复能力。

参考文献

- [1] HAARDT M, ZOLTOWSKI, MATHEWS C P, et al. 2D Unitary ESPRIT for Efficient 2D Parameter Estimation[C]//International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. [S. l.]: IEEE, 1995:2096-2099.
- [2] HUA Y. A Pencil-MUSIC Algorithm for Finding Two-Dimensional Angles and Polarizations Using Crossed Dipoles[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2002, 41(3):370-376.
- [3] TROPP J A. Greed is Good: Algorithmic Results for Sparse Approximation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10):2231-2242.
- [4] CAO Z, ZHOU L, DAI J. Sparse Bayesian Approach for DOD and DOA Estimation with Bistatic MIMO Radar[J]. IEEE Access, 2019, 7:155335-155346.
- [5] RAMASAMY D, VENKATESWARAN S, MADHOW U. Compressive Parameter Estimation in AWGN[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(8):2012-2027.
- [6] BHASKAR B N, TANG G, RECHT B. Atomic Norm Denoising with Applications to Line Spectral Estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23):5987-5999.
- [7] CHI Y, CHEN Y. Compressive Two-Dimensional Harmonic Retrieval via Atomic Norm Minimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(4):1030-1042.
- [8] WEN-GEN T, JIANG H, PANG S X. Grid-Free DOD and DOA Estimation for MIMO Radar via Duality-Based 2D Atomic Norm Minimization[J]. IEEE Access, 2019, 7: 60827-60836.
- [9] TIAN Z, ZHANG Z, WANG Y. Low-Complexity Optimization for Two-Dimensional Direction-of-Arrival Estimation via Decoupled Atomic Norm Minimization [C]//2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). [S. l.]: IEEE, 2017.
- [10] PAN J, TANG J, NIU Y. Fast Two-Dimensional Atomic Norm Minimization in Spectrum Estimation and Denoising[EB/OL] (2020-10-01). <https://arxiv.org/abs/1807.08606>.
- [11] ZHANG Z, WANG Y, TIAN Z. Efficient Two-Dimensional Line Spectrum Estimation Based on Decoupled Atomic Norm Minimization[J]. Signal Processing, 2019, 163:95-106.
- [12] ZHANG Y, ZHANG G, WANG X. Cross-Correlation Matrix-Based Atomic Norm Minimization for L-Shaped Array DOA Estimation[C]// 2017 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC). IEEE, 2017.
- [13] WU X, ZHU W P, YAN J. Two-Dimensional DOA Estimation with L-Shaped Array Based on the Cross-Covariance Matrix [J]. ICASSP. IEEE, 2018: 3256-3260.
- [14] AIHONG L U, GUO Y, LI N, et al. Efficient Gridless 2-D Direction-of-Arrival Estimation for Coprime Array Based on Decoupled Atomic Norm Minimization [J]. IEEE Access, 2020, 8:57786-57795.
- [15] TANG W G, JIANG H, ZHANG Q. Admm for Gridless DoD and DoA Estimation in Bistatic MIMO Radar Based on Decoupled Atomic Norm Minimization with One Snapshot[C]// 2019 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). [S. l.]: IEEE, 2019:1-5.
- [16] TANG W G, JIANG H, PANG S X. Gridless Angle and Range Estimation for FDA-MIMO Radar Based on Decoupled Atomic Norm Minimization [C]// 2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). [S. l.]: IEEE, 2019:4305-4309.
- [17] YANG Z, XIE L. Enhancing Sparsity and Resolution via Reweighted Atomic Norm Minimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(4): 995-1006.
- [18] YANG Z, XIE L, STOICA P. Vandermonde Decomposition of Multilevel Toeplitz Matrices with Application to Multidimensional Super-Resolution[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 62(6): 3685-3701.
- [19] YANG Z, XIE L. Exact Joint Sparse Frequency Recovery via Optimization Methods[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(19):5145-5157.

(编辑:徐敏)