犹豫模糊熵生成算法及在后勤补给基地选址评估中的应用

黄　林，袁修久，赵学军，郑明发
(空军工程大学基础部，西安，710051)

摘要　为了定量地刻画犹豫模糊信息的不确定性程度,将犹豫模糊元和区间值犹豫模糊元的熵推广成了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵。首先给出了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵与相似度的公理化定义,在此基础上提出了犹豫模糊集熵和相似度的一般公式,给出了犹豫模糊集的熵和相似度的生成算法。然后研究了犹豫模糊集的熵与相似度间的关系,提出了基于相似度的熵的一般公式。进一步把犹豫模糊集的熵与相似度的关系的有关结论及各自的一般公式和生成算法推广到区间值犹豫模糊集。最后给出了基于犹豫模糊集熵和相似度的后勤补给基地选址方案可靠性分析的数值例子。

关键词　犹豫模糊集;熵;相似度;后勤补给基地选址评估

DOI　10.3969/j.issn.1009-3516.2020.02.015

中图分类号　TP311　　**文献标志码**　A　　**文章编号**　1009-3516(2020)02-0097-09

Hesitant Fuzzy Entropy Generation Algorithms and Their Application in Location Evaluation of Logistics Supply Base

HUANG Lin, YUAN Xiujiu, ZHAO Xuejun, ZHENG Mingfa
(Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract　In order to quantitatively characterize the degree of uncertainty of hesitant fuzzy information, the entropy of hesitant fuzzy element and interval-valued hesitant fuzzy element are generalized to the entropy of hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets. First of all, the axiomatic definitions of entropy and similarity measure of hesitant fuzzy sets and interval-valued hesitant fuzzy sets are given. On this basis, a generalized formulae of entropy and similarity measure is proposed. The algorithms for generating entropy and similarity of hesitant fuzzy sets are given. Then, the relationship between the entropy and the similarity measure of the hesitant fuzzy sets is studied, and the generalized similarity-based entropy formulae are proposed. Furthermore, the relevant conclusions of the relationship between the entropy and the similarity of the hesitant fuzzy set and their respective general formulas and generating algorithms are extended to that of interval-valued hesitant fuzzy sets. Finally, a numerical example of the reliability analysis of the logistics supply base location scheme based on the entropy and similarity of hesitant fuzzy sets is given.

收稿日期: 2019-08-27
基金项目: 国家自然科学基金(11671007);陕西省自然科学基金(2019JM-271)
作者简介: 黄　林(1996—),男,湖南常德人,硕士生,主要从事系统仿真研究。E-mail:huanglin199610@163.com

引用格式: *黄林,袁修久,赵学军,等.犹豫模糊熵生成算法及在后勤补给基地选址评估中的应用[J].空军工程大学学报(自然科学版),2020,21(2):97-105. HUANG Lin, YUAN Xiujiu, ZHAO Xuejun, et al. Hesitant Fuzzy Entropy Generation Algorithms and Their Application in Location Evaluation of Logistics Supply Base[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2020, 21(2): 97-105.*

Key words hesitant fuzzy sets; entropy; similarity measure; location evaluation of logistics supply base

为了描述事物“亦此亦彼”的模糊性,Zadeh 在 1965 年提出了模糊集的概念[1]。Torra[2] 和 Narukawa[3] 把模糊集推广成了犹豫模糊集,Cheng 等[4] 又将犹豫模糊集推广为区间值犹豫模糊集,并将其应用于决策分析。

犹豫模糊信息测度包括距离、相似度和熵等,已被广泛应用于各个领域,例如模式识别[5]、医疗诊断、聚类分析[6]、多属性决策[7]以及图像处理等。

一方面,许多研究者提出了不同的距离、相似度和熵的度量方法[8-12]。另一方面,许多学者研究了用一种犹豫模糊信息测度来构造另一种信息测度的方法。Farhadinia[13] 研究了犹豫模糊熵与距离之间的关系,提出了基于距离来构造犹豫模糊集熵公式的方法[9,13-14]。此外,许多学者研究了扩展的犹豫模糊集的信息测度。如犹豫模糊语言值集的距离[15],对偶犹豫模糊集的熵[16] 和区间值犹豫模糊集的相似度等[17-18]。

现有文献给出了多种犹豫模糊元和区间值犹豫模糊元的熵和相似度的具体表达式,但是应用背景不同对相关公式要求也不同,构造新的犹豫模糊熵和相似度公式常常比较困难。因此,提出犹豫模糊集的熵和相似度的生成算法是值得研究的问题。

本文推广定义了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵和相似度,提出了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵和相似度的一般公式,给出了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵和相似度的生成算法,研究了犹豫模糊集的相似度与熵之间的关系,并给出了构造犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的具体熵的一般方法。

1 犹豫模糊集的概念

定义 1.1 设 X 为给定的论域,称 $A=\{<x,h_A(x)>|x\in X\}$ 为 X 上的犹豫模糊集。其中,$h_A(x)$是由区间$[0,1]$中的若干个数构成的集合,表示元素 x 属于集合 A 的可能的隶属度构成的集合。称 $h_A(x)$为犹豫模糊元。

若 $\forall x\in X$,$h_A(x)=\{0\}$,则 A 为空集$\varnothing$;若 $\forall x\in X$,$h_A(x)=\{1\}$,则 A 为全集 X。

论域 X 上的全体犹豫模糊集构成的集合,记为 $HF(X)$。

定义 1.2[14] 设 X 为给定的论域,$D[0,1]$表示区间$[0,1]$的所有闭子区间构成的集合。称 $A=\{<x,h_A(x)>|x\in X\}$为论域 X 上的区间值犹豫模糊集。其中,$h_A(x)$为 $D[0,1]$的有限子集,表示元素 x 属于集合 A 的所有可能区间隶属度构成的集合,$h_A(x)$称为区间值犹豫模糊元。

设 $h_A(x)=\{\gamma|\gamma\in h_A(x)\}$,$\gamma=[\gamma^-,\gamma^+]$是一个区间数。区间值犹豫模糊元 $h_A(x)$的补为 $h_A^c(x)=\{[1-\gamma^+,1-\gamma^-]|\gamma\in h_A(x)\}$。

论域 X 上的全体区间值犹豫模糊集构成的集合,记为 $IVHF(X)$。

为了方便计算区间值犹豫模糊元的熵和相似度,参照文献[8],本文作以下假设:

1)区间值犹豫模糊元 $h_A(x)$中的元素按升序排序,$h_A^{(i)}(x)$表示 $h_A(x)$中从小到大的第 i 个元素;

2)两个区间值犹豫模糊元 $h_A(x)$和 $h_B(x)$,若 $l(h_A(x))\neq l(h_B(x))$,记 $l_x=\max\{l(h_A(x)),l(h_B(x))\}$,其中 $l(h_A(x))$表示区间值犹豫模糊元 $h_A(x)$中元素的个数。对于元素较少的区间值犹豫模糊元,重复添加最大的元素直到它的元素个数为 l_x。

定义 1.3 设 X 为论域,设 $A,B\in IVHF(X)$,且 $\forall x\in X$,$l(h_A(x))=l(h_B(x))=l_x$,则 A 包含于 B 和 A 与 B 相等分别定义为:

$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x\in X,h_A^{(i)}(x)\leqslant h_B^{(i)}(x),\Leftrightarrow [h_A^{(i)-}(x),h_A^{(i)+}(x)]\leqslant[h_B^{(i)-}(x),h_B^{(i)+}(x)]\Leftrightarrow h_A^{(i)-}(x)\leqslant h_B^{(i)-}(x),h_A^{(i)+}(x)\leqslant h_B^{(i)+}(x),i=1,2,\cdots,l_x$。

$A=B\Leftrightarrow \forall x\in X,h_A^{(i)}(x)=h_B^{(i)}(x)$,即$[h_A^{(i)-}(x),h_A^{(i)+}(x)]=[h_B^{(i)-}(x),h_B^{(i)+}(x)],i=1,2,\cdots,l_x$。

犹豫模糊集是区间值犹豫模糊集的特例。因此,假设 1)与假设 2)及**定义 1.3** 同样适用于犹豫模糊集。

2 犹豫模糊集的熵和相似度的一般公式

2.1 犹豫模糊集的熵的公理化定义

定义 2.1[10] 设 A 为论域 X 上的犹豫模糊集,$h_A(x)$为 A 的犹豫模糊元,映射 $E:HF(X)\to[0,1]$,$A\mapsto E(A)$,称 $E(A)$是犹豫模糊集 A 的熵,若 $E(A)$满足:

1)$E(A)=0$,当且仅当 $A=\varnothing$或 $A=X$;

2)$E(A)=1$,当且仅当$\forall x\in X$,有:

$h_A^{(i)}(x)+h_A^{(l_x-i+1)}(x)=1,i=1,2,\cdots,l_x$,其中 l_x 为 $h_A(x)$中元素的个数;

3）当 $h_B^{(i)}(x)+h_B^{(l_x^{AB}-i+1)}(x)\leqslant 1$，$h_A^{(i)}(x)\leqslant h_B^{(i)}(x)$时，或当 $h_B^{(i)}(x)+h_B^{(l_x^{AB}-i+1)}(x)\geqslant 1$，$h_A^{(i)}(x)\geqslant h_B^{(i)}(x)$时，有 $E(A)\leqslant E(B)$，$i=1,2,\cdots,l_x^{AB}$，$l_x^{AB}=\max\{l(h_A(x)),l(h_B(x))\}$；

4）$E(A)=E(A^c)$。

根据给出的犹豫模糊集熵的公理化定义，提出犹豫模糊集的熵的一般公式。

2.2　犹豫模糊集的熵的一般公式

定理 2.1　设 A 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的犹豫模糊集，$h_A(x_j)$为 A 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元，映射 $E:HF(X)\to[0,1]$，$A\mapsto E(A)$

$$=g\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)\right],$$

式中：c_j 为正实数，$f_i:[0,1]\to[0,+\infty)$满足：

①$\forall x\in[0,1]$，$f_i(x)=f_i(1-x)$；②$f_i(0)=0$；③$f_i(x)$在$[0,1]$上严格递增。

记 $a=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(0.5)$，$g:[0,a]\to[0,1]$严格递增，且 $g(0)=0$，$g(a)=1$，则 $E(A)$ 为犹豫模糊集 A 的熵。

证明

1）当 $A=\varnothing$或者当 $A=X$ 时，则 $h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)=0$ 或 2。由于 $f_i(0)=f_i(1)=0$，可得 $E(A)=g(0)=0$。

反之，当 $E(A)=0$ 时，由于 g 在$[0,a]$上严格递增，且 $g(0)=0$，有：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)=0。$$

由于 $f(0)=f(1)=0$，从而有 $h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)=0$ 或 2，$j=1,2,\cdots,n$。可得 $h_A^{(i)}(x_j)=0$，即 $A=\varnothing$；或者 $h_A^{(i)}(x_j)=1$，即 $A=X$。

2）当 $h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)=1$ 时，由于 $a=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(0.5)$，可得 $E(A)=g(a)=1$。

反之，当 $E(A)=1$ 时，由于 g 在$[0,a]$上严格递增，且 $g(a)=1$，有：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)=a。$$

由于 f_i 在$[0,0.5]$上严格递增，$f_i(x)=f_i(1-x)$，可得 $h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)=1$。

3）当 $h_B^{(i)}(x_j)+h_B^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)\leqslant 1$，且 $h_A^{(i)}(x_j)\leqslant h_B^{(i)}(x_j)$时，有 $h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)\leqslant h_B^{(i)}(x_j)+h_B^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)\leqslant 1$。

由于 f_i 在$[0,0.5]$上严格递增，可知：

$$f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)\leqslant f_i\left(\frac{h_B^{(i)}(x_j)+h_B^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)\leqslant f_i\left(\frac{1}{2}\right)$$

由于 $g:[0,a]\to[0,1]$严格递增，则 $E(A)\leqslant E(B)$。

同理当 $h_B^{(i)}(x_j)+h_B^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)\geqslant 1$，且 $h_A^{(i)}(x_j)\geqslant h_B^{(i)}(x_j)$时，可以证得 $E(A)\leqslant E(B)$。

4）

$$E(A^c)=g\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\left(\frac{1-h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)+1-h_A^{(i)}(x_j)}{2}\right)\right]=g\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)\right]$$

可证得 $E(A^c)=E(A)$。证毕。

采用**定理 2.1** 可构造出具体的犹豫模糊集的熵公式：

$$E_1(A)=\frac{1}{n(\sqrt{2}-1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\cdot\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\left(\sin\frac{\pi(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{4}+\sin\frac{\pi(2-h_A^{(i)}(x_j)-h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{4}-1\right)$$

$$E_2(A)=\frac{1}{n(2^{(1-s)t}-1)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\cdot\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\left(\left(\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)^s+\left(1-\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)^s\right)^t-1\right)$$

$$E_3(A)=\frac{-1}{n\ln 2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_j}\sum_{i=1}^{l_j}\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_j-i+1)}(x_j)}{2}\cdot\ln\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_j-i+1)}(x_j)}{2}+\frac{2-h_A^{(i)}(x_j)-h_A^{(l_j-i+1)}(x_j)}{2}\cdot\ln\frac{2-h_A^{(i)}(x_j)-h_A^{(l_j-i+1)}(x_j)}{2}\right)$$

$$E_4(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\left|\frac{1}{2}-\right|\frac{1}{2}-\frac{(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{2}\left|\right|^p\right)^{1/p}$$

定理 2.2　设 A 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的犹豫模糊集，$h_A(x_j)$为 A 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元，映射 $E:HF(X)\to[0,1]$，

$$A\mapsto E(A)=g\left[\sum_{j=1}^{n}c_j\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\left(f_i\left(\frac{h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)}{2}\right)\right)\right]$$

式中：c_j 为正实数。$f_i:[0,1]\to[0,+\infty)$满足：①$\forall x\in[0,1]$，$f_i(x)=f_i(1-x)$；②$f_i(0)=0$；③$f_i(x)$在$[0,0.5]$上严格递增。

记 $a=\sum_{j=1}^{n}c_j\max\limits_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}(f_i(0.5))$，$g$：$[0,a]\to[0,1]$ 严格递增，且 $g(0)=0$，$g(a)=1$，则 $E(A)$ 为犹豫模糊集 A 的熵。

定理 2.2 的证明过程与**定理 2.1** 的证明过程类似。选取不同的函数 g 与 f_i，能够构造出多种现有文献没有的具体的犹豫模糊集熵公式。

$$E_5(A)=\frac{1}{n(\sqrt{2}-1)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\left\{\sin\frac{\pi(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{4}+\sin\frac{\pi(2-h_A^{(i)}(x_j)-h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{4}-1\right\}$$

$$E_6(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\left\{\left|0.5-\left|0.5-\frac{(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j))}{2}\right|\right|^p\right\}\right)^{\frac{1}{p}}$$

综上，依据**定理 2.1**、**定理 2.2** 可以给出犹豫模糊集的熵的生成算法。

下面给出基于**定理 2.1** 的犹豫模糊集熵的生成算法步骤：

1)选取具体的函数 $f_i(x)$ 和 $g(x)$；

2)验证 $f_i(x)$ 和 $g(x)$ 是否满足**定理 2.1** 的条件；

3)由**定理 2.1** 提出的犹豫模糊集的熵的一般公式，生成具体的犹豫模糊集熵公式。

2.3 犹豫模糊集的相似度的一般公式

2.3.1 犹豫模糊集相似度的公理化定义

定义 2.2[10] 设 A 和 B 为论域 X 上的 2 个犹豫模糊集，称 $S(A,B)$ 为犹豫模糊集 A，B 的相似度，若 $S(A,B)$ 满足：

1)$S(A,B)=0$，当且仅当 $A=\varnothing$，$B=X$ 或 $A=X$，$B=\varnothing$；

2)$S(A,B)=1$，当且仅当 $A=B$；

3)若 $A\subseteq B\subseteq C$，或者 $A\supseteq B\supseteq C$，有 $S(A,C)\leqslant S(A,B)$，$S(A,C)\leqslant S(B,C)$；

4)$S(A,B)=S(B,A)$。

2.3.2 犹豫模糊集的相似度的一般公式

定理 2.3 设 A 和 B 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的 2 个犹豫模糊集，其中 $h_A(x_j)$，$h_B(x_j)$ 分别为 A 和 B 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元，设：

$$S(A,B)=1-g\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))\right]$$

式中：c_j 为正实数。f_i：$[-1,1]\to[0,1]$ 满足：① $\forall x\in[-1,1]$，$f_i(x)=f_i(-x)$；② $f_i(0)=0$，$f_i(1)=1$；③ $f_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增。

记 $a=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_j$，$g$：$[0,a]\to[0,1]$ 严格递增，$g(0)=0$ 且 $g(a)=1$，则 $S(A,B)$ 为犹豫模糊集 A，B 的相似度。

证明

1)当 $A=\varnothing$，$B=X$ 或 $A=X$，$B=\varnothing$ 时，有 $h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)=-1$ 或 1。由于 $f_i(-1)=f_i(1)=1$，可得 $S(A,B)=1-g(a)=0$。

反之，当 $S(A,B)=0$ 时，由于 $g(a)=1$，可知 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))=a$。由于 $f_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增，且 $f_i(-1)=f_i(1)=1$，可得 $h_A^{(i)}(x_j)=0$，$h_B^{(i)}(x_j)=1$，或者 $h_A^{(i)}(x_j)=1$，$h_B^{(i)}(x_j)=0$，$j=1,2,\cdots,n$。即 $A=\varnothing$，$B=X$，或者 $A=X$，$B=\varnothing$。

2)当 $A=B$ 时，$h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)=0$。

由于 $f_i(0)=0$，可知 $f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))=0$。由于 $g(0)=0$，有 $S(A,B)=1-g(0)=1$。

反之，当 $S(A,B)=1$ 时，由于 g 在 $[0,a]$ 上严格递增，$g(0)=0$，有 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))=0$。由于 $f_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增且 $f_i(0)=0$，从而 $h_A^{(i)}(x_j)=h_B^{(i)}(x_j)$，$j=1,2,\cdots,n$，即 $A=B$。

3)当 $h_A^{(i)}(x_j)\leqslant h_B^{(i)}(x_j)\leqslant h_C^{(i)}(x_j)$ 时，有：$h_A^{(i)}(x_j)-h_C^{(i)}(x_j)\leqslant h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\leqslant 0$，及 $h_A^{(i)}(x_j)-h_C^{(i)}(x_j)\leqslant h_B^{(i)}(x_j)-h_C^{(i)}(x_j)\leqslant 0$。

由于 $f_i(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增，$f_i(-x)=f_i(x)$，以及 g：$[0,a]\to[0,1]$ 严格递增，可证得：

$S(A,C)\leqslant S(A,B)$，$S(A,C)\leqslant S(B,C)$。

同理当 $h_A^{(i)}(x_j)\geqslant h_B^{(i)}(x_j)\geqslant h_C^{(i)}(x_j)$ 时，可以证得 $S(A,C)\leqslant S(A,B)$，$S(A,C)\leqslant S(B,C)$。

4)$S(B,A)=1-g\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_B^{(i)}(x_j)-h_A^{(i)}(x_j))\right]=1-g\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))\right]$。

可得 $S(A,B)=S(B,A)$。证毕。

选取不同的函数 f_i 和 g，可以构造出具体的犹豫模糊集相似度公式。

$$S_1(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\left|h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\right|\right]$$

$$S_2(A,B)=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid^2\right)\right]^{1/2}$$

$$S_3(A,B)=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_j}\sum_{i=1}^{l_j}\left(1-\cos\frac{\pi(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))}{2}\right)\right]$$

定理 2.4　设 A 和 B 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的 2 个犹豫模糊集，其中 $h_A(x_j)$，$h_B(x_j)$分别为 A 和 B 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元，设

$$S(A,B)=1-g\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_j\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\{f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))\}\right]$$

式中：c_j 为正实数。f_i：[−1,1]→[0,1]满足：① $\forall x\in[-1,1]$，$f_i(x)=f_i(-x)$；② $f_i(0)=0$，$f_i(1)=1$；③ $f_i(x)$在[0,1]上严格递增。

记 $a=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_j$，$g$：$[0,a]\to[0,1]$严格递增，$g(0)=0$ 且 $g(a)=1$，则 $S(A,B)$为犹豫模糊集 A 和 B 的相似度。

定理 2.4 的证明过程与**定理 2.3** 的证明过程类似。函数 g 与 f_i 选取不同的函数，可以构造出具体的犹豫模糊集的相似度公式。如：

$$S_4(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\{\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid\}$$

$$S_5(A,B)=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\{\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid^2\}\right]^{1/2}$$

$$S_6(A,B)=1-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{1\leqslant i\leqslant l_j}\left\{1-\frac{\cos\pi(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))}{2}\right\}\right]$$

定理 2.5　设 A 和 B 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的 2 个犹豫模糊集，其中 $h_A(x_j)$，$h_B(x_j)$分别为 A 和 B 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$ 为 A 和 B 中犹豫模糊元的权值向量，满足 $\omega_j>0$，$j=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则：

$$S(A,B)=1-g\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j c_j\left(\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))+\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\{f_i(h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j))\}\right)\right]$$

式中：c_j 为正实数。f_i：[−1,1]→[0,1]满足：① $\forall x\in[-1,1]$，$f_i(x)=f_i(-x)$；② $f_i(0)=0$，$f_i(1)=1$；③ $f_i(x)$在[0,1]上严格递增。

记 $a=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j c_j$，$g$：$[0,a]\to[0,1]$严格递增，$g(0)=0$ 且 $g(a)=1$，则 $S(A,B)$为犹豫模糊集 A，B 的混合加权相似度。

定理 2.5 的证明过程与**定理 2.3** 类似。选取具体函数 g 和 f_i，可以生成具体的犹豫模糊集的混合加权相似度公式。如：

$$S_7(A,B)=1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid+\max_{1\leqslant i\leqslant l_{x_j}}\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid\right)$$

此外，在**定理 2.3** 和**定理 2.4** 中考虑各犹豫模糊元的权重时，可生成犹豫模糊集的加权相似度公式。

$$S_8(A,B)=1-\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left[\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid\right]$$

$$S_9(A,B)=1-\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid^2\right)\right]^{1/2}$$

$$S_{10}(A,B)=1-\sum_{j=1}^{n}\omega_j\max_i\{\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid\}$$

$$S_{11}(A,B)=1-\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j\max_i\{\mid h_A^{(i)}(x_j)-h_B^{(i)}(x_j)\mid^2\}\right]^{1/2}$$

综上，依据**定理 2.3**、**定理 2.4** 及**定理 2.5** 可以给出犹豫模糊集的相似度的生成算法。

下面给出基于**定理 2.3** 的犹豫模糊集相似度的生成算法步骤：

1）选取具体的函数 $f_i(x)$和 $g(x)$；

2）验证 $f_i(x)$和 $g(x)$是否满足**定理 2.3** 的条件；

3）由**定理 2.3** 提出的犹豫模糊集的相似度的一般公式，生成具体的犹豫模糊集相似度公式。

2.4　犹豫模糊集的相似度与熵的关系

定理 2.6[10]　设 X 为论域，A 为犹豫模糊集，则 $E(A)=S(A,A^c)$为犹豫模糊集 A 的熵。

由**定理 2.3** 和**定理 2.6** 不难得到**定理 2.7**。

定理 2.7　设 A 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上

的犹豫模糊集,$h_A(x_j)$为 A 的相应于 X 的元素 x_j 的犹豫模糊元,映射 $E:HF(X)\to[0,1]$,

$$A\mapsto E(A)=1-g\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)-1)\Big]$$

式中:c_j 为正实数。$f_i:[-1,1]\to[0,1]$满足:① $\forall x\in[-1,1]$,$f_i(x)=f_i(-x)$;② $f_i(0)=0$,$f_i(1)=1$;③ $f_i(x)$在$[0,1]$上严格递增。

记 $a=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_j$,$g:[0,a]\to[0,1]$严格递增,$g(0)=0$,$g(a)=1$,则 $E(A)=S(A,A^c)$ 为犹豫模糊集 A 的熵。

$$E_7(A)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}|h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)-1|$$

$$E_8(A)=1-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}|h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)}(x_j)-1|^2}\ \cdot$$

$$E_9(A)=1-\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_j}\sum_{i=1}^{l_j}\Big(1-\cos\frac{\pi(h_A^{(i)}(x_j)+h_A^{(l_j-i+1)}(x_j)-1)}{2}\Big)\Big]$$

3 区间值犹豫模糊集熵和相似度的一般公式

3.1 区间值犹豫模糊集的熵的一般公式

定理 3.1 设 A 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的区间值犹豫模糊集,$h_A(x_j)$为 A 的相应于 X 的元素 x_j 的区间值犹豫模糊元,映射 $E:IVHF(X)\to[0,1]$,

$$A\mapsto E(A)=g\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i\Big(\frac{h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)+}(x_j)}{2}\Big)\Big]$$

式中:c_j 为正实数。$f_i:[0,1]\to[0,+\infty)$满足:① $\forall x\in[0,1]$,$f_i(x)=f_i(1-x)$;② $f_i(0)=0$;③ $f_i(x)$在$[0,0.5]$上严格递增。

记 $a=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(0.5)$,$g:[0,a]\to[0,1]$严格递增,且 $g(0)=0$,$g(a)=1$,则 $E(A)$为区间值犹豫模糊集 A 的熵。

定理 3.1 的证明过程与**定理 2.1** 的证明过程类似。类似于犹豫模糊集,通过熵的生成算法可以生成具体的区间值犹豫模糊熵公式。如:

$$E_{10}(A)=\frac{1}{n(\sqrt{2}-1)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\Big(\sin\frac{\pi(h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)+}(x_j))}{4}+\cos\frac{\pi(h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)+}(x_j))}{4}-1\Big)$$

$$E_{11}(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\Big|\frac{1}{2}-\Big|\frac{1}{2}-\frac{(h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l-i+1)+}(x_j))}{2}\Big|\Big|^p\Big)^{1/p}$$

3.2 区间值犹豫模糊集的相似度的一般公式

定理 3.2 设 A 和 B 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的 2 个区间值犹豫模糊集,其中 $h_A(x_j)$,$h_B(x_j)$分别为 A 和 B 的相应于 X 的元素 x_j 的区间值犹豫模糊元,设:

$$S(A,B)=1-g\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)-}(x_j)-h_B^{(i)-}(x_j),h_A^{(i)+}(x_j)-h_B^{(i)+}(x_j))\Big]$$

式中:c_j 为正实数。$f_i:[-1,1]\times[-1,1]\to[0,+\infty)$满足:① $\forall x\in[-1,1]$,$y\in[-1,1]$,有 $f_i(-x,-y)=f_i(x,y)$,$f_i(y,x)=f_i(x,y)$;② $f_i(0,0)=0$;③ $f_i(x,y)$分别关于 x,y 在$[0,1]$上严格递增。

记 $a=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(1,1)$,$g:[0,a]\to[0,1]$严格递增,$g(0)=0$,$g(a)=1$,则 $S(A,B)$ 为区间值犹豫模糊集 A,B 的相似度。

定理 3.2 的证明过程与**定理 2.3** 的证明过程类似。类似于犹豫模糊集,通过相似度生成算法可生成具体的区间值犹豫模糊集相似度公式。如:

$$S_{12}(A,B)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\max_i\{|h_A^{(i)-}(x_j)-h_B^{(i)-}(x_j)|,|h_A^{(i)+}(x_j)-h_B^{(i)+}(x_j)|\}$$

3.3 区间值犹豫模糊集的相似度与熵的关系

定理 3.3[14] 设 X 为论域,A 为区间值犹豫模糊集,则 $E(A)=S(A,A^c)$为区间值犹豫模糊集 A 的熵。

由**定理 3.2** 和**定理 3.3** 不难得到**定理 3.4**。

定理 3.4 设 A 为论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的区间值犹豫模糊集,$h_A(x_j)$为 A 的相应于 X 的元素 x_j 的区间值犹豫模糊元,设

$$E(A)=1-g\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f_i(h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)+}(x_j)-1,h_A^{(i)+}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)-}(x_j)-1)\Big]$$

式中：c_j 为正实数。$f_i:[-1,1]\times[-1,1]\to[0,+\infty)$满足：① $\forall x\in[-1,1],y\in[-1,1]$，有 $f_i(-x,-y)=f_i(x,y)$，$f_i(y,x)=f_i(x,y)$；② $f_i(0,0)=0$；③ $f_i(x,y)$分别关于 x,y 在$[0,1]$上严格递增。

记 $a=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}f(1,1)$，$g:[0,a]\to[0,1]$严格递增，且 $g(0)=0$，$g(a)=1$，则 $E(A)=S(A,A^c)$为区间值犹豫模糊集 A 的熵。

$$E_{12}(A)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{l_{x_j}}\sum_{i=1}^{l_{x_j}}\max_i\{|h_A^{(i)-}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)+}(x_j)-1|,|h_A^{(i)+}(x_j)+h_A^{(l_{x_j}-i+1)-}(x_j)-1|\}$$

4　后勤补给基地的选址评估分析

某联勤保障中心计划新建一个后勤补给基地，现有 4 个候选地址 $A_i(i=1,2,3,4)$可供选择，为了评估这些候选地址，选取 4 个主要评价指标：地理因素 C_1，作战因素 C_2，交通因素 C_3，成本因素 C_4[19-20]。为了便于专家准确全面的评价，其中每个因素又可通过一些详细的指标来衡量[21]。构建补给基地选址的评价指标体系见图 1。

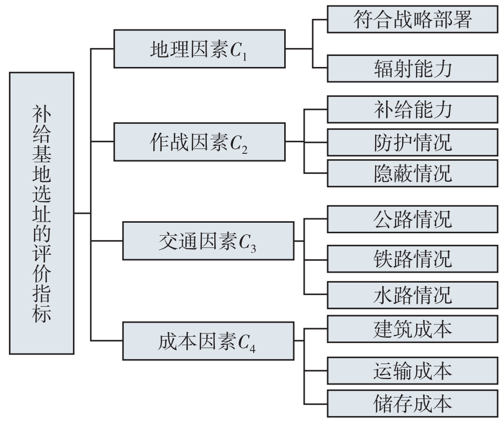

图 1　补给基地选址的评价指标体系

联勤保障中心邀请了相关领域的具有丰富专业背景、经验以及知识水平的专家对候选地址进行评估。为了全面准确的评价，采用犹豫模糊集来反映专家的评估信息。决策信息见表 1。

表 1　犹豫模糊决策信息

方案	地理因素 C_1	作战因素 C_2	交通因素 C_3	成本因素 C_4
A_1	{0.2,0.4,0.7}	{0.1,0.2,0.5,0.7}	{0.2,0.3,0.5,0.7,0.8}	{0.2,0.4,0.6}
A_2	{0.4,0.6,0.7}	{0.1,0.2,0.4,0.6}	{0.3,0.4,0.6,0.8,0.9}	{0.2,0.3,0.4}
A_3	{0.2,0.3,0.6}	{0.3,0.4,0.5,0.9}	{0.2,0.4,0.6,0.7,0.8}	{0.3,0.4,0.8}
A_4	{0.2,0.3,0.5}	{0.2,0.3,0.5,0.7}	{0.4,0.6,0.7,0.8,0.9}	{0.2,0.4,0.7}

参照文献[12]，采用犹豫模糊集的多属性决策模型处理后勤补给基地的选址评估问题。

首先，将决策数据代入到本文新构造的犹豫模糊集的熵公式 E_4，其中取 $p=2$，计算各属性的熵值 $E(C_j)$。基于求得的各个属性的熵值，代入公式 $\omega_j=\frac{1-E(C_j)}{n-\sum_{j=1}^{n}E(C_j)}$，得出评选对象各个属性的权重为 $\boldsymbol{\omega}=(0.266\,9,0.279\,1,0.188\,4,0.265\,6)^{\mathrm{T}}$。

其次，考虑到评选对象的属性 C_1,C_2,C_3 为利益型，属性 C_4 为成本型，算得正理想解和负理想解分别为 $\boldsymbol{A}^+=(0.7,0.9,0.9,0.2)$，$\boldsymbol{A}^-=(0.2,0.1,0.2,0.8)$。

然后，利用犹豫模糊集加权相似度公式 S_8 计算各方案 $A_i(i=1,2,3,4)$分别与正理想解和负理想解间的加权相似度 S_i^+ 和 S_i^-。由贴近度公式 $R_i=\frac{S_i^+}{S_i^++S_i^-}$算得各个方案与理想解之间的相对贴近度分别为$R_1=0.483\,6$，$R_2=0.533\,2$，$R_3=0.487\,3$，$R_4=0.492\,7$。

各个方案 $A_i(i=1,2,3,4)$的贴近度排序结果为 $A_2>A_4>A_3>A_1$。可知 A_2 为最优的补给基地的选址。

犹豫模糊集熵公式 E_4 中的参数 p 取不同的值时，计算各方案与理想解间的贴近度，结果见图 2。

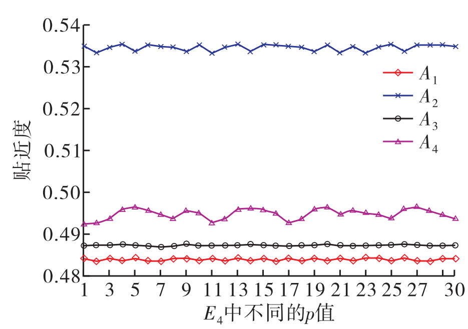

图 2　不同的 p 值对应的各方案的贴近度

从图 2 可以看出，犹豫模糊熵公式 E_4 中的参数 p 取不同的值，方案 A_2 总是最优的方案。

当熵公式发生改变后，各属性的权重可能会发生改变，为了确定决策结果是否具有一定的可靠性，下面将选取不同类型的犹豫模糊熵，对得到的决策

结果进行对比分析。

选取不同类型的犹豫模糊集的熵公式 E_2,E_3,E_4,E_5,E_7,E_9 和相似度公式 S_8 计算各方案与理想解间的贴近度,结果如图 3 所示。从图 3 可以看出,尽管我们采用不同类型的熵公式,方案 A_2 总是最优的方案。

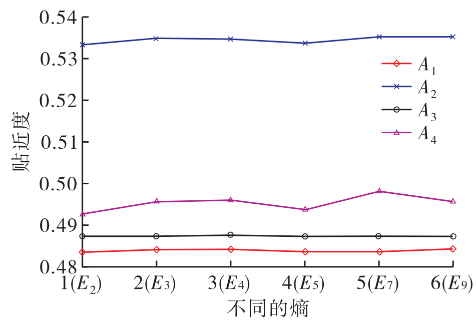

图 3 选 S_8 时不同的熵对应的各方案的贴近度

决策者根据自身偏好采用不同的相似度公式时,利用决策模型得到的决策结果也有可能会发生变化。选取犹豫模糊集的相似度公式 S_{10} 和熵公式 E_2,E_3,E_4,E_5,E_7,E_9 计算各方案与理想解间的贴近度,结果如图 4 所示。

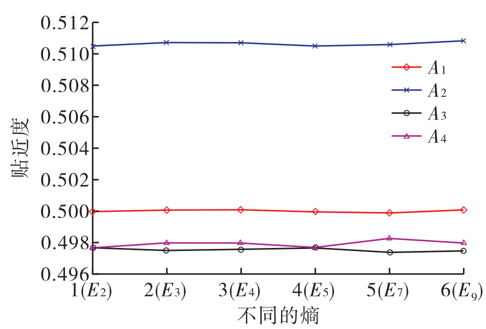

图 4 选 S_{10} 时不同的熵对应的各方案的贴近度

对比图 3 和图 4,尽管采用不同的相似度公式,出现了方案的排序不一致的情况,但方案 A_2 始终是最优的方案。

此外,选取本文提出的犹豫模糊集的混合加权相似度公式 S_7 来计算各方案与理想解间的贴近度,结果如图 5 所示,方案 A_2 仍然是最优的方案。

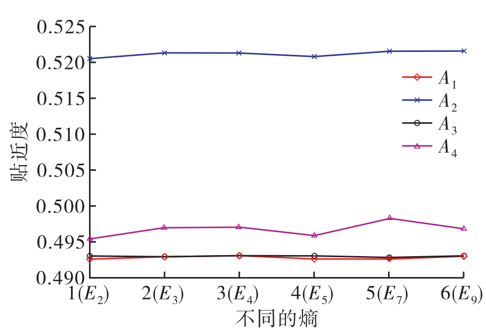

图 5 选 S_7 时不同的熵对应的各方案的贴近度

综合对比上述结果,可以看出:用不同类型的熵和相似度公式计算得出的贴近度的排序中,尽管方案的排序情况不一致,但方案 A_2 始终是最优的方案。说明最终决策有一定可靠性。因此,选择地址 A_2 作为新建的后勤补给基地的地址。

5 结语

本文推广定义了犹豫模糊集和区间值犹豫模糊集的熵与相似度,提出了犹豫模糊集的熵和相似度的一般公式,给出了犹豫模糊集熵和相似度的生成算法。并研究了犹豫模糊集的熵和相似度间的关系,提出了基于相似度构造熵的一般公式,把犹豫模糊集的熵和相似度间关系的有关结论及各自的一般化公式和生成算法推广到了区间值犹豫模糊集,从而为多属性决策中灵活地选择熵和相似度奠定了理论基础。下一步可以对犹豫模糊语言值集和对偶犹豫模糊集的信息测度及其应用进行研究与讨论。

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-356.

[2] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25:529-539.

[3] TORRA V, NARUKAWA Y. On the Hesitant Fuzzy Sets and Decision[C]//Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Jeju Island, Korea: IEEE, 2009:1378-1382.

[4] CHEN N, XU Z, XIA M. Interval-Valued Hesitant Preference Relations and Their Applications to Group Decision Making [J]. Knowledge Based Systems, 2013, 37: 528-540.

[5] SUN G, GUAN X, YI X, et al. Grey Relational Analysis between Hesitant Fuzzy Sets with Applications to Pattern Recognition[J]. Expert Systems with Applications, 2018, 92: 521-532.

[6] LV J, GUO S, GUO F. Study on Hesitant Fuzzy Information Measures and Their Clustering Application [EB/OL]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2019. http://doi.org/10.1155/2019/5370763.

[7] PARK J H, KWARK H E, KWUN Y C. Entropy and Cross-Entropy for Generalized Hesitant Fuzzy Information and Their Use in Multiple Attribute Decision Making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32(3): 266-290.

[8] XU Z, XIA M. Distance and Similarity Measures for Hesitant Fuzzy Sets[J]. Information Sciences, 2011, 181: 2128-2138.

[9] ZENG W, LI D, YIN Q. Distance and Similarity Measures Between Hesitant Fuzzy Sets and Their Application in

Pattern Recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2016, 84: 267-271.

[10] XU Z, XIA M. Hesitant Fuzzy Entropy and Cross-Entropy and Their Use in Multiattribute Decision-Making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[11] LIAO H, XU Z. Novel Correlation and Entropy Measures of Hesitant Fuzzy Sets[M]//Hesitant Fuzzy Decision Making Methodologies and Applications. Singapore: Springer, 2017: 37-72.

[12] HU J, YANG Y, ZHANG X, et al. Similarity and Entropy Measures for Hesitant Fuzzy Sets[J]. International Transactions in Operational Research, 2018, 25(3): 857-886.

[13] FARHADINIA B. Information Measures for Hesitant Fuzzy Sets and Interval-Valued Hesitant Fuzzy Sets [J]. Information Sciences, 2013, 240:129-144.

[14] 李香英.区间犹豫模糊熵和区间犹豫模糊相似度[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(19): 227-231.

[15] TANG M, LIAO H. Managing Information Measures for Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and Their Applications in Designing Clustering Algorithms[J]. Information Fusion, 2019, 50: 30-42.

[16] SU Z, XU Z, LIU H, et al. Distance and Similarity Measures for Dual Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications in Pattern Recognition[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 29(2): 731-745.

[17] QUIRÓS P, ALONSO P, BUSTICE H, et al. An Entropy Measure Definition for Finite Interval-Valued Hesitant Fuzzy Sets[J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 84: 121-133.

[18] WEI G, LIN R, WANG H. Distance and Similarity Measures for Hesitant Interval-Valued Fuzzy Sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 27(1): 19-36.

[19] 马良,张林,刘新科.基于粗集和证据推理的海外基地保障点选址评估[J].指挥控制与仿真,2014,36(1):88-93.

[20] 张巍,姜大立.战时前沿补给基地选址模型及其拉格朗日松弛算法研究[J].军事运筹与系统工程,2019,33(2):54-61.

[21] 马海英,黄惠春,周林.基于 TOPSIS 法的战区装备保障基地选址择优研究[J].物流技术,2013,32(21):464-466.

（编辑:徐敏）

(上接第 83 页)

的 SCKF 算法,并给出了应用条件。仿真结果表明,本文算法有效提高了 KF 类算法对动态稀疏系统的辨识精度。经过本文算法隔离后所达到的隔离度和信干比相对于常规算法有所改善,其中 l_0-KF 算法最优,将它们提高了 4～5 dB,有效地改善了干扰机的隔离性能。在实际应用中结合物理隔离、极化隔离等其他传统隔离方法,可以实现干扰机的收发同时工作。

参考文献(References):

[1] 赵国庆. 雷达对抗原理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2012.

[2] 吕波,郑秋容,袁乃昌. 一种改善雷达收发隔离的新方法[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(8):1595-1597.

[3] 谢旻睿.有源干扰的收发隔离技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学,2012.

[4] 张凯,王建业,冯增辉. 基于自适应系统辨识的收发隔离技术研究[J]. 现代防御技术,2010(1):77-80.

[5] MARKOVSKY I,PINTELON R. Identification of Linear Time-Invariant Systems from Multiple Experiments [J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2015,63(13):3549-3554.

[6] 邹纯烨,张剑云,周青松. 基于自适应系统辨识的收发隔离技术研究[J]. 现代雷达,2015,37(11):16-21.

[7] 邹纯烨,张剑云,周青松,等. 静态环境下基于分段变步长 NLMS 的收发隔离技术[J]. 现代雷达,2015,37(6):68-73.

[8] BATSELIER K,CHEN Z,WONG N. A Tensor Network Kalman Filter with an Application in Recursive MIMO Volterra System Identification[J]. Automatica,2017,84:17-25.

[9] 曲庆,金坚,谷源涛. 用于稀疏系统辨识的改进 l_0-LMS 算法[J]. 电子与信息学报,2011,33(3):604-609.

[10] VASWANI N. Kalman filtered Compressed Sensing [C]// IEEE International Conference on Image Processing. San Diego,CA,USA: IEEE,2008:893-896.

[11] CARMI A,GURFIL P,KANEVSKY D. Methods for Sparse Signal Recovery Using Kalman Filtering with Embedded Pseudo-Measurement Norms and Quasi-Norms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010,58(4):2405-2409.

[12] KALOUPTSIDIS N,MILEOUNIS G,BABADI B,et al. Adaptive Algorithms for Sparse System Identification[J]. Signal Processing,2011,91(8):1910-1919.

[13] DING X,CHEN W,WASSELL I. Sparsity-Fused Kalman Filtering for Reconstruction of Dynamic Sparse Signals[C]// IEEE International Conference on Communications. London,UK: IEEE,2015: 6675-6680.

[14] LIU H,YONG L,YI Z,et al. Sparse Kalman Filter [C]// IEEE China Summit & International Conference on Signal & Information Processing. Chengdu,China: IEEE,2015:1022-1026.

[15] 占荣辉,张军,欧建平. 非线性滤波理论与目标跟踪应用[M]. 北京:国防工业出版社,2013.

[16] EKSIOGLU E M,TANC A K. RLS Algorithm with Convex Regularization [J]. IEEE Signal Processing Letters,2011,18(8):470-473.

（编辑:徐敏）