五维三元最优线性码的局部度

杨瑞磻，李瑞虎，郭罗斌，付 强
(空军工程大学理学院，西安，710051)

摘要 局部修复码(Locally Repairable Code)中每一码字的任意位发生错误可通过读取此码字的其它若干位予以修复。在应用了局部修复码的分布式存储系统中，任意节点发生损坏时均可通过读取较小数量的其它节点对其进行修复，给出了一些可以达到较小局部修复度的码的生成矩阵的构造方法。通过对相应最优码参数的分析，采用删截、扩展，并置等方法构造出了五维三元最优码的生成矩阵，分析了生成矩阵列向量之间的线性相关关系后，得到了许多具有较小局部度的五维三元最优码。

关键词 三元最优码；生成矩阵；局部修复度
DOI 10.3969/j.issn.1009-3516.2017.04.018
中图分类号 O157.4 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2017)04-0105-07

Locality of Optimal Ternary Codes of Dimension Five

YANG Ruipan, LI Ruihu, GUO Luobin, FU Qiang
(Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: Any codeword symbol in a Locally Repairable Code can be denoted as linear combination of other symbols. In a distributed storage system with locally repairable codes, any node failure can be rebuilt by accessing other fixed nodes. In this paper, some methods of constructing matrices which can generate codes with small locality are proposed. And by analyzing the parameters of the optimal codes, this paper constructs the generator matrices of 5-dimentional optimal codes, by using techniques such as shortening, puncturing, adding or deleting column vectors. By analyzing the linear relationship between the column vectors of the generator matrices, the locality of the codes generated is found out. Many codes with small locality are to be found, which have a potential application prospect.

Key words: optimal ternary codes; generator matrix; locality

在目前的存储系统中，应用重复码是纠正所存储信息错误最常用的策略，其简单易行但存储效率很低。为了提高分布式存储系统的存储效率与节点修复速度，2012 年 Gopalan 首次提出了局部修复码的概念[1]。局部修复码是一类特殊的纠删码，其码字的任一信息位发生错误都可通过访问其它固定数量的信息位进行恢复。如果分布式存储系统的某一节点发生损坏，则该节点存储的信息可立即通过读取其它不超过 r 个相关节点予以修复，此过程中的 r 值就被称为码的局部修复度(locality)[2]。在提出局部修复码概念的同时，Gopalan 还给出了一个局部修复码的参数上界：

收稿日期：2017-01-13
基金项目：国家自然科学基金(11471011)
作者简介：杨瑞磻(1992—)，男，陕西西安人，硕士生，主要从事编码与密码研究. E-mail:695842387@qq.com

引用格式：*杨瑞磻，李瑞虎，郭罗斌，等. 五维三元最优线性码的局部度[J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2017，18(4)：105-111. YANG Ruipan, LI Ruihu, GUO Luobin, et al. Locality of Optimal Ternary Codes of Dimension Five[J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition), 2017, 18(4): 105-111.*

$$d \leqslant n-k+2-\left\lceil \frac{k}{r} \right\rceil \tag{1}$$

为更加准确地进行描述,Cadambe 提出了一个考虑有限域大小 q 的界[3]:

$$k \leqslant \min_{t\in \mathbf{Z}^+}\{tr+k_{opt}^{(q)}(n-t(r+1),d)\} \tag{2}$$

而后大量达到这些界的码被构造出来[4-8]。但这些码的构造都是在大域上进行的,有些构造方法甚至要求所在的有限域的大小 q 要远大于所构造的码长 n。而构造在小域上的码因具有更快的运算速度和对现有硬件更好的兼容性而具有很强的实用价值[9],故对小域上局部修复码构造的研究被提上了日程[9-12]。饶驿等对具有较小局部度的二元循环码进行了研究[13]。最优码具有良好的纠错能力,其和局部修复码的结合有望使得码既保持良好的纠错能力又具有较快的修复速度,因而文献[14]对维数不大于 4 的三元最优码的局部度进行了分析。本文将分析五维三元最优码的局部修复度,通过对其局部度进行分析,有助于找到参数优良的局部修复码。

1 预备知识

定义 1 设 $F_3=\{0,1,2\}$,F_3^n 为 F_3 上 n 维向量空间,若 C 为 F_3^n 的 k 维子空间,则称 C 为 3 元码长为 n 的 k 维线性码。C 中每一个向量称为 C 的一个码字。若 C 中所有非零码字的最小 Hamming 重量为 d,则称 d 为 C 的距离,记做 $C=[n,k,d]_3$。

定义 2 对于任意线性码 $[n,k,d]_q$,记其为 C,令 $C^{\perp}=\{x|x\cdot c=0,c\in C\}$,称 $C^{\perp}$ 为 C 的对偶码。其中 C 的任意一组基为行向量的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 叫做 C 的生成矩阵。

定义 3 在 $[n,k,d]_q$ 线性码 C 当中,若 C 的任意码字中每一位都与其它至多 r 位线性相关,则称 C 为局部修复码,其局部度为 r。

文献[12]指出可以通过判断一个线性码的生成矩阵中列向量之间的线性相关关系来得出这个码的局部修复度。

引理 1[12] 设一个长度为 n 的线性码的生成矩阵 $\boldsymbol{G}=(g_1g_2\cdots g_n)$,若对于 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$,设集合 $A_i\subseteq\{1,2,\cdots,n\}\backslash\{i\}$,$g_i$ 可被至多 r 个 g_j 线性表出($j\in A_i$),则矩阵 $\boldsymbol{G}$ 生成码的局部修复度为 r。

说明:①下文讨论的均为三元线性码,令 $\mathbf{1}_n=(1,\cdots,1)_{1\times n}$,$\mathbf{0}_n=(0,\cdots,0)_{1\times n}$,用 $N(a,b)$ 表示集合 $\{a,a+1,a+2,\cdots,b\}(a,b\in Z^+)$。②将矩阵看作其中所有列向量的集合,若 $\boldsymbol{A}$ 为一个矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中一个列向量,则可将其记作 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{A}$,用 $(\boldsymbol{A}\backslash\alpha)$ 表示在 $\boldsymbol{A}$ 中删除 $\boldsymbol{\alpha}$ 后剩余列向量构成的矩阵。用 $m\boldsymbol{A}$ 表示 m 个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并置而成的新矩阵($m\in Z^+$)。

设 $k\in Z^+$,则 k 维首一列向量的个数为 $n_k=\dfrac{3^k-1}{2}$,显然有 $n_{k+1}=3n_k+1$。用所有的 2 维首一列向量构造 2 维 Simplex 码的生成矩阵 $\boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}1011\\0112\end{pmatrix}$,用递归的方式可得出 k 维 Simplex 码的生成矩阵 $\boldsymbol{S}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{k-1} & \mathbf{0}_{k-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1}\\ \mathbf{0}_{n_{k-1}} & 1 & \mathbf{1}_{n_{k-1}} & 2\times\mathbf{1}_{n_{k-1}}\end{pmatrix}$ 以及 k 维 MacDonald 码的生成矩阵 $\boldsymbol{M}_k=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{k-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_{k-1} & \boldsymbol{S}_{k-1}\\ 1 & \mathbf{1}_{n_{k-1}} & 2\times\mathbf{1}_{n_{k-1}}\end{pmatrix}$。显然 $\boldsymbol{S}_k$ 与 $\boldsymbol{M}_k$ 分别生成 $r=2$ 的最优 $[n_k,k,3^{k-1}]$ 码和最优 $[3^{k-1},k,2\times3^{k-2}]$ 码。为确定某些特殊形式的最优码的局部度,我们给出如下引理。

引理 2[14] 将码长为 n,维数为 k 的最优码生成矩阵记做 $\boldsymbol{G}_{k,n}$,当 $2n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}$ 时,若

$$\boldsymbol{G}_{k+1,n}=\left(\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_s\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\Big|\boldsymbol{M}_{k+1}\right)$$

,则 $\boldsymbol{G}_{k+1,n}$ 生成的 $[n,k+1]$ 码局部度为 2。

引理 3[14] 设 $\boldsymbol{G}_{k,n}$ 生成局部度为 r 的最优 $[n,k,d]$ 码。若 $[n+1,k,d]$ 码为最优的,则存在局部度为 r 的 $[n+1,k,d]$ 最优码。

引理 4[14] ①设 $\boldsymbol{G}_{k,n_1}$ 生成局部度为 r_1 的最优 $[n_1,k,d_1]$ 码,$\boldsymbol{G}_{k,n_2}$ 生成局部度为 r_2 的最优 $[n_2,k,d_2]$ 码,则 $\boldsymbol{G}_{k,n_1+n_2}=(\boldsymbol{G}_{k,n_1}|\boldsymbol{G}_{k,n_2})$ 生成一个 $[n_1+n_2,k,d_1+d_2]$ 码,其局部度 $r\leqslant\min(r_1,r_2)$。②设 $[n,k,d]$ 码与 $[2n,k,2d]$ 码均为最优的,则存在局部度 $r=1$ 的 $[2n,k,2d]$ 最优码。

关于五维三元最优码的存在性问题,现已得到解决[15-18]。但在以前对三元最优码的研究中,人们并未涉及局部度概念,并且对于一般给定参数的 $[n,k,d]$ 最优码,达到此参数的最优码往往有许多个且它们具有不同的 r 值[14-18]。如何构造 r 值尽可能小的 $[n,k,d]$ 最优码。目前仍无具体可用的方法,而现有文献中给出的最优码的 r 值多不理想,为此需进行深入研究。本文将从构造特殊码长的、具有较小 r 值的最优码作为"种子",采用删截、扩展、并置等组合方法,由一个码导出尽可能多的最优码。这 23 个"种子"码的生成矩阵见附录 A(列按重量从小到大排列,在组合构造新码的过程中保证码的 r 值不变)。

2 五维最优码的局部度分析

显然当 $k=5$,$n=6$ 时,存在局部度 $r=5$ 的最优 $[6,5,2]$ 码。因此下文将对五维最优线性码的讨论

按照码长分为 $7\leqslant n\leqslant 121$，$122\leqslant n\leqslant 242$，$n\geqslant 243$ 3 种情况。为简化分析过程，我们设法从“种子码”的生成矩阵出发，构造出更多的最优码生成矩阵，通过分析其列向量的线性相关性，确定其 r 值。

2.1　码长 $7\leqslant n\leqslant 121$ 时

不难验证附录 A 中矩阵生成的$[n,5,d]$码为最优码，这些码为“种子码”。

对于给定的 n，记：$\boldsymbol{G}_{5,n}=(g_1,g_2\cdots g_n)$。记：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_6=(1,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_7=(1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

2.1.1　码长 $7\leqslant n\leqslant 30$ 时最优码的局部度

1）依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,11}$ 的最后的 1，2，3，4 列可分别得到码长 $n=10,9,8,7$ 的最优码生成矩阵。在 $\boldsymbol{G}_{5,11}$ 中，重量为 4 的列向量都可被 4 个重量为 1 的列向量线性表出，对于重量为 5 的列向量 $\boldsymbol{g}_{11}$，有 $\boldsymbol{g}_{11}=\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_4+\boldsymbol{g}_5+\boldsymbol{g}_{10}$，在依次删去后几列的过程中其余列向量之间的线性关系保持不变。当 $n=12$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{6,12}=(\boldsymbol{G}_{6,11}\,|\,\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{G}_{6,11}$ 中任意一列，根据引理 2 其生成局部度 $r=4$ 的最优码。因而码长 $7\leqslant n\leqslant 12$ 时，存在局部度为 4 的$[n,5,d]$最优码。

2）当 $n=16,20,25,29$ 时，依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,n}$ 的最后 1，2，3 列可分别得到码长 $n-1,n-2,n-3$ 的最优码生成矩阵。其中重量为 3 的列向量都可被 3 个重量为 1 的列向量线性表出，对于其他重量的列向量之间的线性相关关系，以 $\boldsymbol{G}_{5,16}$ 为例加以说明：在 $\boldsymbol{G}_{5,16}$ 中有：$\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_5+\boldsymbol{g}_{11}+2\boldsymbol{g}_{12}=0$，$\boldsymbol{g}_4+2\boldsymbol{g}_8+2\boldsymbol{g}_9+2\boldsymbol{g}_{13}=0$，$\boldsymbol{g}_4+2\boldsymbol{g}_8+2\boldsymbol{g}_{10}+2\boldsymbol{g}_{14}=0$，$\boldsymbol{g}_4+2\boldsymbol{g}_8+2\boldsymbol{g}_{10}+2\boldsymbol{g}_{14}=0$，$\boldsymbol{g}_3+2\boldsymbol{g}_7+2\boldsymbol{g}_8+\boldsymbol{g}_{15}=0$，$\boldsymbol{g}_1+2\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_6+2\boldsymbol{g}_{16}=0$。故这些矩阵生成的最优码局部度均为 3。

3）当 $n=21,30$ 时，构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n-1}\,|\,\boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{G}_{5,n-1}$ 中任意一列。

因而码长 $13\leqslant n\leqslant 30$ 时，存在局部度为 3 的$[n,5,d]$最优码。

注：对于码长为 17，21，25，30 的码，除上面所述之外，我们还能构造出 4 个新的最优码的生成矩阵：

$$\boldsymbol{G}'_{5,17}=\begin{pmatrix}10000000011111111\\00011001111112222\\00012110011221122\\01100010122121211\\01200102012112212\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}'_{5,21}=\begin{pmatrix}000000111111111111111\\000111000111111222222\\011001001011222111222\\101010010012122122112\\110100100012212212121\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}'_{5,25}=\begin{pmatrix}0001100011001110011111111\\0010100102010221100111122\\1100011000111000101122212\\0101002020202021110012211\\1010020200220101011021222\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}'_{5,30}=\begin{pmatrix}100000111011001111111011111111\\010000001102100221102110211122\\001001100220212220111112012222\\000100022000121021021101121212\\000011210212010202110221122121\end{pmatrix}。$$

下面以 $\boldsymbol{G}'_{5,17}$ 进行说明，它的列向量之间相关关系见表 1。

此表每一行中 a,b,c 和 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 表示在矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的列向量中存在这样的关系：$\delta_1 g_a+\delta_2 g_b+\delta_3 g_c=0$。也就是说在 $\boldsymbol{G}'_{5,17}$ 中存在：$g_1+g_{10}+g_{17}=0$，$g_1+g_{11}+g_{16}=0$，$g_1+g_{12}+g_{15}=0$，$g_1+g_{13}+g_{14}=0$，$g_2+g_8+2g_9=0$，$g_3+g_6+2g_7=0$，$g_4+2g_6+2g_8=0$，$g_5+g_7+2g_9=0$。故当 $n=17,21,25,30$ 时，还存在 $r=2$ 的最优线性码。

表 1　$\boldsymbol{G}'_{5,17}$ 中列向量的相关关系

Tab. 1　The linear relationship of the column vectors in $\boldsymbol{G}'_{5,17}$

a	b	c	δ_1	δ_2	δ_3
1	10	17	1	1	1
1	11	16	1	1	1
1	12	15	1	1	1
1	13	14	1	1	1
2	8	9	1	1	2
3	6	7	1	1	2
4	6	8	1	2	2
5	7	9	1	1	2

2.1.2　码长 $31\leqslant n\leqslant 121$ 时最优码的局部度

通过删截已有最优码生成矩阵的若干列或向已有矩阵中添加一个或多个列向量可以得到许多最优码的生成矩阵。除码长 $n=39,48,56,57,70,82,83,84,92,109$ 的最优码以及前面给出的“种子码”之外，其余码长的$[n,5,d]$最优码都可由删截得到。

1）删截得到新码的生成矩阵。当 $n=34,38,43,47,61,65,69,74,91,96,100,104,108,113$ 时，依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,n}$ 的最后的 1，2，3 列可分别得到码长 $n-1,n-2,n-3$ 的最优码生成矩阵；当 $n=55$ 时，依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,n}$ 的最后 $i=1,2,\cdots,5$ 列可得到$[n-i,5]$最优码的生成矩阵；当 $n=81$ 时，依次删去 M_5 的最后 $i=1,2,\cdots,6$ 列可得到$[n-i,5]$最优码生成矩阵；当 $n=87$ 时，依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,87}$ 的最后 $i=1,2$ 列可得到$[n-i,5]$最优码生成矩阵；当 $n=121$ 时，依次

删去 $\boldsymbol{S}_5$ 的最后 $i=1,2,\cdots,7$ 列可得到$[n-i,5]$最优码生成矩阵。

以上构造的最优码局部度 $r=2$,下面以 $n=34$ 为例加以论证。矩阵 $\boldsymbol{G}_{5,34}$ 中有:$g_{11}+2g_{13}+2g_{20}=0,g_{12}+2g_{20}+g_{26}=0,g_{15}+2g_{18}+2g_{24}=0,g_{11}+g_{16}+g_{23}=0,g_{11}+2g_{24}+2g_{27}=0,g_{17}+g_{19}+g_{22}=0,g_9+2g_{18}+2g_{30}=0,g_{17}+2g_{21}+2g_{27}=0,g_{24}+g_{25}+g_{28}=0,g_{25}+g_{26}+g_{29}=0,g_{12}+2g_{24}+g_{31}=0,g_{13}+2g_{17}+g_{32}=0,g_{13}+2g_{23}+g_{33}=0,g_{12}+g_{15}+2g_{34}=0$。其它重量为 2 的列向量都可被 2 个重量为 1 的列向量线性表出,因而长度 $n=31,32,33,34$ 的最优码局部度 $r=2$。

2)扩展得到新码的生成矩阵。当 $n=39,48,56,70,92,109$ 时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n-1}|\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}_{5,n-1}$ 中任意一列向量,它们所生成码的局部度与码长 $n-1$ 时的最优码保持一致。同理构造 $\boldsymbol{G}_{5,57}=(\boldsymbol{G}_{5,56}|\boldsymbol{\alpha}_1)$,其生成码的局部度 $r=2$。在矩阵 $\boldsymbol{G}_{5,81}$ 中依次添加列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,可分别得到码长 82,83,84 的最优码生成矩阵,因此这些矩阵生成局部度为 2 的最优码。

总结上述结论,当码长 $31\leqslant n\leqslant 121$ 时,存在局部度 $r=2$ 的最优$[n,5,d]$码。

2.2 码长 $122\leqslant n\leqslant 242$ 时

通过将上一节得到的最优码生成矩阵进行拼接或并置,添加特定列向量等方法可以得到更大码长最优码的生成矩阵。

1)扩展得到新码的生成矩阵。在 $\boldsymbol{S}_5$ 中依次添加列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_7$ 可分别得到码长 122,123,…,127 的最优码生成矩阵,这些矩阵生成的最优码 $r=2$。

2)拼接构造新码的生成矩阵。当 $n\in N(129,133)\cup N(137,151)\cup N(164,170)\cup N(173,178)\cup N(199,213)\cup N(217,242)\cup\{159,182,186,190,191,195\}$时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n-121}|\boldsymbol{S}_5)$;当 $n\in N(134,136)\cup N(160,163)\cup N(179,181)\cup N(183,185)\cup N(187,189)\cup N(192,194)\cup N(196,198)\cup\{128,171,172\}$时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n-81}|\boldsymbol{M}_5)$。

这些矩阵生成的码局部度 $r=2$。

3)$152\leqslant n\leqslant 158$ 时最优码的生成矩阵。设:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}11111100100111111111111111101010010011101011111111111111101011101011111111111\\20000010010121212001200120101010010120101121212121212120101120101121212121212\\01200000000111220012001200112200100100112211221122112200112200112211221122112\\00012001000000001111222200000001112220000000111122220000111112222222000011112222\\00000111222000000000000000111111111111222222000000000111111111111111112222111111\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}01001001111111111111111101011101011111111111111111111111111111111111111111111\\00100101200001200001201011201012121200120012212001200121212121212121212121212\\00010010012000012000011220011221220012001211200120012112211221122112211221122\\11112220000120000121111112222220001111222200011112222111122221111222211112222\\22222221111112222222222222222222222111111111111222222222222222222222221111111122222222\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_3=(\boldsymbol{\beta}_1\ \boldsymbol{\beta}_2\ \boldsymbol{\beta}_3\ \boldsymbol{\beta}_4)$,其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_4=(1,1,2,0,2)^{\mathrm{T}}$。

$\boldsymbol{A}_3$ 中任一列向量都可由其它 2 个列向量线性表示,$\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 均生成局部度为 2 的码,因此 $\boldsymbol{G}_{5,154}=(\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2)$与 $\boldsymbol{G}_{5,158}=(\boldsymbol{A}_1|\boldsymbol{A}_2|\boldsymbol{A}_3)$分别生成局部度为 2 的最优[154,5,102]码和最优[158,5,105]码。当 $n=154,158$ 时,依次删去 $\boldsymbol{G}_{5,n}$ 的 $i=1,2$ 列可得局部度为 2 的$[n-i,5,d]$最优码。当 $n=155$ 时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,155}=(\boldsymbol{G}_{5,154}|\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{G}_{5,154}$ 中任意一列向量。

故当码长 $152\leqslant n\leqslant 158$ 时存在 $r=2$ 的最优$[n,5,d]$码。

4)当 $n=182,214,216$ 时的生成矩阵。构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n/2}|\boldsymbol{G}_{5,n/2})$,其生成局部度为 1 的$[n,5,d]$最优码。

注:除上述情况之外,当 $n=138,160,162,164,206,208,218,226,232,234,240,242$ 时,还可构造 $\boldsymbol{G}'_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n/2}|\boldsymbol{G}_{5,n/2})$。当 $n=163,165,209,217,235$ 时,构造 $\boldsymbol{G}'_{5,n}=(\boldsymbol{G}'_{5,n-1}|\boldsymbol{\gamma})$,$\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{G}'_{5,n-1}$ 的任意一列向量。

故此时还存在 $r=1$ 的最优$[n,5,d]$码。

2.3 码长 $n\geqslant 243$ 时

当 $n\in N(250,254)\cup N(258,272)\cup N(285,291)\cup N(294,299)\cup N(320,334)\cup N(338,363)\cup\{280,303,307,311,312,316\}$时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,n-121}|\boldsymbol{S}_5)$,其生成局部度为 2 的最优码。

当 $n\notin N(250,254)\cup N(258,272)\cup N(285,291)\cup N(294,299)\cup N(320,334)\cup N(338,363)\cup\{280,303,307,311,312,316\}$时,设 $n=121m+i$,m 和 i 均为正整数。当 $i=0,1,2,3,4,5,6,7$ 时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,121+i}|(m-1)\boldsymbol{S}_5)$;当 $i\geqslant 8$ 时,构造 $\boldsymbol{G}_{5,n}=(\boldsymbol{G}_{5,i}|m\boldsymbol{S}_5)$,这些矩阵所生成的最优码局部度均为 1。

总结上述结论可以得到：

定理 1　码长 $7\leqslant n\leqslant 12$ 时存在 $r=4$ 的最优 $[n,5,d]$码；码长 $n\in N(13,29)\backslash\{17,21,22,25\}$时，存在 $r=3$ 的最优$[n,5,d]$码；码长 $n\in\{22,40,58,110,138,160,182,206,208,209,214,226,232,234,235,240,242,280,303,307,311,312,316\}\cup N(162,165)\cup N(216,218)\cup N(250,254)\cup N(258,272)\cup N(285,291)\cup N(294,299)\cup N(320,334)$或 $n\geqslant 338$ 时，存在 $r=1$ 的最优$[n,5,d]$码；码长 n 不在上述范围内时，存在 $r=2$ 的最优$[n,5,d]$码。

3　结语

本文利用三元域上的五维"种子码"，通过删截、扩展和并置"种子码"的生成矩阵等方法，分析了所得生成矩阵列向量之间线性相关关系，从而构造了码长 $n\geqslant 7$ 的$[n,5,d]$局部修复码。文中所得的局部修复码都是距离 d 最优的。对于 r 的最优性，当 $r=1$ 时码已经为最优的；对于 $r\neq 1$ 的局部修复码，经判断，当 $7\leqslant n\leqslant 122$ 时，所构造的码中有 5 个达到界(1)，有 67 个达到界(2)，这些码也为 r 最优的，但对于其它的码我们暂时无法判断其 r 的最优性，这些问题将在后续的工作中进行研究。

参考文献(References)：

[1] GOPALAN P，HUANG C，SIMITCI H，et al. On the Locality of Codeword Symbols [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2012，58：6925-6934.

[2] RAWAT A，PAPAILIOPOULOS D，DIMAKIS A，et al. Locality and Availability in Distributed Storage [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2013：923-928.

[3] CADAMBE V，MAZUMDAR A. An Upper Bound on the Size of Locally Recoverable Codes [C]// IEEE International Symposium on Network Coding，Calgary，Canada，2013：1-5.

[4] SILBERSTEIN N，RAWAT A，KOYLUOGLU O，et al. Optimal Locally Repairable Codes via Rank-metric Codes [C]// IEEE International Symposium on Information Theory. Istanbul，Turkey，2013：819-1823.

[5] TAMO I，PAPAILIOPOULOS D，DIMAKIS A. Optimal Locally Repairable Codes and Connections to Matroid Theory [C]// IEEE International Symposium on Information Theory. Istanbul，Turkey，2013：1814-1818.

[6] TAMO I，BARG A. A Family of Optimal Locally Recoverable Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2013，60(8)：4661-4676.

[7] PRAKASH N，KAMATH G，LALITHA V，et al. Optimal Linear Codes with A Local-Error-Correction Property [C]// IEEE International Symposium on Information Theory. Cambridge，USA，2012：2776-2780.

[8] SONG W，DAU S，YUEN C，et al. Optimal Locally Repairable Linear Codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications，2014，32(5)：1019-1036.

[9] GOPRAJU S，CALDERBANK R. Binary Cyclic Codes That Are Locally Repairable [C]// IEEE International Symposium on Information Theory. New York，USA，2014：676-680.

[10] SILBERSTEIN N，ZEH A. Optimal Binary Locally Repairable Codes via Anticodes [C]// IEEE International Symposium on Information Theory，Hong Kong，China，2015：1249-1251.

[11] ZEH A，YAAKOBI E. Optimal Linear and Cyclic Locally Repairable Codes over Small Fields [C]// IEEE Information Theory Workshop. Jerusalem，Israel，2015：1247-1251.

[12] HUANG P，YAAKOBI E，UCHIKAWA H，et al. Binary Linear Locally Repairable Codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory，2016，62(11)：6268-6283.

[13] 饶驿，李瑞虎，付强，等. 短码长二元循环码的局部修复度 [J]. 空军工程大学学报(自然科学版)，2017，18(2)：106-110.
RAO Y，LI R H，FU Q，et al. Locality of Binary Cyclic Codes in Short Length [J]. Journal of Air Force Engineering University (Natural Science Edition)，2017，18(2)：106-110. (in Chinse)

[14] YANG R，LI R，GUO L，et al. Locality of Some Optimal Ternary Linear Codes [J]. Procedia Computer Science，2017：164-169.

[15] GRASSL M. Bounds on The Minimum Distance of Linear Codes [M/OL]. [2016-12-20]. http：// www. codetables. de.

[16] HILL R，NEWTON D. Optimal Ternary Linear Codes [J]. Designs，Codes and Cryptography，1992，2(2)：137-157.

[17] LANDJEV I. The Nonexistence of Some Optimal Ternary Codes of Dimensional Five [J]. Designs，Codes and Cryptography，1998，15(3)：245-258.

[18] MARUTA T. On the Nonexistence of q-ary Linear Codes of Dimension Five [J]. Designs，Codes and Cryptography，2001，22：165-177.

附录 A:23 个种子码生成矩阵

$$\boldsymbol{G}_{5,11}=\begin{pmatrix}10000011111\\01000101122\\00100220112\\00010112012\\00001122101\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_{5,16}=\begin{pmatrix}1000000111011111\\0100011001110211\\0010001012112102\\0001020120221012\\0000121100102222\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_{5,20}=\begin{pmatrix}10000011011011101111\\01000001120121011212\\00100122201200210221\\00010210210022221012\\00001200002221212111\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,25}=\begin{pmatrix}1000001111001011110110111\\0100000002012111221011121\\0010000122100101012211212\\0001011000110010111221112\\0000120020122201201102112\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_{5,29}=\begin{pmatrix}10000110001111111001011101111\\01000210111000001101112212221\\00100011000121010112122022211\\00010002210201102022101212212\\00001001121010110220120211111\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,34}=\begin{pmatrix}1000001110100111101111111101111111\\0100000201010002111001122212221111\\0010001000021220210211011011222121\\0001010002201022010110210122221212\\0000110020222100002021101112121122\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_{5,38}=\begin{pmatrix}10000010100001101101101111011111111111\\01000101111101110111112202100202122111\\00100000022110001210220222221021111211\\00010011020010210022012012212120111122\\00001121102212021012122210122111221112\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,43}=\begin{pmatrix}1000000000010111011110111101111011101111111\\0100001001120001101111212210001122210021121\\0010000112101020110122220211220210122112122\\0001010210002100112001202011221102021221221\\0000122021222221000000021111122222111101212\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,47}=\begin{pmatrix}10000100000000110111111011111111011110101111111111\\01000010101010021001001101221110212111011222212\\00100001002101101000211012112211200211201222121\\00010010012122120122000020001022121112210212211\\00001201110222002210121200120112012202211221221\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,49}=\begin{pmatrix}1000010100000110111101111011101111111110110111111\\0100000110110001122010202110212112211221011021112\\0010011021001010000222022202011202002112121111221\\0001000001201221010011212212210020112011212122211\\0000102000011202201200020211221112120201101122121\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,55}=\begin{pmatrix}1000000011001110110101011001110111111111110110101111111\\0100011001000001121012001110221001222121112211100112211\\0010001110010021002101100022222122021001110122112212121\\0001010200100101000210222201122122200210022111212211211\\0000100000121010221020120122002210221112121010112111222\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,57}=\begin{pmatrix}111000010100100111001001111111000111111011111101011111111\\000100020210111100111112110000001201002102212211102121121\\000010001101002201020120002111110021222220100122111222112\\000001000022020022110000122100211210012222021111212112112\\000000101012122010202211000021121000120212111010111111122\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,61}=\begin{pmatrix}1000010100000001111011001010111111111111001111010110101111111111\\0100001010110120111001121012221122211211012210122101022112112\\0010011001000212002211202002211121111122111000222001112122222121\\0001000022210100121200000021002122000001111211211222121122111\\0000100000011000000122211220000001221211112112221112111212222\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,66}=\begin{pmatrix}100000011100011111111100110100001110000111011111010111111111111111\\011000010010022220011010201001110010111110112200121022122112211111\\000100000000120112220121002010111101011111101222202200221222211112\\000011001001202002202212020211000001101121110021111121012212112 11\\000000100111000000000000222212222222111000112122111221220212121121\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,69}=\begin{pmatrix}100000011100011111111010011010000111000011110111111010111111111111111\\0110000100100222200111010201001110010111111011022001210221222211221111\\0001000000001201122202121002010111101011110110112222022002221222211112\\000011001001202002202221202021100000110112111120021111121001221211211\\000000100111000000000000222212222222111000111211221112212210212121121\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,74}=\begin{pmatrix}10000101010010111111011101001101010101001011111111110111111100111111111111\\01000011100001021220101012110010000001112111211000101012211211122221121121\\00100110001100012202220120121200101010120021111221011112120012221222211111\\00010000111000000022112221200022221120000111120121111200002112212211212122\\0000100000011120000000000000022122212212212200002121222112111112211122122121\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,87}=\begin{pmatrix}100001001110001111100101100101111110100110110101011011111101111101010111111111111111111\\010000100011002000210212110010000001210211121010121121121112110112121010001111212221211\\001001010001100200221020211202210020121001002100101111200212001111222211120221222111112\\000100100100110020022200021120002222012020010211011100021120211211112210211222111122211 1\\000010011000010002002021002012121202001202201022110111121012122020102121122121221212221\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,91}=\begin{pmatrix}1000010011010001111100101100101111110100110110101011011111101111101010111111111111111111111\\0100001000111002000210212110010000001210211121010121121121112110112121010000111112122221211\\0010010100001100200221020211202210020121001002100101111200212001111222211122022212221121112\\0001001001000110020022200021120002222012020010211011100021120211211112210212122221111222211 1\\0000100110100010002002021002012121202001202201022110111121012122020102121122201212221211222 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,96}=\begin{pmatrix}100001001101100100011110111101111111000101111000001010111111111001110111110101111111001111111111\\010002010010000010022201110011122001110010100110100101122211111101011202211110220211121122111222\\001000102020110000110221101212000200011022010211011000212112122111120020110202201122111112212222\\000100210201001001002021022120110020102100001001220122221121101220121112022211022001111222122211\\000010000000021122100000000000000222121211122222211111200000001222112211121111212112111221111221\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,100}=$$

$$\begin{pmatrix}1000000111111000000000111011100001000110110011101011111111111101011011011101101111111111111111111111\\0100010100020000111010102210210111110102121010001110121221121101012210212121001121012022111122111122\\0010001000100011100120020111011012011100202100020002112220010111110111120121222202222211121221112212\\0001022010002001000001102021002110002011100111202222022101102122211011122022121020210111221112121222\\0000100001000210012201000000201101222120010121112010100021221022112122021201212122201121112212121212\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,104}=$$

$$\begin{pmatrix}0000000000000111111011011010000010111101011001011011111110111011111111111111110111001101111111111111111\\010100010101111200001211000000001121122211100110100100120011122102100122001212212211111100012221212111122\\00000111101002000120100112111110202200120022020000112120102222220012211112010110211200212201121121212212\\101210001120000010021120001212211200000000112222212000001112200112112000121211111201222121212121212112212\\00102120000210000000000211102122001012021100102221122001001012111121112120201022011212212220111211221222\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,108}=$$

$$\begin{pmatrix}1000000010001000111000111000111000000111111000111111110111011100011111111110001111111111111111111111111111\\0100000100010011001011001011001001111000022111000112222101110111110001122222111000112222111221111221122112222\\0010001000100101010101010101010110022002200122122020012110111011221220200121221220200121121211121212122221122\\0001010001000110100110100110100222200220000212212201200111011102122122012002122122012001211211211221122222211\\0000111112222000000111111222222121212121212000000000000111122221121121112122212212221210000012111222221121212\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{5,113}=$$

$$\begin{pmatrix}00000000000001111110110110100000101111010110010110111110110111011111111111111110111001100101111111111111111111111\\0101000101011112000012110000000011211222111001101001001201011122102100122001212212211111121000121221212111221122\\0000011110100200012010011211111020220012002202000011212011022222200122111120101102112001122122011121121212122121122\\1012100011200000100211200012122112000000001122222120000012112200112112000121211111201222221121212212121211221222 11\\00102120000210000000000211102122001012021100102221122001000101211112111212020102201121212021222001112112212221212\end{pmatrix}$$

(编辑:姚树峰)