

# 粒子群优化的 GPSR-BB 压缩感知重构算法

梁丹亚<sup>1</sup>, 李宏伟<sup>1</sup>, 王克<sup>1</sup>, 屈坤<sup>2</sup>

(1.空军工程大学信息与导航学院,陕西西安 710077;2.空军工程大学理学院,陕西西安,710051)

**摘要** 为了减少压缩感知中梯度投影稀疏重构法算法(GPSR-BB)的运行时间和迭代次数,有效地提高算法的重构性能,将具有全局搜索能力的粒子群算法应用到 GPSR-BB 算法中。利用粒子群优化算法的全局开发能力和 GPSR-BB 算法的局部搜索能力,加快了算法的收敛速度,减少了算法的迭代次数;通过对 GPSR-BB 算法中线搜索条件的改进,有效地提高了算法的重构精度。仿真实验表明:改进的 GPSR-BB 算法比传统的 GPSR-BB 算法运行时间缩短了 43%、迭代次数降低了 39.7%。在观测维数一定的条件下,改进的 GPSR-BB 算法重构成功概率高于传统的算法 0.04,重构误差低于传统的 0.09,具有较好的重构性能。

**关键词** 压缩感知;信号重构;GPSR-BB 重构算法;粒子群优化算法

**DOI** 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.01.018

**中图分类号** TN911.7 **文献标志码** A **文章编号** 1009-3516(2015)01-0081-04

## Gradient Projection for Sparse Reconstruction-Barzilai-Borwein Algorithm Based on Particle Swarm Optimization

LIANG Dan-ya<sup>1</sup>, LI Hong-wei<sup>1</sup>, WANG Ke<sup>1</sup>, QU Kun<sup>2</sup>

(1.Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, Chian;  
2.Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** In order to decrease the running time, the number of iteration and effectively improve the reconstruction performance of Gradient Projection for Sparse reconstruction-Barzilai-Borwein algorithm, Particle Swarm Optimization which has the global search ability is introduced in it. Using PSO's global development ability and the local search ability of GPSR-BB algorithm, the convergence speed is increased and the running time is reduced. By the improvement of algorithm line search conditions, the reconstruction precision is improved effectively. Simulation results show that the improved GPSR-BB algorithm is shorter than the traditional algorithm by 43% in running time and by 39.7% in number of iteration. With the condition of a certain measurement dimension, the improved GPSR-BB algorithm is higher than the traditional one by 0.04 in average probability of success and lower than the traditional one by 0.09 in reconstruction error.

**Key words:** Compressed sensing (CS); Signal reconstruction; GPSR-BB algorithm; PSO algorithm

近年来由 Donoho、Candès 及 Tao<sup>[1-2]</sup> 等人提出的压缩感知理论指出信号的采样速率不取决于信号的带宽,而是取决于信息在信号中的位置及内容,此

外证明了当信号在某一变换域上具有稀疏特性时,用低于 Nyquist 采样速率进行采样能够以高概率重构出原始信号。在采样的同时对信号进行压缩,大

**收稿日期:** 2014-06-16

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61172169)

**作者简介:** 梁丹亚(1989-),女,陕西丹凤人,硕士生,主要从事软件无线电研究.E-mail:793221281@qq.com

**引用格式:** 梁丹亚,李宏伟,王克,等. 粒子群优化的 GPSR-BB 压缩感知重构算法[J]. 空军工程大学学报:自然科学版,2015,16(1):81-84. LIANG Danya, LI Hongwei, WANG Ke, et al. Gradient Projection for Sparse Reconstruction-Barzilai-Borwein Algorithm Based on Particle Swarm Optimization[J]. Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition, 2015, 16(1): 81-84.

大降低了传统的先采样后压缩的采样冗余度。该理论为将高频率的模拟信号转换为数字信号提供了有效途径,成为了处理宽带信号的重要手段。

在稀疏基和观测矩阵已知的情况下,获得高效率、快速、复杂度低的重构算法是压缩感知理论研究的核心内容。目前存在的重构算法有:贪婪算法和凸优化算法。梯度投影法(GPSR-BB)<sup>[3]</sup>是凸优化算法的一种,能够有效降低计算量,但也损失了算法性能。为了提高重构效率,文献[4]结合非单调线搜索技术,提出的非单调谱梯度投影算法,提高了重构精度。在投影难以计算时,文献[5]提出了不精确的谱梯度投影法。为了保证梯度投影算法的全局收敛性,文献[6]提出了自适应的非单调线搜索梯度投影算法,既能够有效保证全局收敛又能保持原有梯度投影法的良好性能。但目前这些算法性能仍不是很好,对于某些优化问题当迭代次数较大时,仍不能满足搜索条件。针对上述问题,本文对 GPSR-BB 算法的线搜索进行了改进,并将粒子群优化算(Particle Swarm Optimization)<sup>[7]</sup>应用到 GPSR-BB 算法中,通过实验仿真验证了该改进方法有效地减少了运行时间迭代次数,提高了算法的性能。

## 1 GPSR 重构算法和经典粒子群算法

### 1.1 GPSR 重构算法介绍

CS 理论指出,当信号在某一变化域上是稀疏的,可使用一个与变换基不相关的观测矩阵将高维信号投影到一个低维空间上,然后通过求解一个最优化问题从这些低维数据中以高概率重构出原信号。在信号稀疏表示的基础上,压缩感知凸优化问题重构的目标函数为:

$$a = \min \|a\|_1, \quad (1)$$

$$\text{s.t. } y = \Phi x = \Phi \Psi a = \Theta a$$

在观测矩阵  $\Phi$  满足受限等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)<sup>[8]</sup>下,由 GPSR-BB 重构算法可以以高概率重构出原始信号。

具体的实现步骤:

**步骤 1** 初始化,给定  $z^0, \alpha^0, \alpha_{\min}, \alpha_{\max}, \alpha^0 \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}], \lambda^0 = 1, \text{令 } n = 0$ 。

**步骤 2** 计算搜索方向:  $d^n = w^n - z^n$ 。

**步骤 3** 线搜索。确定步长  $\lambda^n$ ,得到新的点  $z^{n+1} = z^n + \lambda^n d^n$ ,并计算该点的梯度  $\nabla F(z^{n+1})$ 。

**步骤 4** 更新  $\alpha^n$ 。计算  $\gamma^n = (d^n)^\top B d^n$ 。如果  $\gamma^n \leq 0$ ,则  $\alpha^{n+1} = \alpha_{\max}$ 。否则  $\alpha^{n+1} = \max \left\{ \alpha_{\min}, \min \left\{ \frac{\|d^n\|_2^2}{\gamma^n}, \alpha_{\max} \right\} \right\}$ 。

**步骤 5** 终止测试。满足终止条件  $\|z^{n+1} - P_\Omega(z^{n+1} - \alpha^{n+1} \nabla F(z^{n+1}))\| \leq \xi$ ,算法终止,输出  $z^{n+1}, F(z^{n+1})$ ;否则  $n = n + 1$ ,转到步骤 2。

算法的终止条件的设定对梯度投影算法性能影响巨大,它表示的是算法终止时,得到的估计值  $\hat{z}^{n+1}$  与真实值之间的误差,因此选择一个合适的终止条件是十分有必要的。在基于压缩感知理论的信号重构时,希望近似解  $\hat{z}^{n+1}$  的非零元素能够最接近真实解的非零元素,同时目标函数的最小值要接近真实值时的目标函数值,并且算法的计算量不能太大,综合考虑这些因素,本文使用了解决 BCQP 问题的标准终止条件  $\|z^{n+1} - P_\Omega(z^{n+1} - \alpha^{n+1} \nabla F(z^{n+1}))\| \leq \xi$ ,其中  $\xi$  是一个比较小的非负数。

### 1.2 经典粒子群算法介绍

粒子群优化算法是于 1995 年 Kennedy 等人提出,基本的 PSO 算法可如下描述:

设搜索空间为  $N$  维,粒子数为  $P$ , $N$  维搜索空间中的第  $i$  个粒子的位置和速度分别为  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})$  和  $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN})$ ,粒子的个体极值和群体极值分别为  $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})$  和  $P_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gN})$ ,在每次迭代中,粒子通过跟踪 2 个极值来更新自己。在找到这 2 个极值后,粒子的位置和速度更新策略为:

$$v_{ij}(t+1) = \omega v_{ij}(t) + c_1 r_1 [p_{ij} - x_{ij}(t)] + c_2 r_2 [p_{gj} - x_{ij}(t)] \quad (2)$$

式中:  $\omega$  为惯性权重,  $c_1$  和  $c_2$  为正的学习因子;  $r_1$  和  $r_2$  为 0 到 1 之间均匀分布的随机数。

## 2 基于粒子群算法的 GPSR-BB 重构算法实现

粒子群优化算法的全局搜索能力优于梯度投影算法,但局部搜索能力弱于梯度投影算法,导致后期收敛速度减慢。因此,本文将 GPSR-BB 算法和 PSO 相结合,通过 PSO 算法搜索获得局部最优解,再将局部最优解作为 GPSR-BB 算法迭代的初值,减少 GPSR-BB 算法的迭代次数和运行时间。考虑到 GPSR-BB 算法在迭代次数较大时,不能满足线搜索条件,参考文献[10]提出了用函数值的平均代替函数值最小的线搜索条件改进方法,有效地保证了重构精度和重构效率。

### 2.1 线搜索条件的改进

在 GPSR 算法中采用了线搜索技术,文献[10]阐述了非单调线搜索技术一些不足,对于某些优化问题当迭代次数较大时,并不能满足搜索条件,因此

本文借鉴文献[10]中对线搜索条件的改进:用函数值的平均代替函数值的最小。

$$F(\mathbf{z}^n + \lambda^n \mathbf{d}^n) \leq C^n + \lambda^n (\nabla F(\mathbf{z}^n))^T \mathbf{d}^n \quad (3)$$

式中:  $C^{n+1} = \frac{\eta^n Q^n}{Q^{n+1}} C^n + \frac{1}{Q^n} F(\mathbf{z}^{n+1})$ ;  $Q^n = \eta^n Q^n + 1$ ;  $C^0 = F(\mathbf{z}^0)$ ;  $Q^0 = 1$ ;  $\eta^n \in [0, 1]$ ;  $\mathbf{z}^{n+1} = \mathbf{z}^n + \lambda^n \mathbf{d}^n$ 。 $F(\mathbf{z}^n)$  是第  $n$  次搜索的函数最小值。通过式(3)可知,当  $\eta^n = 0$  时,  $C^n = F(\mathbf{z}^n)$ , 式(3)就是原始的线搜索条件;当  $\eta^n = 1$  时,  $C^{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{n=0}^n F(\mathbf{z}^n)$ , 表示函数值的平均值,即为改进的线搜索条件、

文献[10]证明了这种搜索条件的全局收敛性,实验验证了该搜索结果优于非单调线搜索结果。

### 2.2 改进算法的步骤

在使用粒群优化算法时,种群的多样性是影响算法的关键因素。因此,本文参考文献[11]中采用种群分布熵和平均粒距 2 个测度函数的瞬时变化对种群进行变异。

基于粒子群算法的 GPSR-BB 算法的思路为:对粒子群优化算法第  $k$  次迭代获得的最优粒子赋予分布  $[0, 1]$  之间的随机数  $r$ , 设最优解  $P_g$  的局部搜索概率为  $\mu_d$ , 如果  $r < \mu_d$ , 则以种群最优粒子为改进的 GPSR-BB 算法的初值进行局部搜索更新;最后判断是否按照给定变异概率  $\mu_m$  变异。具体实现步骤如下:

**步骤 1 初始化。** 粒子群初始化, 设定种群大小为  $P$ , 执行 GPSR-BB 算法局部搜索概率  $\mu_d$ , 进行变异概率  $\mu_m$ ,  $k=1$ 。

**步骤 2 GPSR-BB 算法局部搜索。** 当粒子群进行到第  $k$  次迭代时, 计算粒子适应度值  $F(\mathbf{z}^n)$ , 对此最优粒子  $P_g$  配置分布于  $[0, 1]$  之间的随机数, 如果随机数  $r < \mu_d$ , 则以此时最优解  $P_g$  作为改进的 GPSR-BB 算法的初始值进行迭代, 否则转步骤 3。

**步骤 3 局部最优位置和全局最优位置的确定。** 将每个粒子的适应值与所有粒子经历过的最好位置  $P_g$  的适应值作比较, 如果当前适应值较理想, 则将其作为当前最好的位置; 比较当前所有  $P_i$  和  $P_g$  的值, 更新全局最优解  $P_g$ 。

**步骤 4 更新。** 按照式(2)更新粒子的速度和位置。

**步骤 5 执行变异操作。** 将种群的  $E(t)$  和  $D(t)$  与给定的阈值  $E_{\min}$  和  $D_{\min}$  作比较, 如果小于阈值, 则对第  $i$  个粒子配置分布于  $[0, 1]$  之间的随机数  $p$ , 如果随机数  $P$  小于变异概率  $\mu_m$ , 则执行变异操作; 否则转步骤 6。

**步骤 6 终止。** 满足迭代停止条件, 终止。否

者转步骤 2。

## 3 实验结果与分析

本节给出传统的 GPSR-BB 算法与改进 GPSR-BB 算法重构性能对比的实验结果。实验中, 若重构信号与原信号的均方误差小于  $10^{-3}$ , 则可认为信号被成功重构, 重构误差忽略不计。定义信号重构成功率为:

$$\text{重构成功率} = \text{信号重构的次数} / \text{测试次数} \quad (4)$$

定义平均重构误差为:

$$\text{error} = \frac{\|x - \hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \quad (5)$$

### 3.1 可行性验证

采用长度为  $N=4096$ ,  $K=160$  的稀疏信号进行重构, 观测值数目  $M$  取 1024, 观测矩阵  $\Phi$  是  $M \times N$  的高斯随机矩阵。算法中出现的参数取值为  $\alpha_{\min} = 10^{-30}$ ,  $\alpha_{\max} = 10^{30}$ ,  $\alpha^0 = 10$ ,  $\xi = 10^{-4}$ ,  $\eta^0 = 0.5$ , 参数  $\tau = 0.005(\max(|\Phi^T \cdot \mathbf{y}|))$ 。粒子群优化算法的参数 ( $P, c_1, c_2, \mu_d, \mu_m, E_{\min}, D_{\min}$ ) 为 (30, 2.00, 0.95, 0.10, 0.025, 0.025, 0.001)。

从图 1 可以看出信号被完全重构, 仿真得出改进的 GPSR-BB 算法的重构误差为  $5.6364 \times 10^{-4}$ , 未改进的 GPSR-BB 算法重构误差为 0.0068。因此, 改进的算法重构信号的精度更高。

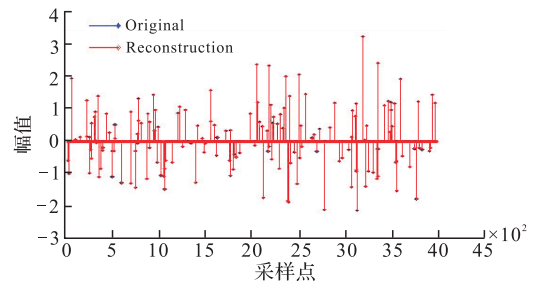


图 1 基于粒子群优化算法的 GPSR-BB 重构算法

Fig. 1 GPSR-BB algorithm based on PSO

在此基础上我们将上述实验实现 1000 次, 得出平均重构误差、迭代次数和运行时间, 见表 1。

表 1 算法性能比较

Tab.1 Comparison of algorithm performance

算法	迭代次数	运行时间/s	重构误差	目标函数的值
GPSR-BB 算法	259	5.27	6.897e-003	1.543
改进的 GPSR-BB 算法	156	3.02	2.566e-003	1.146

表 1 是  $N=4096$ ,  $K=160$  时, 原始算法与改进算法的性能比较。从表中可以看出, 改进的算法在 CPU 运行时间和迭代次数上, 明显优于传统的 GPSR 算法, 分别缩短了 43% 和 39.7%, 目标函数

的值和重构误差相对较低,与预计结果相同。改进的算法性能优越的主要原因是:以 PSO 算法的局部最优解作为梯度搜索的初值,减少了迭代的次数;而对线搜索条件进行改进,提高了重构算法的精度。总体看来本文提出的算法在重构质量和重构效率上均有所提高。

### 3.2 不同观测维数下,重构误差和成功概率比较

实验中比较了传统的 GPSR-BB 算法与改进的 GPSR-BB 算法在无噪环境下的重构成功率和重构误差。本次实验中信号长度为  $N=4096$ ,稀疏度  $K=160$ ,观测维数  $M$ ,采用高斯随机观测矩阵,参数与试验 1 相同,实验重复 1000 次,

图 2 和 3 分别表示在稀疏度  $K=160$  时,观测维数与重构误差和重构成功概率之间的关系。显而易见,随着通道数的增加信号稀疏系数重构成功概率增大,重构误差降低,并且在观测维数相同的情况下,改进的算法与原始的 GPSR 算法相比,平均重构成功概率有 0.04 的提高,重构误差低有 0.09 的降低;在重构成功概率达到 1 时,完全重构所需观测维数比原始算法观测维数少。

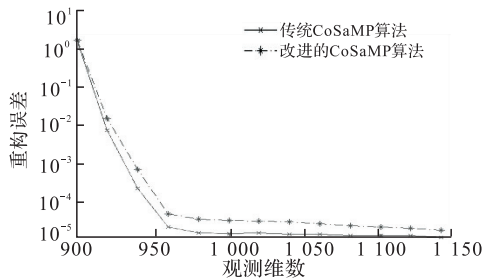


图 2 重构误差的比较

Fig.2 Comparison of reconstruction error

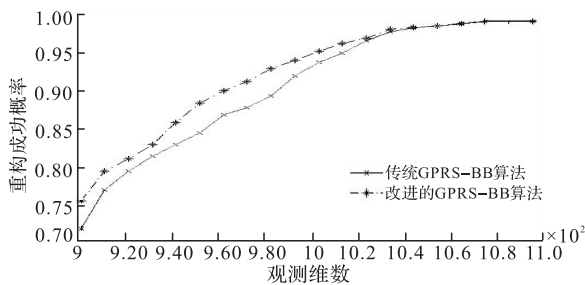


图 3 重构成功概率的比较

Fig.3 Comparison of average probability of success

## 4 结语

本文将 GPSR-BB 算法和 PSO 相结合,通过 PSO 算法搜索获得局部最优解,再将局部最优解作为 GPSR-BB 算法迭代的初值,减少 GPSR-BB 算法的迭代次数和运行时间。在考虑 GPSR-BB 算法在迭代次数较大时,不能满足线搜索条件的基础上,提

出了用函数值的平均代替函数值的最小的线搜索条件改进方法,有效地保证了算法的重构精度和重构效率。

### 参考文献(References):

- [1] Candès E, Romberg J, Tao T. Stable Signal Recovery From Incomplete and Inaccurate Measurements[J]. Comm Pure Appl Math, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [2] Candès E, Tao T. Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections and Universal Encoding Strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406-5245.
- [3] Mário A, Robert D, Stephen J. Gradient Projection for Sparse Reconstruction Application to Compressed Sensing and Other Inverse Problems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586-597.
- [4] Birgin E G, Martinez J M, Raydan M. No Monotone Spectral Projected Gradient Methods On Convex Sets[J]. SIAM Journal on Optimization, 2000(10): 1196-1211.
- [5] 林骥, 宇振盛. 一种新的自适应非单调谱投影梯度法[J]. 上海理工大学学报, 2009, 31(2): 108-112.  
LIN Ji, YU Zhensheng. New Dass of Adap Tiue Nonmonotone Spetral Projected Gradient Method[J]. Journal of University of Shanghai for Science and Technology, 2009, 31(2): 108-112. (in Chinese)
- [6] 何宜宝, 毕笃彦, 马时平, 等. 梯度投影法求解压缩感知信号重构问题[J]. 北京邮电大学学报, 2012, 35(4): 112-115.  
HE Yibao, BI Duyan, MA Shiping. Problem of Signal Reconstruction of Compressive Sensing Sowed by Gradient Projection[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2012, 35(4): 112-115. (in Chinese)
- [7] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle Swarm Optimization[C]//Proc of International Conference on Neural Networks. Piscataway: IEEE Press, 1995: 1942-1948.
- [8] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [9] Zhang C S, Sun J G. An Alternate two Phases Particle Swarm Optimization Algorithm for Flow Shop Scheduling Problem [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(3): 5162-5167.
- [10] Dai Y H, Fletcher R. Projected Barzilai-Borwein Methods for Large-Scale Box-Constrained Quadratic Programming[J]. Numerische Mathematik, 2005, 100(1): 21-47.
- [11] 张建军, 王仲生, 余汇. 采用混合粒子群算法实现匹配追踪算法[J]. 振动与脉冲, 2010, 29(1): 143-147.  
ZHANG Jianjun, WANG Zhongsheng, YU Hui. Matching Pursuit Based on Hubrid Particle Swarm Optimization Algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(1): 143-147. (in Chinese)

(编辑: 姚树峰)